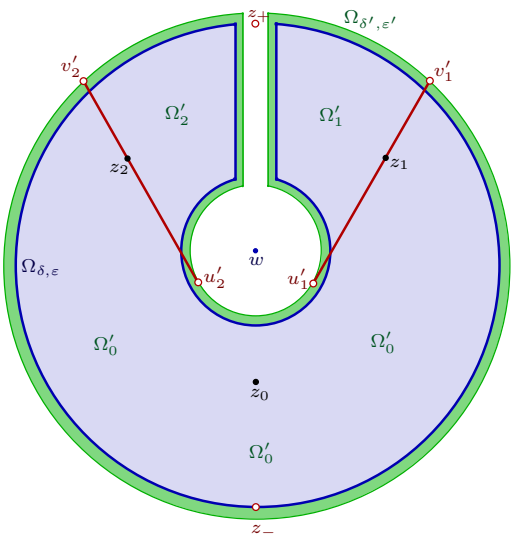
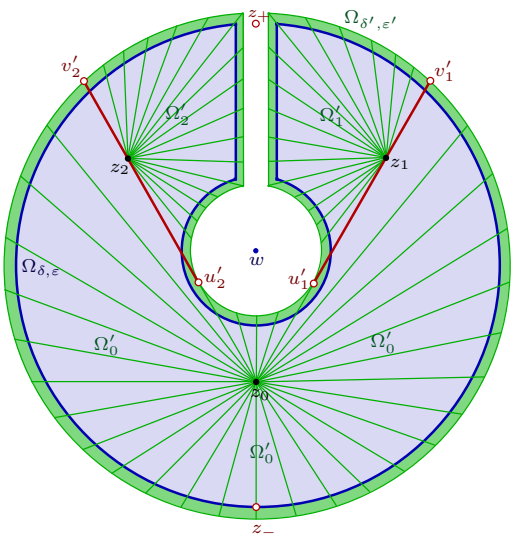
Analyse Complexe

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

« Celui qui enseigne une chose la connaît rarement à fond, car s'il l'étudiait à fond afin de l'enseigner, il n'aurait alors plus assez de temps disponible pour l'enseigner. »

Jacques-Henri D'AGUESSEAU.





α	β	γ	δ	ε	ζ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
η	θ	ι	κ	λ	μ
Eta	Theta	Lota	Kappa	Lambda	Mu
ν	ξ	ο	π	ρ	σ
Nu	Xi	Omicron	Pi	Rho	Sigma
τ	υ	φ	χ	ψ	ω
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Méthodologie de travail

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

• **Lecture régulière du polycopié.** *Afin de réussir sa formation au métier merveilleux de mathématicien —* ***métier qui exige une grande capacité de lire, en solitaire, des textes mathématiques écrits*** *—, chaque étudiant doit lire et étudier le polycopié*. Le travail de lecture peut s'effectuer occasionnellement, même sur des courtes périodes d'une dizaine de minutes, à la maison, à la bibliothèque ou dans les transports en commun. ***C'est en lisant qu'on devient vraiment intelligent***, car on absorbe les intelligences variées d'autres personnes sans rester confiné en soi-même, voire infiniment pire : confiné à l'abrutissement total du tripotage crétinisant de smartphone ! Tous les mathématiciens professionnels sont de grands lecteurs et savent mettre à distance la technologie ludique envahissante.

• **Assiduité au cours.** Il est vrai que lire des mathématiques peut s'avérer ardu, d'autant plus que d'assez nombreux textes écrits sous-entendent beaucoup de choses et ne parviennent pas véritablement à transmettre les intuitions fondamentales. Or ***c'est principalement le cours oral au tableau qui permet de transmettre les idées informelles et les intuitions importantes***. Aussi, lecture du polycopié et présence au cours sont-elles *deux activités complémentaires et indispensables pour une préparation optimale au métier de mathématicien*. De plus, *on lit beaucoup plus facilement le polycopié après avoir écouté le professeur*. ***De toute façon, une bonne prise de notes manuscrites personnelles a plus de valeur que le polycopié.***

• **Prise de notes pendant les séances de cours.** ***L'existence d'un polycopié ne dispense absolument pas de prendre des notes manuscrites complètes et soignées***, car ces notes, relatives au cours intuitif, viendront compléter la lecture du polycopié écrit. *Au tableau apparaîtront de nombreuses figures qui seront absentes du polycopié*. ***Il faut donc être très respectueux des figures, qui sont de la pensée intuitive très élaborée***.

Table des matières

I. Fonctions holomorphes, Fonctions analytiques **8**

1. **Introduction** **8**
2. **Nombres complexes et similitudes complexes** **9**
3. **Convergence** **12**
4. **Sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$** **13**
5. **Exhaustion d'ouverts de $\mathbb{C}$ par des compacts** **17**
6. **Fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$** **20**
7. **Fonctions holomorphes comme applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$** **24**
8. **Géométrie infinitésimale de l'holomorphie** **30**
9. **Séries entières** **32**
10. **Fonctions analytiques et fonctions holomorphes** **41**
11. **Principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques** **42**
12. **Intégration le long de courbes $\gamma \subset \mathbb{C}$** **45**
13. **Pathologies « réelles »** **50**
14. **Exercices** **52**

II. Théorèmes de Cauchy et applications **62**

1. **Introduction** **62**
2. **Théorème de Goursat** **63**
3. **Existence locale de primitives et théorèmes de Cauchy dans des disques** **67**
4. **Contours élémentaires** **69**
5. **Exemples de calculs d'intégrales réelles par la méthode complexe** . **76**
6. **Formule de représentation intégrale de Cauchy** **79**
7. **Analyticité des fonctions holomorphes et principe d'unicité** **82**
8. **Inégalités de Cauchy et principes du maximum** **86**
9. **Théorème de Morera et convergence uniforme sur des compacts** .. **93**
10. **Principe de symétrie de Schwarz** **97**
11. **Théorème d'approximation de Weierstrass complexe dans un disque** **100**
12. **Théorème de Runge rationnel** **102**

13. Théorème de Runge polynomial 109
14. Approximation polynomiale sur des ouverts à complémentaire connexe 110
15. Exercices 113

III. Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes ... 119

1. Introduction 119
2. Carré 119
3. Concept d'homotopie 126
4. Zoologie singulière 129
5. Fonctions méromorphes locales 130
6. Théorèmes de Laurent 133
7. Singularités illusoires, polaires, essentielles 137
8. Fonctions méromorphes globales : Théorème de Mittag-Leffler ... 141
9. Ouverts simplement connexes 145
10. Exponentielle complexe et logarithme complexe 146
11. Ouverts holomorphiquement simplement connexes 152
12. Exercices 154

IV. Théorème des résidus et applications 156

1. Introduction 156
2. Raison d'être des résidus 156
3. Calculs pratiques de résidus : recettes diverses 158
4. Théorème des résidus pour les contours de Jordan 160
5. Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus 163
6. Indices de courbes par rapport à un point 168
7. Théorème des résidus homologique 171
8. Théorème des résidus sans connexité simple 174
9. Dénombrement de zéros et de pôles 177
10. Caractérisation de la connexité simple en termes d'indices 181
11. Synthèse intermédiaire : connexité simple et holomorphie 184
12. Exercices 184

V. Contours de Jordan $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ et Théorème de Cauchy-Jordan 186

1. Introduction 186
2. Connexité du complémentaire d'un arc de Jordan $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans $\mathbb{C}$ 186
3. Théorème de Jordan pour les contours $\Gamma \subset \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ 193
4. Démonstration par l'argument de saut d'indice 197

5. Théorème de Cauchy-Jordan pour les fonctions holomorphes 203
6. Exercices 206
VI. Théorème de l'application conforme de Riemann 207
1. Introduction 207
2. Théorèmes d'inversion locale et globale dans $\mathbb{R}^2$ 207
3. Inversion holomorphe 209
4. Forme normale locale d'une fonction holomorphe 212
5. Multiplicités locales et théorème de l'application ouverte 213
6. Fonctions holomorphes injectives : théorème fondamental 215
7. Équivalence entre le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ ... 216
8. Lemme de Schwarz 218
9. Automorphismes du disque unité 219
10. Présentation du théorème de Riemann 221
11. Théorème de Montel pour les familles uniformément bornées et continues 223
12. Démonstration du Théorème de Montel 225
13. Préservation de l'injectivité à la limite 231
14. Démonstration du théorème de Riemann conforme 233
15. Synthèse : sept caractérisations de la connexité simple 238
16. Exercices 239
VII. Fonctions entières et produits infinis 240
1. Introduction 240
2. Formule de Jensen 241
3. Produits infinis 246
4. Formule de produit d'Euler pour la fonction sinus 252
5. Formule produit d'Euler pour les nombres premiers 255
6. Produits infinis de Weierstrass 257
7. Théorème de factorisation de Hadamard 260
8. Démonstration du lemme-clé 265
9. Exercices 269
VIII. Transformée de Fourier et fonctions holomorphes 270
1. Introduction 270
2. Fonctions holomorphes de module décroissant dans des bandes ... 271
3. Décroissance exponentielle de la transformée de Fourier, et inversion 275
4. Formule sommatoire de Poisson : Approche holomorphe 279

5. Théorème de Paley-Wiener 281
6. Exercices 289
IV. Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann 290
1. Introduction 290
2. La fonction $\Gamma(z)$ 290
3. La fonction $\zeta(s)$ 299
4. Exercices 304
X. Théorème des nombres premiers 305
1. Introduction 305
2. Sept lemmes capitaux 305
3. Démonstration du théorème analytique 312
4. Exercices 315
XI. Éléments introductifs sur le Théorème de Dirichlet 317
1. Introduction 317
2. Historique succinct 319
XII. Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet 321
1. Introduction 321
2. Arithmétique élémentaire et formule d'Euler 321
3. Présentation des idées de Dirichlet dans un cas simple 325
4. Groupes abéliens finis, caractères, séries de Fourier discrètes 328
5. Présentation des idées de Dirichlet dans le cas général 331
6. Non-annulation en $s = 1$ des fonctions $L(s, \chi)$ 335
7. Exercices 343
XIII. Densité des premiers dans les progressions arithmétiques 345
1. Introduction 345
2. Exercices 353
XIV. Théorème de Jordan 354
1. Introduction 354
2. Théorème de Jordan différentiable 354
3. Démonstration du théorème des diagonales 366
4. Ensemble de Cantor 366
5. Courbe de Jordan-Cantor-Osgood 373
6. Démonstration du théorème de Jordan continu 378
7. Appendices 379
XV. Examens corrigés 380

1. Examen 1 ..... **380**
2. Corrigé de l'examen 1 ..... **384**
3. Examen 2 ..... **392**
4. Corrigé de l'examen 2 ..... **396**
5. Examen 3 ..... **408**
6. Corrigé de l'examen 3 ..... **412**
7. Examen 4 ..... **423**
8. Corrigé de l'examen 4 ..... **428**
9. Examen 5 ..... **439**
10. Corrigé de l'examen 5 ..... **442**
11. Examen 6 ..... **450**
12. Corrigé de l'examen 6 ..... **454**
13. Examen 7 ..... **462**
14. Corrigé de l'examen 7 ..... **466**

Fonctions holomorphes, Fonctions analytiques
Intégration le long de courbes

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Ce chapitre commence par un survol rapide des propriétés algébriques élémentaires des nombres complexes, avant de présenter les concepts topologiques fondamentaux concernant les sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Ensuite, on définit précisément la notion-clé de *fonction $\mathbb{C}$-différentiable ou holomorphe*, qui est l'analogue complexe de la notion de fonction réelle $\mathbb{R}$-différentiable. On caractérise alors l'*holomorphie* par les équations dites *de Cauchy-Riemann*, et on démontre que les séries entières convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad (a_n \in \mathbb{C})$$

en la variable complexe $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ sont toujours $\mathbb{C}$-différentiables, *i.e.* holomorphes.

Enfin, on définit la notion d'*intégration* d'une fonction le long d'une courbe $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tracée dans le plan complexe $\mathbb{C}$. En particulier, on démontre un premier résultat important de la théorie d'après lequel, si une fonction $f = f(z)$ holomorphe par rapport à la variable $z = x + iy$ admet une *primitive*, à savoir une fonction $F = F(z)$ dont la $\mathbb{C}$-dérivée par rapport à z est exactement f, alors pour toute courbe fermée $\sigma \subset \mathbb{C}$, on a :

$$0 = \int_{\sigma} f(z)\, dz.$$

Ainsi s'effectuera le tout premier pas vers la théorie *magique* de Cauchy, laquelle joue un rôle absolument central dans la toute belle *Analyse Complexe*.

2. Nombres complexes et similitudes complexes

Un *nombre complexe* prend la forme :

$$z = x + i\,y,$$

où x et y sont deux nombres réels et où i est un nombre (abstrait) satisfaisant :

$$i^2 = -1,$$

que les mathématiciens asiatiques préfèrent noter systématiquement :

$$\sqrt{-1},$$

mais il s'agit d'un autre continent, où l'on ne craint aucun caractère. Classiquement, on note :

$$\boxed{\mathbb{C}}$$

l'ensemble de ces nombres.

On appelle x la *partie réelle* de z et y la *partie imaginaire* de z :

$$x = \mathsf{Re}\, z,$$
$$y = \mathsf{Im}\, z.$$

Les nombres réels sont donc précisément les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle, et les nombres *purement imaginaires :*

$$\big\{i\,y\colon\ y \in \mathbb{R}\big\},$$

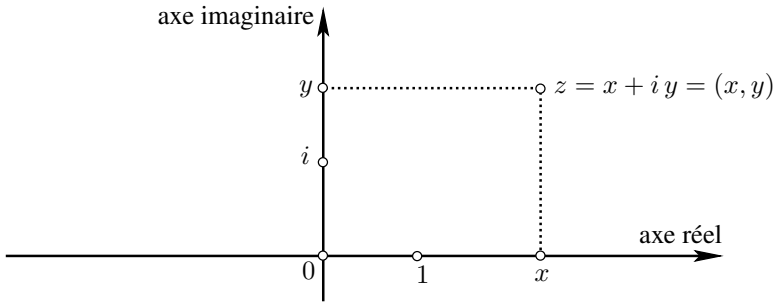
ceux dont la partie réelle est nulle.

Grâce à Argand et à Gauss, on peut visualiser les nombres complexes dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ en identifiant :

$$\mathbb{C} \ni x + i\,y \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, $0 \in \mathbb{C}$ correspond à l'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, et le nombre $i = \sqrt{-1}$ correspond au point $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Naturellement, l'axe des x est appelé l'*axe réel*, tandis que l'axe des y est appelé l'*axe imaginaire*.



Les règles pour additionner et pour soustraire les nombres complexes sont naturelles : il suffit de conserver en mémoire que $i^2 = -1$.

Par exemple, étant donné deux nombres complexes :

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = x_2 + i\,y_2,$$

leur somme vaut :

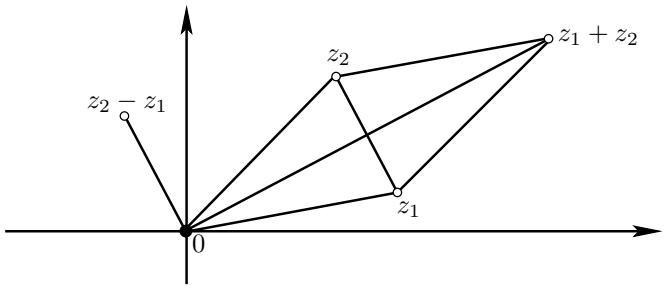
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$

et leur produit vaut :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i\, y_1)\,(x_2 + i\, y_2) \\ &= x_1 x_2 + i\, x_1 y_2 + i\, y_1\, x_2 + i^2\, y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Si l'on prend ces deux expressions pour définitions de l'addition et de la multiplication, il est facile de vérifier les trois propriétés suivantes.

- Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ et $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
- Distributivité : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.



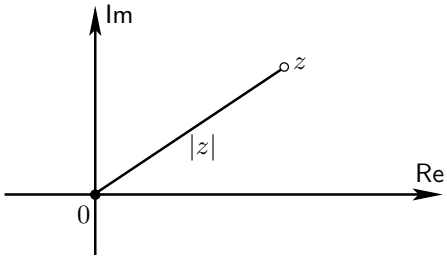
Géométriquement, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$. La multiplication quant à elle consiste en une rotation suivie d'une dilatation, un fait qui devient intuitivement transparent une fois qu'on a introduit la forme polaire d'un nombre complexe (voir ci-dessous). À ce stade, observons au moins que *la multiplication par i correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.*

La notion de valeur absolue d'un nombre complexe est identique à la norme euclidienne des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.1. La *valeur absolue* ou le *module* d'un nombre complexe $z = x + i\, y$ est la quantité positive :

$$|z| := \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

de telle sorte que $|z|$ est précisément la *distance euclidienne* entre l'origine $(0, 0)$ et le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Bien entendu, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et l'*inégalité du triangle* est tout aussi valable :

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad (z, w \in \mathbb{C}).$$

D'autres inégalités seront aussi utiles. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big|\mathsf{Re}\, z\big| \leqslant |z|,$$
$$\big|\mathsf{Im}\, z\big| \leqslant |z|,$$

et pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|,$$

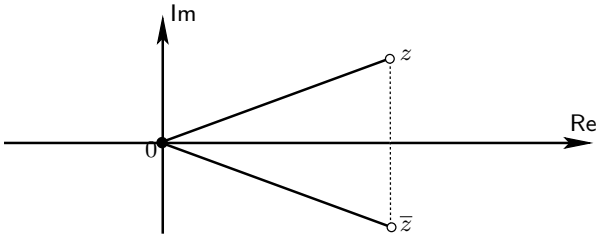
ce qui découle par soustraction de l'inégalité du triangle, puisque :

$$|z| \leqslant |z - w| + |w| \qquad \text{et} \qquad |w| \leqslant |z - w| + |z|.$$

Définition 2.2. Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + i\,y$ est le nombre :

$$\overline{z} = x - i\,y,$$

que l'on obtient géométriquement en appliquant la symétrie le long de l'axe réel du plan complexe.



Évidemment, un nombre complexe z est réel si et seulement si :

$$z = \overline{z},$$

et il est imaginaire pur si et seulement si :

$$z = -\,\overline{z}.$$

On vérifie aussi sans difficulté que :

$$\mathsf{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2},$$
$$\mathsf{Im}\, z = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}.$$

De plus :

$$|z|^2 = z\,\overline{z},$$

et aussi :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad (z \neq 0).$$

Définition 2.3. Un nombre complexe quelconque $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ non nul peut toujours s'écrire sous forme *polaire :*

$$z = r\,e^{i\,\theta},$$

avec $r > 0$ réel égal au module $|z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ appelé l'*argument* de z, qui est défini à un multiple entier $\in \mathbb{Z}$ de 2π près, traditionnellement noté :

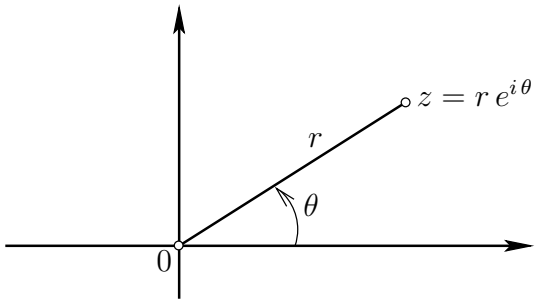
$$\theta = \mathsf{arg}\, z,$$

sachant que :

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta, \\ e^{i(\theta+2k\pi)} &= \cos\big(\theta+2k\pi\big) + i\sin\big(\theta+2k\pi\big) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta, \end{aligned}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, en effet.

Puisque $|e^{i\,\theta}| = 1$, le nombre θ est l'*angle* que fait la demi-droite $0z$ avec l'axe des réels positifs.



Enfin, notons que la multiplication entre deux nombres complexes $z = r\,e^{i\,\theta}$ et $w = s\,e^{i\,\varphi}$ donne :

$$z\,w = rs\,e^{i(\theta+\varphi)},$$

de telle sorte que *la multiplication complexe consiste toujours, géométriquement, en une homothétie composée (commutativement) avec une rotation.*

3. Convergence

Les notions-clés de *convergence* et de *limite* permettent maintenant d'effectuer une transition appropriée.

Définition 3.1. Une suite de nombres complexes :

$$\big\{z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ldots\big\}$$

est dite *convergente* vers un nombre complexe $z_\infty \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big|z_n - z_\infty\big|.$$

Cette notion de convergence n'a rien de nouveau, puisque la valeur absolue dans $\mathbb{C}$ s'identifie à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la suite de points $z_n = x_n + i\,y_n$ du plan converge vers le point $z_\infty = x_\infty + i\,y_\infty$. On vérifie en effet (exercice mental) que :

$$z_\infty = \lim_{n\to\infty} z_n \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{et} \qquad y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n\Big).$$

Comme il n'est pas toujours possible de réellement identifier explicitement la limite d'une suite, comme par exemple le nombre réel fini $\zeta(3) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ dont on sait seulement qu'il est irrationnel (Apéry 1978), il est nécessaire de posséder un critère qui assure la convergence d'une suite.

Définition 3.2. Une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est dite être une *suite de Cauchy* lorsque :

$$0 = \lim_{n_1,\,n_2\to\infty} \big|z_{n_2} - z_{n_1}\big|,$$

à savoir plus précisément lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \gg 1 \qquad \Big(n_1,\ n_2 \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \big|z_{n_2} - z_{n_1}\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Une propriété fondamentale du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est qu'il est *complet : toute suite de Cauchy de nombres réels admet une (unique) limite qui est un nombre réel*. C'est d'ailleurs pour assurer l'existence de limites, souvent inexistantes dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, que l'on construit $\mathbb{R}$ comme étant la *complétion* de $\mathbb{Q}$, soit en idéalisant les limites de toutes les suites de Cauchy possibles, soit en utilisant la notion de coupure au sens de Dedekind.

Bien entendu, la complétude de $\mathbb{R}$ est héritée par $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (exercice mental).

Théorème 3.3. *Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est complet.* □

4. Sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$

Tournons maintenant notre attention vers des considérations topologiques élémentaires qui seront nécessaires à notre étude ultérieure des fonctions.

Définition 4.1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point, pour $r > 0$, le *disque ouvert* $\mathbb{D}_r(z_0)$ *de centre* z_0 *et de rayon* r est l'ensemble :

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| < r\big\},$$

et c'est précisément le disque géométrique euclidien (ouvert) dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(\mathsf{Re}\, z_0, \mathsf{Im}\, z_0)$ et de rayon r.

Le *disque fermé* $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ *de centre* z_0 *et de rayon* $r \geqslant 0$ est quant à lui l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| \leqslant r\big\}.$$

Enfin, le bord géométrique commun de deux tels disques, ouvert ou fermé, de rayon $r > 0$, est bien entendu le *cercle de centre* z_0 *et de rayon* r *:*

$$\begin{aligned} C_r(z_0) &:= \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| = r\big\} \\ &= \partial\, \mathbb{D}_r(z_0) \\ &= \partial\, \overline{\mathbb{D}}_r(z_0). \end{aligned}$$

Dans la théorie des fonctions holomorphes que nous allons développer et découvrir ensemble, le *disque unité*, à savoir le disque de rayon 1 centré à l'origine, va jouer un rôle particulièrement important, et nous le noterons :

$$\boxed{\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\big\}.}$$

Définition 4.2. Étant donné un sous-ensemble *quelconque* $E \subset \mathbb{C}$, un point $z_0 \in E$ est dit être un *point intérieur* s'il existe un disque ouvert de rayon $r > 0$ assez petit centré en z_0 qui est contenu dans E :

$$\mathbb{D}_r(z_0) \subset E.$$

L'*intérieur* $\mathsf{Int}\, E$ de E est la réunion de tous les points intérieurs de E. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *ouvert* lorsque chacun de ses points est un point intérieur :

$$\forall\, z_0 \in \Omega \quad \exists\, r > 0 \quad \mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega,$$

ou, de manière équivalente, lorsque :

$$\mathsf{Int}\, \Omega = \Omega.$$

On se convainc aisément (exercice de compréhension) que cette définition munit $\mathbb{C}$ d'une topologie, ne serait-ce que parce que cette topologie coïncide avec la topologie standard de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.3. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit *fermé* lorsque son complémentaire :

$$\mathbb{C} \backslash F$$

est ouvert.

Cette notion d'ensemble fermé peut être reformulée et comprise en termes d'adhérence.

Définition 4.4. Un point $z \in \mathbb{C}$ est dit être un *point adhérent* à un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ lorsqu'il existe une suite de points $z_n \in E$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

L'*adhérence* $\overline{E}$ de E est la réunion de E avec tous les points qui lui sont adhérents.

On vérifie (exercice) qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si et seulement si tout point adhérent à F appartient encore à F, ou de manière équivalente, si et seulement si :

$$\overline{F} = F.$$

Définition 4.5. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un sous-ensemble $E \subset \Omega$ est dit *discret* lorsque :

$$\begin{aligned} \forall\, z \in E \quad \exists\, \mathbb{D}_r(z) \ \text{ avec } \ r > 0 \ \text{ et } \ \mathbb{D}_r(z) \subset \Omega \\ \text{tel que } \ \mathbb{D}_r(z) \cap E = \{z\}. \end{aligned}$$

Définition 4.6. Le *bord* ∂E d'un ensemble E est le complémentaire de son intérieur dans son adhérence :

$$\partial E := \overline{E} \backslash \mathsf{Int}\, E.$$

Ainsi, $w \in \partial E$ s'il existe deux suites $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $z_n \in E$ et $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $\zeta_n \in \mathbb{C} \backslash E$ telles que :

$$\lim_{n \to \infty} z_n \ = \ w \ = \ \lim_{n \to \infty} \zeta_n,$$

ce qui veut dire, intuitivement, que ∂E consiste en les points qui 'hésitent' entre E et son complémentaire $\mathbb{C} \backslash E$.

Définition 4.7. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *borné* s'il existe un rayon $R > 0$ assez grand pour que :

$$E \ \subset \ \big\{ |z| \leqslant R \big\},$$

à savoir si E est contenu dans un disque fermé assez grand. Lorsque E est borné, son *diamètre* est défini par :

$$\mathsf{diam}\, E := \sup_{z,\, w \in E} |z - w|.$$

Définition 4.8. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *compact* lorsqu'il est fermé et borné.

Théorème 4.9. (Exercice de révision) *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si tout suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in E$ possède une sous-suite $\big\{z_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers un point de E.* $\square$

Définition 4.10. Un *recouvrement ouvert* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est une famille d'ouverts $\big(\mathsf{U}_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ indexée par un ensemble A quelconque dont la réunion contient E :

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in A} \mathsf{U}_\alpha.$$

Puisque $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, on a le :

Théorème 4.11. [Heine-Borel] *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si, partant d'un recouvrement ouvert quelconque de E, on peut extraire un nombre* fini *d'ouverts dont la réunion recouvre encore E.*

Un autre concept intéressant est celui de *suite d'ensembles emboîtés* :

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots,$$

que nous utiliserons au début du développement de la théorie des fonctions holomorphes dans le Chapitre 2, à savoir dans la démonstration du Théorème dit de Goursat.

Proposition 4.12. *Étant donné une suite d'ensembles emboîtés* compacts *non vides dans* $\mathbb{C}$:

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots,$$

dont le diamètre tend vers zéro :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} K_n,$$

il existe un unique point $z \in \mathbb{C}$ qui appartient à tous les K_n, ou, de manière équivalente, l'intersection complète de tous les K_n se réduit à un seul point :

$$\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Démonstration. Bien qu'intuitivement immédiat et connu par ailleurs, cet énoncé mérite quelques explications. Pour tout n, prenons un point au hasard $z_n \in K_n$. Alors la condition de rétrécissement des diamètres assure (exercice de vérification) que toute telle suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet, elle admet un point-limite :

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n,$$

lequel point z appartient par construction à tous les K_n. Puisqu'une intersection quelconque de fermés reste fermée, $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ est fermé, et (exercice de vérification) :

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Maintenant, nous affirmons que le point z ainsi trouvé est forcément l'unique point satisfaisant cette propriété. En effet, si pour un autre point $z' \neq z$, on avait aussi :

$$z' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n,$$

alors on déduirait :

$$\begin{aligned} 0 &< |z' - z| \\ &\leqslant \operatorname{diam} K_n \qquad \text{[remarquer que } z \in K_n \text{ et que } z' \in K_n\text{]}, \end{aligned}$$

ce qui contredirait l'hypothèse principale. $\square$

Définition 4.13. Étant donné un sous-ensemble $E \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dit *point d'accumulation* de E lorsqu'il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments $z_n \in E$ *distincts deux à deux* qui converge vers z_0.

On démontre aisément (exercice mental) que tout point d'accumulation de E appartient à l'adhérence $\overline{E}$ de E dans $\mathbb{C}$. Toutefois, l'exemple :

$$E := \big\{|z| \leqslant 1\big\} \bigcup \{2\}$$

montre qu'un point — ici 2 — peut être un point adhérent sans être un point d'accumulation.

Définition 4.14. Un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$ hérite une *topologie induite* par celle de $\mathbb{C}$ dont les ouverts sont de la forme :

$$\big\{E \cap \Omega \colon\ \Omega \subset \mathbb{C} \text{ ouvert}\big\},$$

et dont les fermés sont de la forme :

$$\big\{E \cap \big(\mathbb{C} \backslash \Omega\big) \colon\ \Omega \subset \mathbb{C} \text{ ouvert}\big\}.$$

Définition 4.15. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \Omega$, la *fermeture* pour la topologie induite est :

$$\overline{E}^{\Omega} := \overline{E}^{\mathbb{C}} \cap \Omega.$$

Dans l'Exercice 13, on démontre que tout point adhérent à un ouvert est aussi point d'accumulation.

Définition 4.16. Un sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *connexe* lorsqu'il n'est jamais possible de le décomposer en deux sous-ensembles *ouverts, disjoints et non vides :*

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

De manière similaire, un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}$ est dit *connexe* lorsqu'il n'est jamais possible de le décomposer en deux sous-ensembles *fermés, disjoints et non vides :*

$$F = F_1 \cup F_2.$$

Terminologie 4.17. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est à la fois ouvert et connexe sera constamment appelé un *domaine*.

Définition 4.18. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est *connexe par arcs* lorsque deux points quelconque $z_1, z_2 \in E$ sont toujours connectés par une courbe continue, à savoir, il existe une application continue :

$$\gamma \colon \quad [0,1] \longrightarrow E$$

telle que :

$$\gamma(0) = z_1 \qquad \text{et} \qquad \gamma(1) = z_2.$$

Dans l'Exercice 14, on démontre la :

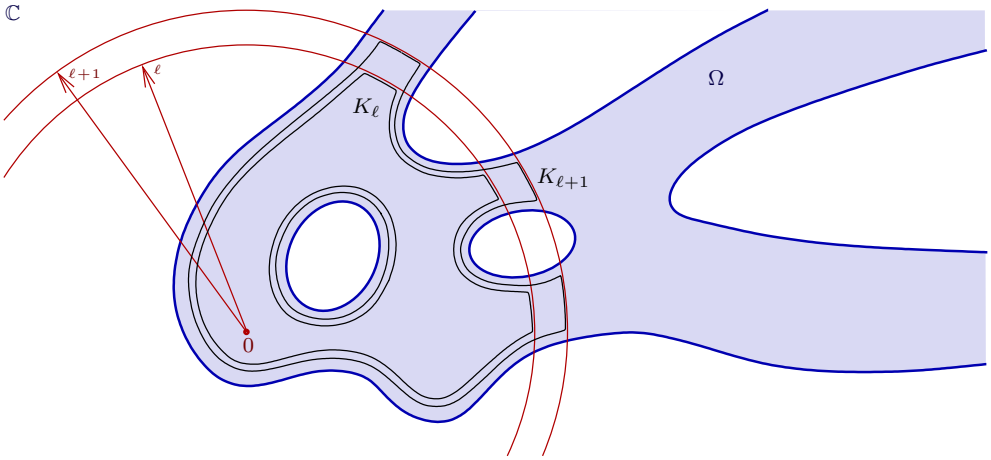
Proposition 4.19. *Un sous-ensemble* ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ *est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.*

5. Exhaustion d'ouverts de $\mathbb{C}$ par des compacts

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire, non supposé connexe ou borné. Dans ce paragraphe, qui peut être ignoré en première lecture, nous construisons des « *approximations* » de Ω par des sous-ensembles emboîtés de plus en plus gros. Elles seront utiles dans certaines circonstances nécessitant de la finitude.

Rappelons que la *distance* entre deux sous-ensembles $E, F \subset \mathbb{C}$ est le nombre appartenant à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$\mathsf{dist}\,\big(E, F\big) \;:=\; \inf_{z \in E,\, w \in F} \big|z - w\big|.$$



Théorème 5.1. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, la famille, paramétrée par un entier $\ell \geqslant 1$, de sous-ensembles :*

$$K_\ell \;:=\; \big\{z \in \Omega\colon\; |z| \leqslant \ell \text{ et } \mathsf{dist}\,\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}$$

satisfait, quel que soit $\ell \geqslant 1$:

(1) *K_ℓ est compact, c'est-à-dire fermé et borné ;*

(2) *$K_\ell \subset K_{\ell+1}$;*

(3)

$$\Omega \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell\,;$$

(4) *L'intérieur de K_ℓ est :*

$$\mathsf{Int}\, K_\ell \;=\; \big\{z \in \Omega\colon\; |z| < \ell \text{ et } \mathsf{dist}\,\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}\,;$$

(5) *$K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$.*

Notons que les premiers K_ℓ pour $\ell = 1, 2, \ldots$ petit peuvent être vides.

Démonstration. **(1)** Fixons $\ell \geqslant 1$. La compacité de K_ℓ est une propriété intrinsèque. D'après une caractérisation connue, il s'agit de faire voir que K_ℓ, envisagé comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$, est borné et fermé.

Comme $K_\ell \subset \overline{\mathbb{D}}_\ell(0)$, il est borné.

Soit maintenant $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite quelconque de points $z_n \in K_\ell$ qui est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers un certain point $z_\infty \in \mathbb{C}$. Ainsi, $|z_n| \leqslant \ell$, puis par continuité de la norme $|z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z_\infty|$, donc $|z_\infty| \leqslant \ell$ aussi.

Ensuite, pour un point $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ quelconque, avec $\varepsilon > 0$ petit, estimons $|z_\infty - w|$ en intercalant un z_n satisfaisant :

$$\big|z_\infty - z_n\big| \leqslant \varepsilon \ll \tfrac{1}{\ell},$$

grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\big|z_\infty - w\big| = \big|z_\infty - z_n + z_n - w\big| &\geqslant -\big|z_\infty - z_n\big| + \big|z_n - w\big| \\ &\geqslant -\varepsilon + \mathsf{dist}\big(z_n, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \\ [z_n \in K_\ell] \qquad\qquad &\geqslant -\varepsilon + \tfrac{1}{\ell},\end{aligned}$$

et comme on peut rendre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il vient :

$$\big|z_\infty - w\big| \geqslant \tfrac{1}{\ell},$$

d'où puisque $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ était quelconque :

$$\mathsf{dist}\big(z_\infty, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell},$$

ce qui donne $z_\infty \in K_\ell$, et finit de montrer que K_ℓ est fermé.

(2) Si $z \in K_\ell$, à savoir si $|z| \leqslant \ell$ et $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{\ell}$, puisque $\ell < \ell + 1$ et $\frac{1}{\ell} > \frac{1}{\ell+1}$, il est évidemment trivial que $|z| \leqslant \ell + 1$ et que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{\ell+1}$, donc $z \in K_{\ell+1}$.

(3) L'inclusion $\bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell \subset \Omega$ est triviale.

Inversement, soit $z \in \Omega$ quelconque. Tout d'abord, nous affirmons que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) > 0$. Sinon, il existerait une suite $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ de points $w_n \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ avec :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big|z - w_n\big|,$$

ce qui voudrait dire $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, et comme $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est fermé, ceci impliquerait $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, contradiction.

Alors dès qu'un entier $\ell \geqslant 1$ est choisi assez grand pour qu'on ait simultanémenent :

$$\ell \geqslant |z| \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{\ell} \leqslant \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big),$$

on obtient $z \in K_\ell$, ce qui établit l'inclusion inverse $\Omega \subset \bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell$.

(4) Notons :

$$\omega_\ell := \big\{z \in \Omega\colon\ |z| < \ell \text{ et } \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

On peut se convaincre que ω_ℓ est ouvert, mais cela n'est pas nécessaire, car cela viendra dans un instant.

Assertion 5.2. $\omega_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_\ell$.

Preuve. Si $|z| < \ell$ et $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) > \frac{1}{\ell}$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit tel que :

$$\varepsilon + |z| < \ell \qquad \text{et} \qquad \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) - \varepsilon > \tfrac{1}{\ell}.$$

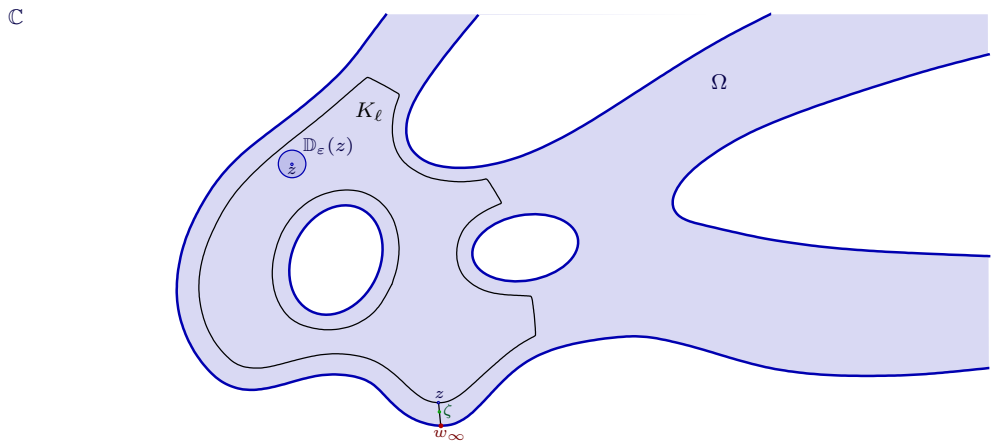
Alors chaque point ζ du disque ouvert $\mathbb{D}_\varepsilon = \big\{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta - z| < \varepsilon\big\}$ satisfait :

$$|\zeta| \leqslant |\zeta - z| + |z| \leqslant \varepsilon + |z| \leqslant \ell,$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}\big(\zeta, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) &\geqslant \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) - |z - \zeta| \\ &\geqslant \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) - \varepsilon \\ &\geqslant \tfrac{1}{\ell},\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $\mathbb{D}_\varepsilon(z) \subset K_\ell$, donc $z \in \mathsf{Int}\, K_\ell$. $\square$



Assertion 5.3. $\mathsf{Int}\, K_\ell \subset \omega_\ell$.

Preuve. Soit donc $z \in \mathsf{Int}\, K_\ell$. Il s'agit de faire voir deux inégalités :

$$|z| \overset{?}{<} \ell \qquad \text{et} \qquad \mathsf{dist}\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \overset{?}{>} \tfrac{1}{\ell}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\mathbb{D}_\varepsilon(z) \subset K_\ell$, c'est-à-dire :

$$\big|\zeta - z\big| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |\zeta| \leqslant \ell, \\ \mathsf{dist}\big(\zeta,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \frac{1}{\ell}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Traitons la première inégalité en question. Si $z = 0$, puisque $\ell \geqslant 1$, on a trivialement $|0| < 1$. Si $z \neq 0$, avec $\delta > 0$ assez petit pour que $|\delta\, z| < \varepsilon$, et avec $\zeta := z + \delta\, z$, il vient :

$$\big|z + \delta\, z\big| = (1+\delta)\, |z| \leqslant \ell \quad \Longrightarrow \quad |z| \leqslant \tfrac{\ell}{1+\delta} < \ell.$$

Traitons ensuite la deuxième inégalité. Comme $z \in K_\ell$, on sait que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{\ell}$. Supposons par l'absurde que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) = \frac{1}{\ell}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ de points $w_n \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ avec :

$$\big|z - w_n\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{\ell}.$$

Alors cette suite est bornée, donc après extraction d'une sous-suite, sans changer de notation, on peut supposer sa convergence :

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_\infty \in \mathbb{C}\backslash\Omega,$$

vers un point qui appartient encore au fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Par conséquent :

$$\big|z - w_\infty\big| = \tfrac{1}{\ell}.$$

Mais sur le segment $]z, w_\infty]$, il existe des points ζ proches et distincts de z avec $|\zeta - z| < \varepsilon$, d'où :

$$\big|\zeta - w_\infty\big| = \tfrac{1}{\ell} - \big|z - \zeta\big|,$$

donc :

$$\mathsf{dist}\big(\zeta,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) < \tfrac{1}{\ell},$$

en contradiction avec (5.4). □

(5) Grâce à la représentation de $\mathsf{Int}\, K_\ell = \omega_\ell$ qui précède, et qui montre d'ailleurs que ω_ℓ est *ouvert*, il devient clair en raisonnant comme pour **(2)** que $K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$. □

6. Fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$

Prenant pour acquis qu'on sait parfaitement bien ce qu'est une fonction $f = f(x)$ d'une variable réelle x, la question naïve originaire dont est issue la théorie des fonctions holomorphes s'exprime comme suit :

Qu'est-ce que pourrait être une fonction de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$?

Tout d'abord, si l'on voit $z = x + iy$ comme le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan, on peut commencer par une :

Définition 6.1. Soit $f\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$, et soit $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in E$. On dit que f est *continue en* z_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\Big(z \in E \quad \text{et} \quad \big|(x, y) - (x_0, y_0)\big| \leqslant \delta\Big) \implies \Big(\big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

De manière équivalente (exercice), f est continue en z_0 si pour toute suite

$$\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty} = \big\{x_n + i\,y_n\big\}_{n=1}^{\infty}$$

de points $z_n \in E$ telle que $z_n \longrightarrow z_0$ quand $n \longrightarrow \infty$, on a aussi :

$$f(x_0, y_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n).$$

Définition 6.2. Une fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue sur* E lorsqu'elle est continue en *tout* point $z_0 \in E$.

On vérifie (exercice de révision) que les sommes et les produits de fonctions continues sont toujours encore continues.

Puisque les notions de convergence dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}^2$ coïncident, observons que nous avons compris — et c'est important — qu'une fonction :

$$f = f(x, y)$$

est continue si elle l'est en tant que fonction de ses *deux* arguments réels $(x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2$. D'une certaine manière, donc, dans l'écriture et dans la définition d'une fonction continue :

$$f = f(z) = f(x + i\,y),$$

il faut bien avoir à l'esprit que la fonction f ne dépend pas « de z », mais bien des *deux* variables réelles (x, y).

Qui plus est, comme la fonction f est supposée être aussi à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, elle possède en fait tout aussi bien une partie réelle et une partie imaginaire :

$$f = u + i\,v,$$

de telle sorte que la fonction doit être plus rigoureusement représentée par :

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 \supset E &\longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \big(u(x, y),\, v(x, y)\big). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité du triangle, on vérifie immédiatement que si f est continue, alors la fonction :

$$(x, y) \longmapsto \big|f(x, y)\big|$$

est elle aussi continue, puisque en effet il s'agit de :

$$(x, y) \longmapsto \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}.$$

Définition 6.3. On dit qu'une fonction :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{C}$$

atteint un maximum en un point $(x_+, y_+) \in E$ si :

$$|f(x,y)| \leqslant |f(x_+, y_+)|,$$

pour tout $(x,y) \in E$. De même, elle *atteint un minimum* en un point $(x_-, y_-) \in E$ si :

$$|f(x,y)| \geqslant |f(x_-, y_-)|,$$

pour tout $(x,y) \in E$.

Un cas particulier d'un théorème connu de topologie générale valable par exemple dans les espaces métriques est le :

Théorème 6.4. *Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$ est toujours bornée et elle atteint toujours un maximum sur K, ainsi qu'un minimum sur K.* $\square$

Maintenant, puisque la notion de fonction continue de (x,y) ne répond visiblement pas à la question : « *qu'est-ce qu'une fonction* de z *?* », présentons enfin la définition absolument fondamentale dont part toute la théorie, définition qui formule, en analogie complète avec la notion de dérivabilité sur $\mathbb{R}$, un concept (nouveau) de fonction *dérivable par rapport à* z.

À partir de maintenant, on s'autorisera à écrire :

$$f(z) = f(x + i\,y) = f(x,y),$$

pour représenter une fonction des deux variables réelles (x,y), de différentiabilités variées $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, ..., $\mathscr{C}^\infty$.

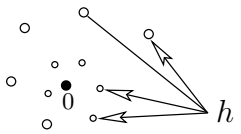
Définition 6.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert, soit :

$$f\colon \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

une fonction continue et soit un point $z_0 \in \Omega$. On dit que f est $\boxed{\textit{holomorphe}}$ en z_0 si le quotient :

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

converge vers une limite lorsque le nombre *complexe* $h \in \mathbb{C}^*$ est non nul et tend vers 0.



Ici, la subtilité encore invisible — à suivre... suspense ! —, c'est que $h \in \mathbb{C}$ varie dans un ensemble 2-dimensionnel de type disque (épointé) autour de 0. Bien entendu, on a $z_0 + h \in \Omega$ pour h assez petit puisque Ω est ouvert.

Lorsqu'elle existe, la limite de ces quotients est alors notée :

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Exemple 6.6. Bien que continue, la fonction $f(z) = \overline{z}$, ou plus précisément, la fonction :

$$(x, y) \longmapsto x - i\,y$$

n'est *pas* holomorphe, puisque en effet si on représente $h = \varepsilon\, e^{i\theta}$ avec $\varepsilon > 0$ petit :

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\overline{z_0}_{\circ} + \overline{h} - \overline{z_0}_{\circ}}{h} \\ &= \frac{\overline{h}}{h} \\ &= \frac{\varepsilon\, e^{-i\,\theta}}{\varepsilon\, e^{i\,\theta}} \\ &= e^{-2i\,\theta},\end{aligned}$$

et il est manifeste que les nombres complexes $e^{-2i\,\theta}$, tous de module 1, n'ont pas de limite lorsque h, à savoir lorsque $\varepsilon = |h|$, tend vers 0 !

Ce (contre-) exemple montre à merveille, donc, que la condition $h \longrightarrow 0$ est de nature 2-*dimensionnelle :* le module de h tend vers 0, mais h peut aussi tourner, spiraler, vriller autour de 0.

Exemple 6.7. La fonction 'identité' $f(z) = z$ est quant à elle holomorphe :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\underline{z_0}_{\circ} + h - \underline{z_0}_{\circ}}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

de dérivée identiquement égale à 1, heureusement !

Définition 6.8. Une fonction continue $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* dans Ω lorsqu'elle est holomorphe en *tout* point $z_0 \in \Omega$.

Notation 6.9. L'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω sera noté :

$$\mathscr{O}(\Omega).$$

Ainsi, la définition de fonction holomorphe imite celle de fonction réelle dérivable, en remplaçant simplement la variable réelle x par la variable complexe $z = x + i\,y$. Il y a donc là une ressemblance initiale qui semblerait faire croire que les deux théories sont très proches l'une de l'autre, mais tel n'est absolument pas le cas ! En fait, les fonctions holomorphes vont satisfaire des propriétés beaucoup plus harmonieuses que les fonctions dérivables, quasiment 'féériques',

Par exemple, on va démontrer que les fonctions holomorphes sont en fait *indéfiniment dérivables :* une seule dérivée entraîne l'existence de *toutes* les autres dérivées d'ordre 2, 3, 4, 5, *etc.* ! Mais la magie de l'holomorphie ne s'arrête pas là. On démontrera même — au début de la théorie, et avec des arguments simples ! — que *toute fonction holomorphe est en fait* analytique*, c'est-à-dire développable sous forme d'une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}\,\big(z - z_0\big)^n,$$

qui converge — par exemple grâce au critère de Cauchy — pour tout $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ appartenant à un disque ouvert non vide assez petit $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$.

Une telle propriété de développement en série de Taylor convergente contraste alors de manière spectaculaire avec les fonctions réelles $f = f(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$, puisqu'il existe

bien sûr de telles fonctions qui n'admettent pas de dérivée continue d'ordre 2 — penser à une primitive de $x \longmapsto |x|$. On démontre aussi qu'il existe des fonctions réelles $f = f(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne sont développables en série entière convergente autour d'aucun point x_0 : l'Exercice 45 traite le cas d'un seul tel mauvais point x_0.

Exemple 6.10. Tout polynôme :

$$p(z) = a_0 + a_1\, z + \cdots + a_n\, z^n \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. En effet, il suffit par linéarité d'examiner si pour $k \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$z \longmapsto z^k$$

admet des dérivées en des $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconques, mais la formule du binôme de Newton fait voir que le numérateur est multiple de h :

$$\begin{aligned}
\frac{(z_0+h)^k - z_0^k}{h} &= \frac{\underline{(z_0)^k}_\circ + \frac{k}{1}\,(z_0)^{k-1}\,h + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\,(z_0)^{k-2}\,h^2 + \cdots + h^k - \underline{(z_0)^k}_\circ}{h} \\
&= \frac{k\,(z_0)^{k-1}\,\underline{h}_\circ + \mathrm{O}(h^2)}{\underline{h}_\circ} \\
&= k\,(z_0)^{k-1} + \mathrm{O}(h),
\end{aligned}$$

ce qui donne comme valeur de la dérivée :

$$k\,(z_0)^{k-1}.$$

Une autre famille importante d'exemples de fonctions holomorphes est constituée des séries entières convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\big(z - z_0\big)^n.$$

Cette famille contient les fonctions trigonométriques classiques dans lesquelles on a remplacé la variable réelle x par z :

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n, \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n},
\end{aligned}$$

fonctions qui jouent un rôle crucial dans la théorie.

En revenant maintenant à la définition fondamentale, il est clair qu'une fonction f est holomorphe en un point $z_0 \in \Omega$ si et seulement si il existe un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - a\,h = h\,\mathrm{o}(h),$$

où $\mathrm{o}(h)$ est une fonction-reste satisfaisant :

$$0 = \lim_{h \to 0} \mathrm{o}(h).$$

Bien entendu, on a ici :

$$a = f'(z_0).$$

Par là, il suit que toute fonction holomorphe en un point z_0 est continue en ce point.

On laisse au lecteur le soin de mettre au point une démonstration de l'énoncé élémentaire suivant, tout à fait analogue à celui qui lui correspond dans la théorie des fonctions réelles.

Proposition 6.11. *Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ et $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ sont deux fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors :*

(i) *leur somme $f + g$ est aussi holomorphe dans Ω avec :*

$$(f + g)' = f' + g';$$

(ii) *leur produit $f\,g$ est holomorphe dans Ω avec :*

$$\big(f\,g\big)' = f'\,g + f\,g';$$

(iii) *lorsque $g(z_0) \neq 0$, le quotient f/g est holomorphe en z_0 avec :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2};$$

(iv) *lorsque, de plus, ces deux fonctions peuvent être composées, à savoir lorsque :*

$$\Omega \xrightarrow{f} \Omega_1 \xrightarrow{g} \mathbb{C},$$

la composition $g \circ f$ est holomorphe en tout point $z \in \Omega$ avec :

$$\big(g \circ f\big)'(z) = g'\big(f(z)\big)\, f'(z). \qquad \square$$

Par exemple, la fonction :

$$\mathbb{C}^* \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$$

est holomorphe.

7. Fonctions holomorphes comme applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Il est grand temps de mieux approfondir les relations entre la dérivée complexe dont jouissent les fonctions holomorphes, et leurs dérivées partielles au sens réel comme applications de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. En fait, on a déjà mis en exergue (pour anticipation théorique alléchante...) le fait que la notion de différentiabilité au sens complexe diffère de manière très significative de la notion de différentiabilité au sens réel. L'exemple de la fonction simple :

$$z \longmapsto \overline{z},$$

à savoir de l'application :

$$(x, y) \longmapsto \big(x, -y\big)$$

fait voir tout le paradoxe, puisqu'elle est visiblement affine, donc $\mathscr{C}^1$, donc $\mathscr{C}^\infty$, mais pas holomorphe ! Ce (contre-) exemple montre alors que l'existence de dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y ne garantit pas que f soit holomorphe, et en fait, nous allons voir dans un instant que les fonctions holomorphes ont des relations très spéciales entre leurs dérivées partielles.

Définition 7.1. Rappelons pour commencer qu'une fonction (application) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \big(u(x,y),\, v(x,y)\big)$$

est dite *différentiable* en un point $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lorsqu'il existe une application linéaire :

$$J\colon \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

telle que :

$$0 = \lim_{\substack{H \to 0 \\ H \in \mathbb{R}^2}} \left(\frac{\big|F(P_0 + H) - F(P_0) - J(H)\big|}{|H|} \right),$$

la notation $|\cdot|$ désignant la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^2$.

De manière équivalente, on peut écrire :

$$F(P_0 + H) - F(P_0) = J(H) + |H|\, \mathrm{o}(H),$$

où $\mathrm{o}(H)$ est une fonction-reste qui tend vers zéro (en norme) lorsque $H \longrightarrow 0$.

L'application linéaire J est alors unique (exercice de révision), et elle est appelée la *différentielle* de F au point P_0.

On se rappelle alors que l'on démontre en cours de calcul différentiel que les deux dérivées partielles des deux composantes $(u, v) = F$ par rapport aux variables x, y existent au point (x_0, y_0), et que la transformation linéaire J est décrite dans la base standard de $\mathbb{R}^2$ par la *matrice jacobienne* de F :

$$J = \mathsf{Jac}_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0).$$

Ainsi la différence est-elle de taille : dans le cas d'une fonction holomorphe, la dérivée est un nombre complexe $f'(z_0)$, tandis que dans le cas d'une application différentiable $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la différentielle est une matrice 2×2.

Toutefois, il y a un lien fort entre ces deux notions, lequel consiste en des relations spéciales qui sont satisfaites par la matrice jacobienne associée à une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ lorsqu'on la voit comme application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Afin de trouver ces relations, posons :

$$h := h_1 + i\, h_2,$$

et dans le quotient $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ qu'on doit examiner pour tester l'holomorphie, posons aussi :

$$f := f(x,y),$$
$$z_0 := x_0 + i\, y_0,$$

et observons sans effort qu'en prenant $h := h_1$ (avec $h_2 = 0$), si la fonction est holomorphe en z_0, alors nécessairement :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0 + h_1,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{[par définition !]}. \end{aligned}$$

Mais puisqu'il n'y a aucune raison de prendre h réel dans la limite, prenons aussi $h = i\,h_2$ (avec $h_1 = 0$), ce qui donne :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{i\,h_2} \\ &= \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{[à nouveau par définition !].} \end{aligned}$$

Ces deux expressions étant égales, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\,i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Maintenant, en décomposant $f = u + iv$ en parties réelle et imaginaire, cette dernière équation dit précisément que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -\,i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

puis en identifiant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons un résultat fondamental.

Théorème 7.2. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est holomorphe ;*

(ii) *les parties réelle u et imaginaire v de :*

$$f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ et satisfont les équations dites de Cauchy-Riemann *:*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\,\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}}$$

Démonstration. Le sens direct venant d'être vu, supposons réciproquement que ces deux équations aux dérivées partielles sont effectivement satisfaites par u et v.

En un point quelconque $(x, y) \in \Omega$, pour $h = h_1 + i\,h_2$ petit, écrivons à cette fin :

$$\begin{aligned} u\big(x + h_1,\, y + h_2\big) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,h_2 + \mathrm{o}(h), \\ v\big(x + h_1,\, y + h_2\big) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,h_2 + \mathrm{o}(h), \end{aligned}$$

où $\mathrm{o}(h)$ est une fonction-reste qui satisfait $0 = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{o}(h)}{h}$. Grâce aux équations de Cauchy-Riemann, on peut alors transformer :

$$\begin{aligned}
f(z+h) - f(z) &= u(z+h) - u(z) + i\,\big[v(z+h) - v(z)\big] \\
&= u\big(x+h_1,\, y+h_2\big) - u(x,y) + i\,\Big[v\big(x+h_1,\, y+h_2\big) - v(x,y)\Big] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,h_2 + i\,\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,h_2\right] + \mathrm{o}(h) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,h_2 + i\,\left[-\,\frac{\partial u}{\partial y}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,h_2\right] + \mathrm{o}(h) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\big[h_1 + i\,h_2\big] + \mathrm{o}(h),
\end{aligned}$$

et cette dernière expression montre que f est holomorphe au point $z = x + i\,y$ avec une dérivée complexe égale à ce qu'il faut :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\big(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\big)\big[h_1 + i\,h_2\big] + \mathrm{o}(h)}{h_1 + i\,h_2} \right\} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{[La limite existe donc bel et bien !]} \\
&=: f'(z).
\end{aligned}$$

□

Une application supplémentaire des équations de Cauchy-Riemann fournit aussi de manière analogue :

$$\begin{aligned}
i\,\left[\frac{\partial v}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right] &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= f'(z),
\end{aligned}$$

d'où en prenant la demi-somme de ces deux expressions égales :

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\left[\frac{\partial v}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\big[u + i\,v\big].
\end{aligned}$$

C'est précisément dans un tel calcul naturel qu'on voit donc apparaître un opérateur de différentiation qui est central dans toute la théorie.

Définition 7.3. L'opérateur de différentiation par rapport à z est défini formellement par :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right),}$$

et l'opérateur *conjugué* de différentiation par rapport à la variable complexe conjuguée $\overline{z}$ est défini par :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).}$$

Ainsi avec ces notations, le résultat qui précède s'interprète en disant que pour une fonction holomorphe en un point z_0, la quantité $f'(z_0)$ n'est autre que la dérivée de f par rapport à z au point z_0 :

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).}$$

Théorème 7.4. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ est holomorphe si et seulement si sa dérivée par rapport à $\overline{z}$ est identiquement nulle :*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0.}$$

Démonstration. En effet, si l'on passe aux parties réelle et imaginaire, l'équation :

$$0 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\big[u + i\,v\big]$$

équivaut (exercice visuel) aux équations de Cauchy-Riemann. □

Au passage, nous avons constaté que la dérivée $f'(z)$ d'une fonction holomorphe dans Ω s'exprime comme :

$$f'(z) \,=\, \frac{\partial u}{\partial z} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \,=\, 2\,\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{7.5}$$

Ainsi, les fonctions holomorphes sont-elles celles qui ne dépendent pas de $\overline{z}$. Plus rigoureusement, toute fonction des deux variables (x, y) :

$$\begin{aligned} f &= f(x, y) \\ &= f\left(\frac{z + \overline{z}}{2},\, \frac{z - \overline{z}}{2\,i}\right) \end{aligned}$$

peut naturellement être aussi vue comme une fonction des deux variables :

$$\big(z,\, \overline{z}\big).$$

$$\boxed{\text{Fonctions holomorphes} = \text{Fonctions indépendantes de } \overline{z}.}$$

Proposition 7.6. *Toujours pour une fonction holomorphe quelconque :*

$$f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C},$$

si on note de manière abrégée l'application sous-jacente $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) := \big(u(x, y),\, v(x, y)\big),$$

ayant pour matrice jacobienne :

$$\mathsf{Jac}_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

alors le déterminant jacobien de F vaut en tout point $z \in \Omega$:

$$\det \mathsf{Jac}_F(x, y) = \big|f'(z)\big|^2.$$

Démonstration. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on obtient que l'action de la matrice jacobienne sur un (petit) vecteur :

$$H := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

vaut :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Jac}_F(H) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\, h_2,\ \frac{\partial v}{\partial x}\, h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\, h_2 \right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \big[h_1 + i\, h_2 \big] \\
&= f'(z)\, h.
\end{aligned}$$

Une deuxième et dernière application des équations de Cauchy-Riemann permet de calculer :

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{Jac}_F &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\, \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
[2\tfrac{\partial}{\partial z} = \tfrac{\partial}{\partial x} - i\tfrac{\partial}{\partial y}] \qquad &= \left| 2\, \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \\
[(7.5)] \qquad &= \big| f'(z) \big|^2.
\end{aligned}$$

□

Quand nous écrivons $f(z)$ pour une fonction définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'écriture n'est réellement rigoureuse que lorsque f est holomorphe, auquel cas f est bien une fonction de z, et en général, pour une fonction qui n'est que de classe $\mathscr{C}^1$ dans Ω, la rigueur notationnelle exigerait d'écrire $f(x, y)$. Toutefois, nous admettrons parfois l'écriture abusive $f(z)$ dans le cas où f n'est pas holomorphe.

Proposition 7.7. *Étant donné une application $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un segment réel avec $-\infty < a < b < \infty$, décomposée en $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\, \gamma_2(t)$, à valeurs dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour toute fonction $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, la composée :*

$$f\big(\gamma(t)\big) \ = \ f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$$

a pour dérivée :

$$\frac{d}{dt} \big[f\big(\gamma(t)\big) \big] \ = \ \frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\, \overline{\gamma'(t)}.$$

En particulier, quand f est holomorphe :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \big[f\big(\gamma(t)\big) \big] \ = \ f'\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t).}$$

Preuve. En effet, en remplaçant bêtement $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ ainsi que $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[f\big(\gamma(t)\big)\right] &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_2'(t) \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\right]\gamma_1'(t) + i\left[\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\right]\gamma_2'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big)\left[\gamma_1'(t) + i\,\gamma_2'(t)\right] + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\left[\gamma_1'(t) - i\,\gamma_2'(t)\right].
\end{aligned}$$

□

8. Géométrie infinitésimale de l'holomorphie

Localement, dans un voisinage infinitésimal d'un point de référence, toute application différentiable est bien approximée par son application tangente, c'est-à-dire par son développement de Taylor à l'ordre 1. Pour des applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a alors affaire à des applications linéaires $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ni (x', y')$ de la forme :

$$\begin{aligned}
x' &= \boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}\,y, \\
y' &= \boldsymbol{c}\,x + \boldsymbol{d}\,y,
\end{aligned}$$

avec 4 constantes réelles arbitraires $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$.

Or de telles applications sont très différentes des applications $\mathbb{C}$-linéaires $z \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \ni z'$, qui sont de la forme :

$$z' = \alpha\,z,$$

avec 1 constante complexe arbitraire $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, puisqu'en écriture réelle :

$$x' + i\,y' = (a + ib)\,(x + iy) = ax - by + i\,(bx + ay),$$

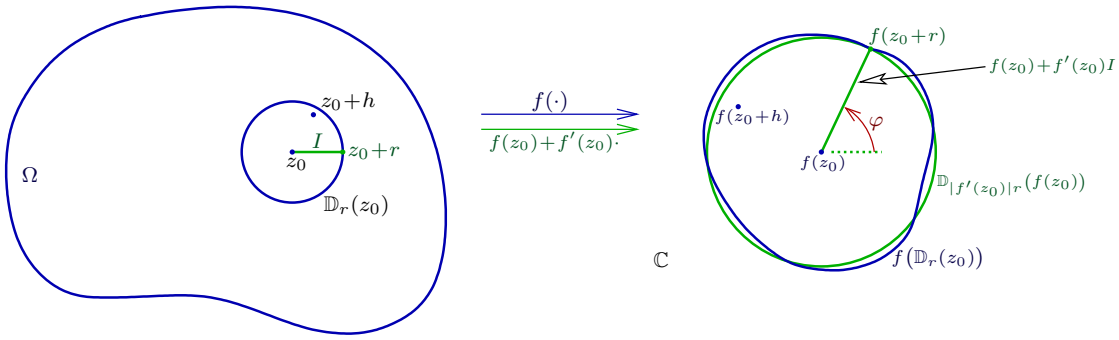
cela revient à avoir une matrice 2×2 spéciale incorporant seulement 2 constantes réelles arbitraires :

$$\begin{aligned}
x' &= a\,x - b\,y, \\
y' &= b\,x + a\,y.
\end{aligned}$$

Rappelons qu'en coordonnées polaires, avec $\alpha = s\,e^{i\varphi}$, $s \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, et en représentant $z = r\,e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$, la multiplication complexe :

$$z' = s\,e^{i\varphi}\,r\,e^{i\theta} = s\,r\,e^{i(\varphi+\theta)}$$

fait voir que la transformation géométrique consiste en une homothétie de rapport positif $s = |\alpha|$ suivie d'une rotation d'angle $\varphi = \arg\alpha$, ces deux transformations étant d'ailleurs commutatives. De telles transformations avec $\alpha \neq 0$ sont appelées *similitudes directes* puisqu'elles préservent l'orientation.



Si donc nous reformulons la $\mathbb{C}$-dérivabilité en un point $z_0 \in \Omega$ d'une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ comme :

$$f(z_0+h) \;=\; f(z_0) + f'(z_0)\,h + \mathrm{o}(h),$$

où $\mathrm{o}(h)$ désigne une fonction-reste à valeurs dans $\mathbb{C}$ satisfaisant $0 = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{o}(h)}{h}$, alors nous devons nous imaginer que pour $r > 0$ assez petit et pour tout $|h| < r$, la fonction f est bien approximée par son développement à l'ordre 1 :

$$f(z_0+h) \;\approx\; f(z_0) + f'(z_0)\,h,$$

lequel est une fonction complexe-affine de h ayant pour partie linéaire la simple similitude :

$$h \;\longmapsto\; f'(z_0)\,h.$$

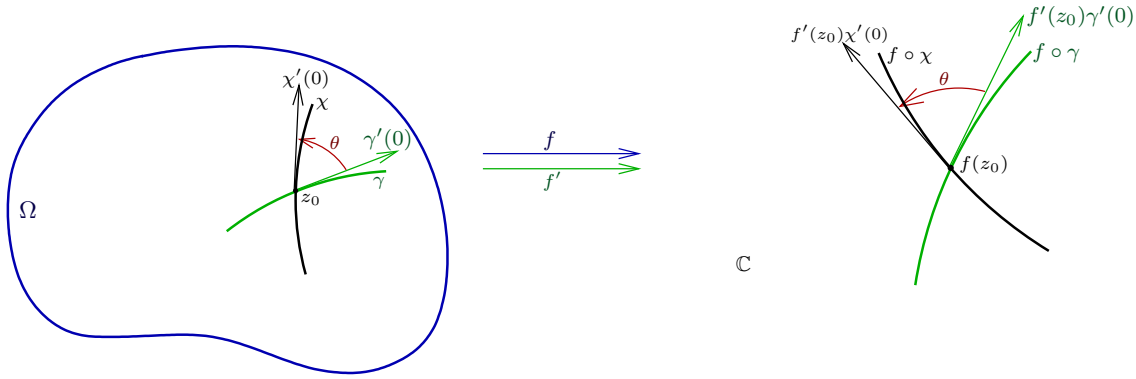
L'image par cette similitude du disque 'infinitésimal' centré en z_0 :

$$\mathbb{D}_r(z_0) \;:=\; \big\{h \in \mathbb{C}\colon\; |h - z_0| < r\big\}$$

est donc le disque 'infinitésimal' centré en $f(z_0)$ de rayon $|f'(z_0)|\,r$:

$$\mathbb{D}_{|f'(z_0)|\,r}\big(f(z_0)\big) \;:=\; \big\{k \in \mathbb{C}\colon\; |k - f(z_0)| < |f'(z_0)|\,r\big\},$$

lequel approxime bien l'image véritable $f\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$.



Comme les similitudes, les fonctions holomorphes conservent les angles entre paires de courbes.

Observation 8.1. *Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ où $f'(z_0) \neq 0$ et pour toute paire de courbes $\mathscr{C}^1$ locales passant par z_0 et de vecteurs tangents non nuls :*

$$\begin{aligned} \gamma\colon\quad & [-1,1] \longrightarrow \Omega, \quad & \gamma(0) \;=\; z_0, \quad & \gamma'(0) \;\neq\; 0, \\ \chi\colon\quad & [-1,1] \longrightarrow \Omega, \quad & \chi(0) \;=\; z_0, \quad & \chi'(0) \;\neq\; 0, \end{aligned}$$

on a :

$$\mathsf{Angle}\big(\gamma'(0),\, \chi'(0)\big) \;=\; \mathsf{Angle}\big((f\circ\gamma)'(0),\, (f\circ\chi)'(0)\big).$$

Démonstration. En effet, la formule de dérivation composée de la Proposition 7.7 puis la similitude $h \longmapsto f'(z_0)\,h$ donnent bien :

$$\begin{aligned} \mathsf{Angle}\big((f\circ\gamma)'(0),\, (f\circ\chi)'(0)\big) \;&=\; \mathsf{Angle}\big(f'(z_0)\,\gamma'(0),\, f'(z_0)\,\chi'(0)\big) \\ &=\; \mathsf{Angle}\big(\gamma'(0),\, \chi'(0)\big). \end{aligned}$$

$\square$

On appelle *conformes* de telles applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui sont infinitésimalement des similitudes. On démontre aisément que ce sont nécessairement des fonctions holomorphes de dérivées jamais nulles, et nous les étudierons en détail ultérieurement.

9. Séries entières

L'exemple paradigmatique de série entière est la *fonction exponentielle* de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ qui est définie par :

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lorsque $z = x \in \mathbb{R}$ est réel, cette définition coïncide bien entendu avec la définition usuelle de l'exponentielle.

En fait, même lorsque $z \in \mathbb{C}$, cette série converge absolument et normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$, parce que :

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!},$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\left|e^z\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\
&= e^{|z|} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Cette inégalité permet (exercice de révision) de démontrer rigoureusement que la série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est uniformément convergente sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R$ de rayon $R > 0$ quelconque.

Dans cette Section **9**, nous allons démontrer que e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Terminologie 9.1. Les fonctions qui sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier sont appelées *fonctions holomorphes entières.*

Nous allons aussi démontrer que les dérivées de e^z par rapport à z peuvent être calculées en dérivant terme à terme la série qui la définit :

$$\begin{aligned}
\left(e^z\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{z^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \\
&= e^z.
\end{aligned}$$

Ainsi comme lorsque $z = x$ est réel, la dérivée de la fonction exponentielle reste égale à elle-même :

$$\frac{d}{dz}\left(e^z\right) = e^z.$$

Par contraste, la série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots$$

converge absolument seulement dans le disque unité :

$$\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| < 1\big\}.$$

On se convainc aisément que sa somme vaut :

$$\frac{1}{1-z},$$

fonction qui est en fait holomorphe (exercice d'application du cours) dans l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

Résolvons rapidement cet exercice en raisonnant exactement comme dans le cas où $z = x \in \mathbb{R}$ est réel. Rappelons que pour tout entier $N \geqslant 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z}.$$

Il suffit alors de noter que pour $|z| < 1$, on a $0 = \lim_{N\to\infty} z^{N+1}$.

Définition 9.2. Une *série entière* en la variable $z \in \mathbb{C}$ est une somme infinie de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n,$$

où les $a_n \in \mathbb{C}$ sont des coefficients complexes.

Afin de tester la convergence absolue d'une telle série, on doit examiner la série majorante évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |z|^n.$$

On observe alors sans effort que si cette série majorante à termes tous positifs converge pour une valeur $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |z_0|^n \ < \ \infty,$$

alors elle converge aussi (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant |z_0|$, simplement parce que :

$$|z|^n \ \leqslant \ |z_0|^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\Big| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |z|^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |z_0|^n \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer qu'il existe toujours un certain disque ouvert (peut-être vide) dans lequel une série entière converge.

Théorème 9.3. *Étant donné une série entière quelconque :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n,$$

il existe toujours un rayon :

$$0 \leqslant R \leqslant \infty$$

tel que :

- *la série converge absolument lorsque* $|z| < R$*;*
- *la série diverge absolument lorsque* $|z| > R$*.*

De plus, en admettant la convention que :

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\infty} = 0,$$

ce rayon R *est donné par la formule :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Définition 9.4. Ce nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série entière, et le disque $\mathbb{D}_R$ *disque de convergence.*

Pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, le rayon de convergence vaut $R = \infty$; pour $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, il vaut $R = 1$.

Démonstration. Soit donc premièrement $z \in \mathbb{C}$ avec :

$$\begin{aligned} |z| &< \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= R. \end{aligned}$$

De manière équivalente :

$$\frac{1}{R}\, |z| < 1.$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'on ait encore :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right) |z|}_{=:\, q} < 1,$$

quantité positive que l'on note $q < 1$.

Maintenant, par définition de la limite supérieure d'une suite de nombres réels, il existe un entier $N = N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(n \geqslant N(\varepsilon)\Big) \implies \left(\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R} + \varepsilon\right).$$

Par exponentiation n-ième, et après multiplication par $|z|^n$, on déduit :

$$\begin{aligned} |a_n|\, |z|^n &\leqslant \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n |z|^n \\ &= q^n, \end{aligned}$$

et puisque la série géométrique $\sum q^n$ converge, on majore sans peine :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{N(\varepsilon)-1} |a_n|\,|z|^n}_{\text{quantité finie}} + \underbrace{\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} q^n}_{=\frac{q^N}{1-q}<\infty},$$

ce qui montre bien que la série converge absolument pour $|z| < R$ fixé.

Deuxièmement, avec $|z| > R$, la divergence absolue repose (exercice laissé au lecteur) sur la divergence de $\sum q^n$ lorsque $q > 1$. □

Pour z appartenant au bord $\big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = R\big\}$ du disque, la situation concernant la convergence ou la divergence de $\sum_n a_n\, z^n$ est en général beaucoup plus délicate. L'Exercice 36 donne des exemples.

On établit aisément (exercice) que les fonctions trigonométriques standard définies plus haut :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n},$$

ont toutes un rayon de convergence $R = \infty$, à savoir ce sont des fonctions holomorhes entières. Un calcul simple montre la connexion entre ces trois fonctions et fournit les célèbres *formules d'Euler :*

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}.$$

Les séries entières constituent une classe très importante de fonctions holomorphes qu'il est particulièrement aisé de manipuler.

Théorème 9.5. *Toute série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

définit une fonction holomorphe *dans son disque de convergence. La dérivée de f est aussi une série entière que l'on obtient simplement en différentiant terme à terme la série de f, à savoir :*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1},$$

et de plus, cette série dérivée a le même rayon de convergence que $\sum a_n\, z^n$.

Démonstration. L'assertion concernant le rayon de convergence découle du fait connu que :

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1},$$

puisqu'alors en effet, si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ vaut par définition :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

le rayon de convergence de la série dérivée, que l'on ré-écrit de manière appropriée comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

vaut alors, par la même définition :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)\, a_{n+1}|} \\ &= \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Ensuite, on doit montrer que la série dérivée terme à terme en question :

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

n'est autre que la limite :

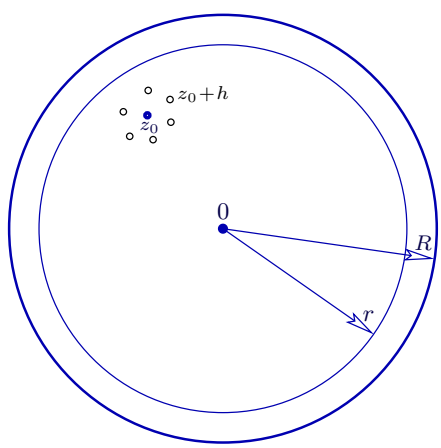
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \overset{?}{=} g(z),$$

mais il s'agit de dériver une fonction qui contient une *infinité* de termes.

Dans ce but, soit encore R le rayon de convergence de $f = \sum a_n\, z^n$ et fixons un point z_0 avec :

$$|z_0| < r < R,$$

pour un certain autre rayon de sécurité $r < R$.



Avec un grand entier $N \gg 1$ qui sera choisi ultérieurement, décomposons notre série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n\, z^n}_{=:\, S_N(z)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\, z^n}_{=:\, \mathsf{Reste}_N(z)},$$

ce qui s'abrège en :

$$f(z) = S_N(z) + \mathsf{Reste}_N(z).$$

Si nous restreignons maintenant les $h \in \mathbb{C}$ à être assez petits pour que :

$$|z_0 + h| \,<\, r,$$

on peut alors regarder :

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0+h) + \mathsf{Reste}_N(z_0+h) - S_N(z_0) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h} - g(z_0)\\ &= \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} + \frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h} - g(z_0).\end{aligned}$$

L'expression $S_N(z)$ étant un polynôme, elle est partout holomorphe, *i.e.* $\mathbb{C}$-dérivable. Insérons alors $-S'_N(z_0) + S'_N(z_0)$, ce qui donne trois couples de termes :

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0) = \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} &- S'_N(z_0) +\\ &+ S'_N(z_0) - g(z_0) +\\ &+ \frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}.\end{aligned}$$

Pour estimer la dernière ligne-reste, en utilisant :

$$a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}\big),$$

nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}\right| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h}\right|\\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{\underline{h}_\circ\big((z_0+h)^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}\big)}{\underline{h}_\circ}\right|\\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \Big(|z_0+h|^{n-1} + |z_0+h|^{n-2}\,|z_0| + \cdots + |z_0|^{n-1}\Big)\\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\, n\, r^{n-1},\end{aligned}$$

grâce à $|z_0 + h| < r$ et à $|z_0| < r$.

Or l'expression majorante ainsi obtenue :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\, n\, r^{n-1}$$

est convergente, puisque $r \,<\, R$ et puisqu'on sait déjà que le rayon de convergence de $g(z) = \sum a_n\, n\, z^{n-1}$ est aussi égal à R. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on est assuré qu'il existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(N \geqslant N_1(\varepsilon)\Big) \implies \left(\left|\frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

Par ailleurs, puisque l'on a la convergence :

$$\lim_{N\to\infty} S'_N(z_0) = g(z_0),$$

il existe aussi un autre entier $N_2 = N_2(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(N \geqslant N_2(\varepsilon)\Big) \implies \Big(\big|S'_N(z_0) - g(z_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Enfin, si nous choisissons un entier :

$$N \geqslant \mathsf{max}\,\big(N_1,\, N_2\big),$$

puisque le polynôme $S_N(z)$ est manifestement $\mathbb{C}$-différentiable, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$\Big(|h| \leqslant \delta\Big) \implies \Big(\Big|\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0)\Big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

En revenant aux trois lignes laissées en chemin plus haut, la synthèse de ces trois inégalités :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0)\Big| &\leqslant \Big|\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0)\Big| + \\ &\quad + \big|S'_N(z_0) - g(z_0)\big| + \\ &\quad + \Big|\frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}\Big| \\ &\leqslant 3\,\varepsilon,\end{aligned}$$

montre bien que pour $|h| \leqslant \delta$, on peut rendre arbitrairement petite la différence entre le quotient différentiel $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ et la série dérivée terme à terme $g(z_0)$. □

Des applications successives de ce théorème donnent sans effort le :

Corollaire 9.6. *Une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

est $\mathbb{C}$-différentiable une infinité de fois dans son disque de convergence, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ième s'obtient en la dérivant terme à terme k fois :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\,(n+k)\cdots(n+1)\,z^n. \qquad \square$$

Jusqu'à présent, nous n'avons eu affaire qu'à des séries entières centrées à l'origine. Plus généralement, une série entière centrée en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est une expression de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n.$$

Le disque de convergence de f est maintenant centré en z_0, et son rayon est encore donné par la même formule :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

En effet, si l'on pose :

$$g(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n,$$

alors f est simplement obtenue en translatant g, à savoir avec :

$$w := z - z_0,$$

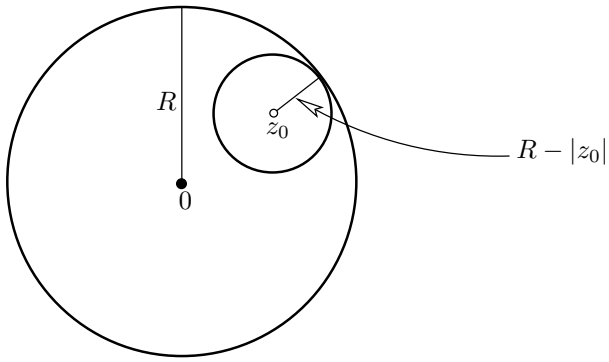
on a :

$$f(z) = g(w).$$

Par conséquent, tout ce qui vaut pour g vaut aussi pour f, après translation. En particulier, les dérivées de f et de g sont liées par :

$$f'(z) = g'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n \big(z - z_0\big)^{n-1}.$$

En un point du disque de convergence d'une série entière — donc indéfiniment $\mathbb{C}$-différentiable grâce au Corollaire 9.6 —, on peut former une série de Taylor infinie. Le résultat suivant montre que le rayon de convergence de cette série entière de Taylor est toujours minoré d'une manière géométrique naturelle.



Théorème 9.7. *Soit une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

dont le rayon de convergence :

$$0 < R \leqslant \infty$$

n'est pas nul. En tout point z_0 appartenant à l'intérieur du disque de convergence :

$$|z_0| < R,$$

si l'on forme la série de Taylor de f :

$$g(w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k\,!}\, w^k,$$

alors cette série entière possède toujours un rayon de convergence strictement positif au moins égal à :

$$R - |z_0|,$$

et l'on a de plus :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!} \big(z - z_0\big)^n,$$

pour tout z dans le sous-disque :

$$\big|z - z_0\big| \,<\, R - |z_0|.$$

Démonstration. Posons donc :

$$w \,:=\, z - z_0.$$

Pour estimer le rayon de convergence de :

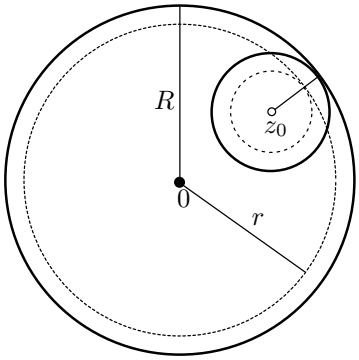
$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k\,!}\, w^k,$$

il faut contrôler la croissance des coefficients, et notamment de :

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{k+n}\, (z_0)^n,$$

par exemple via l'inégalité triangulaire :

$$\big|f^{(k)}(z_0)\big| \,\leqslant\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n\,!}\, \big|a_{n+k}\big|\, |z_0|^n.$$



Comme sur la figure, prenons un rayon r intermédiaire de sécurité :

$$|z_0| \,<\, r \,<\, R,$$

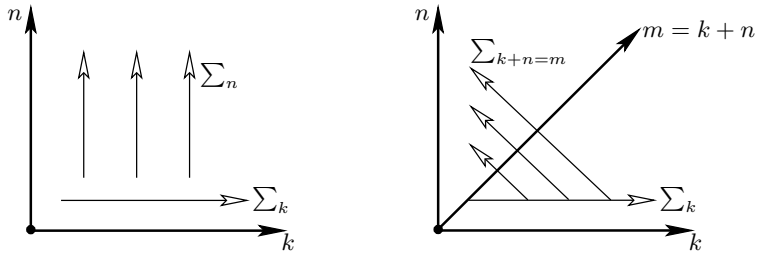
éventuellement arbitrairement proche de R.

En supposant :

$$|w| \,\leqslant\, r - |z_0|,$$

nous pouvons maintenant majorer :

$$\big|g(w)\big| \,\leqslant\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big|f^{(k)}(z_0)\big|}{k\,!}\, \big(r - |z_0|\big)^k \,\leqslant\, \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n\,!\,k\,!}\, \big|a_{k+n}\big|\, |z_0|^n\, \big(r - |z_0|\big)^k.$$



Dans cette double somme, posons :

$$k + n =: m,$$

d'où $n = m - k$, afin de la transformer en :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{Expression}(k, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \mathsf{Expression}\big(k,\, m-k\big),$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big|f^{(k)}(z_0)\big|}{k\,!} \big(r - |z_0|\big)^k &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \underbrace{\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{m\,!}{(m-k)!\,k!} \, |z_0|^{m-k} \big(r - |z_0|\big)^k \right)}_{\text{reconnaître } (|z_0| + r - |z_0|)^m} \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \, r^m \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

puisque $r < R$.

La finitude de cette somme montre donc que le rayon de convergence de $g(w)$ est au moins égal à $r - |z_0|$. Mais comme $r < R$ pouvait être choisi arbitrairement proche de R, c'est que ledit rayon de convergence de $g(w)$ est toujours au moins égal à :

$$R - |z_0|,$$

comme annoncé.

Il reste seulement à vérifier que :

$$\begin{aligned}
f(z) &\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n\,!\,k\,!} \, a_{k+n} \, (z_0)^n \big(z - z_0\big)^k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{m\,!}{(m-k)!\,k!} \, (z_0)^{m-k} \big(z - z_0\big)^k \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \big(z_0 + z - z_0\big)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, z^m,
\end{aligned}$$

ce qui est bien le cas, grâce au même calcul formel, les interversions de sommations étant justifiées par la convergence absolue des séries majorantes que l'on vient de manipuler. □

10. Fonctions analytiques et fonctions holomorphes

Dans la suite, nous travaillerons la plupart du temps dans des ouverts quelconques $\Omega \subset \mathbb{C}$. Avant d'étudier réellement l'espace proprement dit $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans Ω, nous allons commencer par étudier l'espace des *fonctions analytiques* dans Ω, car les séries entières sont aisément manipulables, comme nous venons de le voir dans ce qui précède.

Notation 10.1. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions localement développables en série entière convergente sera noté :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\Omega) \,:=\, \Big\{ f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ \forall\, z_0 \in \Omega\ \ \exists\, r > 0 \ \text{ avec } \ \mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega \\ \text{il existe une série entière } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n \ \text{ convergeant dans } \ \mathbb{D}_r(z_0) \\ \text{telle que } \ f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n \ \ \forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0) \Big\}.\end{aligned}$$

Comme les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ peuvent avoir des formes très diverses, on demande donc seulement que la fonction soit, au voisinage de chaque point $z_0 \in \Omega$, égale à une série entière convergente en les puissances de $z - z_0$, et alors $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On vérifie (exercice) que $\mathscr{A}(\Omega)$ est un anneau commutatif.

D'après le Théorème 9.5 qui précède, toute fonction analytique dans un ouvert Ω est aussi holomorphe dans Ω :

$$\mathscr{A}(\Omega) \,\subset\, \mathscr{O}(\Omega).$$

Un théorème profond de l'Analyse Complexe que nous établirons dans le chapitre suivant affirme que la réciproque est vraie : *toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω est aussi analytique dans Ω, à savoir développable en série entière convergente autour de chaque point de Ω :*

$$\mathscr{A}(\Omega) \,=\, \mathscr{O}(\Omega).$$

Pour cette raison, de nombreux auteurs s'autorisent à utiliser parfois les deux termes '*holomorphe*' et '*analytique*' de façon interchangeable.

Mais pour l'instant dévoilons quelques propriétés des fonctions analytiques.

11. Principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques

Localement au voisinage d'un point autour duquel elles convergent, les séries entières se comportent comme de simples polynômes, et en particulier, leurs zéros sont séparés les uns des autres — on dit '*isolés*' (du coronavirus).

Proposition 11.1. *Soit $f(z) = \sum a_n\, z^n$ une série entière convergente centrée à l'origine dont le rayon de convergence est $R > 0$. Si au moins un des coefficients $a_n \neq 0$ est non nul,* i.e. *si $f \not\equiv 0$, alors il existe un rayon $0 < r < R$ assez petit pour que :*

$$\begin{aligned}&\text{lorsque } a_0 = 0\colon \quad \Big(|z| < r \ \text{ et } \ f(z) = 0\Big) \ \Longrightarrow \ z = 0,\\ &\text{lorsque } a_0 \neq 0\colon \quad |z| < r \ \Longrightarrow \ f(z) \neq 0.\end{aligned}$$

Démonstration. Si en effet k est le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on peut factoriser :

$$\begin{aligned}f(z) &= a_k\, z^k + a_{k+1}\, z^{k+1} + a_{k+2}\, z^{k+2} + \cdots\\ &= z^k \Big(\underbrace{a_k + a_{k+1}\, z + a_{k+2}\, z^2 + \cdots}_{\text{nouvelle série entière } g(z)} \Big).\end{aligned}$$

Comme :

$$g(0) = a_k \neq 0,$$

par continuité, cette série entière g ne s'annule alors pas dans un certain voisinage de 0. $\square$

Corollaire 11.2. *Une fonction analytique f définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ possède toujours un* unique *développement en série entière convergente au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Sinon, on aurait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n,$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{a}_n \big(z - z_0\big)^n,$$

d'où par soustraction :

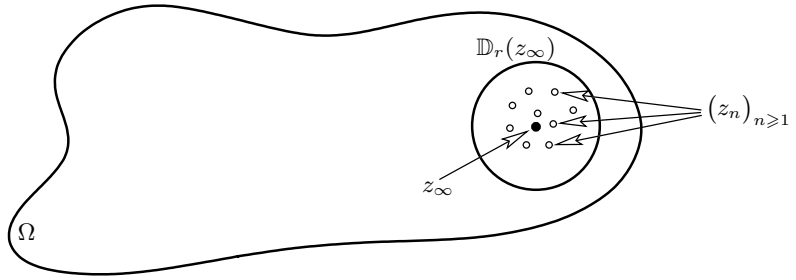
$$0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\big[a_n - \widetilde{a}_n\big]}_{=:\, b_n} \big(z - z_0\big)^n,$$

mais grâce à la proposition qui précède, si un seul de ces coefficients b_n était non nul, la série à droite serait certainement non nulle pour $z \neq 0$ proche de l'origine, contradiction. □

Théorème 11.3. [Principe du prolongement analytique] *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe *et soient f, g deux fonctions analytiques dans Ω. Si f et g ont les mêmes valeurs sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$ qui a un point d'accumulation* dans Ω*, alors ces deux fonctions coïncident :*

$$f \equiv g,$$

dans Ω tout entier.



Démonstration. Soit $z_\infty \in \Omega$ un point d'accumulation de E, et soit $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ un disque de rayon $r > 0$ assez petit pour être contenu dans Ω et pour que f et g soient développables en séries entières convergentes dans ce disque. Par hypothèse, la différence $f - g$ admet une suite infinie de zéros distincts deux à deux $z_1, z_2, z_3, \ldots$ qui sont tous contenus dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ avec $z_n \longrightarrow z_\infty$. La contraposée de la Proposition 11.1 qui précède implique alors (exercice mental) que :

$$0 \equiv (f - g)\big|_{\mathbb{D}_r(z_\infty)}.$$

Maintenant, il s'agit de montrer que cette identité $f \equiv g$ valable sur le disque $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ se *propage* à l'ouvert Ω tout entier, et c'est la connexité de Ω qui va garantir cela.

Introduisons en effet l'ensemble :

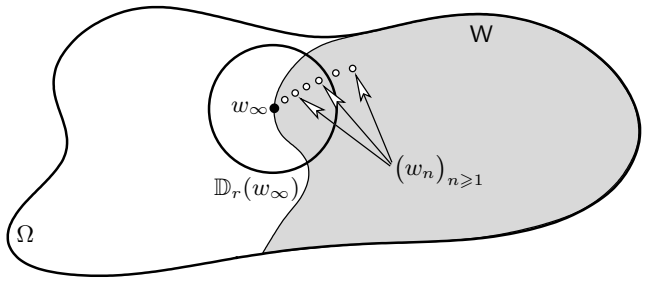
$$\mathsf{W} := \big\{w \in \Omega\colon\ f \equiv g \text{ dans un voisinage ouvert de } w\big\}.$$

Cet ensemble W est ouvert (exercice mental). Il contient aussi $\mathbb{D}_r(z_\infty)$, donc il n'est pas vide. Notre but étant de démontrer que $\mathsf{W} = \Omega$, il suffit de faire voir que W est aussi *fermé*,

puisque le seul sous-ensemble non vide d'un ouvert connexe qui est à la fois ouvert et fermé, c'est l'ouvert tout entier !

Soit donc w_∞ un point appartenant à l'adhérence $\overline{\mathsf{W}}$ de W pour la topologie induite, à savoir plus précisément :

$$w_\infty \in \overline{\mathsf{W}}^{\Omega} = \overline{\mathsf{W}}^{\mathbb{C}} \cap \Omega.$$



Comme $w_\infty \in \Omega$, il existe un disque $\mathbb{D}_r(w_\infty)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(w_\infty) \subset \Omega$. D'après l'Exercice 13, tout point adhérent à un ouvert est aussi point d'accumulation, donc il existe une suite $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $w_n \in \mathsf{W}$ *distincts deux à deux* telle que :

$$w_\infty = \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Puisque $f = g$ sur W, en tous ces points, on a coïncidence :

$$f(w_n) = g(w_n).$$

Alors la contraposée de la Proposition 11.1 qui précède implique que $f \equiv g$ dans un voisinage ouvert de w_∞, donc $w_\infty \in \mathsf{W}$. Ceci montre que W est fermé, et achève la démonstration. □

Théorème 11.4. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est* connexe. *Si $f \not\equiv 0$ n'est pas identiquement nulle, alors tous les zéros de f sont* isolés :

$$\Big(\forall\, z \in \Omega, \quad f(z) = 0\Big) \implies \Big(\exists\, r = r(z) > 0 \ \text{ tel que } \ \mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$$
$$\text{et } \ f(w) \neq 0 \ \text{ pour tout } \ w \in \mathbb{D}_r(z) \big\backslash \{z\}\Big).$$

Démonstration. En effet, le théorème précédent s'applique à $f = f$ et à $g = 0$. □

De manière équivalente, l'ensemble des zéros d'une fonction $f \not\equiv 0$ analytique dans un ouvert Ω est toujours un sous-ensemble *discret* de Ω.

Théorème 11.5. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est* connexe. *S'il existe un point $z_0 \in \Omega$ en lequel* toutes *les dérivées de f s'annulent :*

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = f'''(z_0) = \cdots,$$

alors $f \equiv 0$ est identiquement nulle dans Ω entier.

Démonstration. En effet, la série entière de f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!} \big(z - z_0\big)^n$$

converge par hypothèse dans un certain disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ assez petit, mais elle est identiquement nulle ! Donc la restriction :

$$f\big|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv 0$$

est identiquement nulle, et les théorèmes précédents propagent alors instantanément la zéro-ité de f à tout l'ouvert connexe Ω. $\square$

12. Intégration le long de courbes $\gamma \subset \mathbb{C}$

Dans la définition d'une courbe, on doit faire la différence entre l'objet géométrique 1-dimensionnel contenu dans le plan (lui-même muni d'une certaine orientation), et une paramétrisation de la courbe, qui est une application définie dans un intervalle fermé et à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. La paramétrisation n'est jamais définie de manière unique, bien que l'image géométrique de la courbe le soit.

Définition 12.1. Une *courbe paramétrée* est une fonction $z = z(t)$ qui envoie un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$ dans le plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} z\colon \quad [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z(t). \end{aligned}$$

En fait, il ne coûte (presque) rien d'imposer des conditions de régularité sur les paramétrisations, eu égard aux applications désirées à l'Analyse Complexe.

Définition 12.2. La courbe paramétrée sera dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ lorsque la dérivée $z'(t)$ existe et est continue pour tout $t \in [a, b]$, avec de plus :

$$z'(t) \neq 0 \qquad {\scriptstyle (\forall\, t \in [a,b]).}$$

Aux points-extrémités $t = a$ et $t = b$, les dérivées $z'(a)$ et $z'(b)$ doivent être interprétées comme dérivées à droite et à gauche, précisément définies par :

$$z'(a) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{z(a+h) - z(a)}{h} \qquad \text{et} \qquad z'(b) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

Définition 12.3. On dit qu'une courbe paramétrée *continue :*

$$z\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

est $\mathscr{C}^1$ *par morceaux* lorsqu'il existe des points :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b,$$

tels que $t \longmapsto z(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

On notera que les dérivées à droite et à gauche en chacun des points $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ne sont pas censées être égales.

Définition 12.4. Deux paramétrisations :

$$z\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{z}\colon \quad [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une bijection de classe $\mathscr{C}^1$:

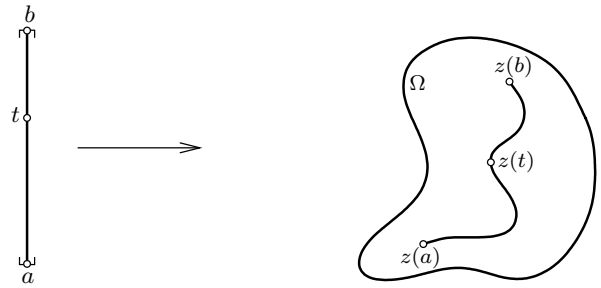
$$\begin{aligned} [c,d] &\longrightarrow [a,b] \\ s &\longmapsto t(s), \end{aligned}$$

satisfaisant $t'(s) > 0$ telle que :

$$\widetilde{z}(s) = z\big(t(s)\big),$$

pour tout $s \in [c, d]$.

La condition $t'(s) > 0$ dit précisément que l'orientation est préservée : lorsque s augmente continûment de c à d, il en va de même pour $t(s)$, qui augmente aussi continûment de a à b.



Définition 12.5. La famille de toutes les paramétrisations qui sont équivalentes à une paramétrisation $z(t)$ détermine une unique *courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux :*

$$\gamma \subset \mathbb{C},$$

à savoir l'image :

$$\gamma \,:=\, z\big([a, b]\big)$$

d'une quelconque paramétrisation, toutes ces images étant égales.

La courbe hérite de l'orientation canonique du segment $[a, b]$.

Définition 12.6. Étant donné une courbe γ, la courbe inverse γ^- est celle qu'on obtient en renversant les orientations de b vers a.

Clairement, la courbe γ^- consiste en les mêmes points de $\mathbb{C}$. Bien entendu, si $z\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de γ, on peut prendre pour paramétrisation de γ^- l'application :

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto z\big(b + a - t\big) \\ &=: z^-(t). \end{aligned}$$

Évidemment, une *courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux* est l'image d'une courbe paramétrée par morceaux, indépendamment de toute paramétrisation.

Terminologie 12.7. Les deux points $z(a)$ et $z(b)$ sont appelés *points-extrémités* de la courbe.

Puisque γ porte une orientation, il est naturel de dire que γ *part* de a, et *aboutit* en b.

Définition 12.8. Une courbe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^1$ par morceaux est dite *simple* lorsqu'elle n'a aucune auto-intersection, c'est-à-dire lorsque :

$$\big(s \neq t\big) \implies \Big(z(s) \neq z(t)\Big).$$

Lorsque la courbe est fermée :

$$z(b) = z(a),$$

il est naturel de requérir seulement que :

$$\Big(z(s) = z(t) \ \text{ et } \ s < t\Big) \implies \big(s = a \ \text{ et } \ t = b\big).$$

L'exemple canonique de courbe est celui d'un cercle :

$$C_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C}\colon \ |z - z_0| = r\big\}.$$

de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$.

Définition 12.9. L'*orientation trigonométrique* — contraire au sens des aiguilles d'une montre — est celle qui est donnée par la paramétrisation standard :

$$z(t) = z_0 + r\, e^{i\,t} \qquad (t \in [0, 2\,\pi]),$$

tandis que l'*orientation négative* est donnée par :

$$z(t) = z_0 + r\, e^{-\,i\,t} \qquad (t \in [0, 2\,\pi]).$$

L'intégration le long de courbes tracées dans le plan complexe est un outil important pour l'étude des fonctions holomorphes. Un théorème-clé en analyse complexe énonce que si une fonction est holomorphe dans l'*intérieur topologique* — notion plus délicate qu'il n'y paraît et qui doit être soigneusement précisée — d'une courbe fermée $\gamma \subset \mathbb{C}$, alors :

$$0 = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Dans le chapitre qui suit, nous démontrerons ce résultat, appelé *Théorème de Cauchy*. Pour l'instant, nous nous contenterons de définitions initiales et de propriétés élémentaires.

Définition 12.10. Étant donné une courbe $\gamma = z\big([a, b]\big)$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, et étant donné une fonction f continue sur γ, on définit l'*intégrale de f le long de γ* par :

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt.$$

Afin de s'assurer qu'une telle définition a un sens rigoureux, il faut vérifier que le membre de droite est indépendant de la paramétrisation choisie par γ.

Soit donc $\widetilde{z}\colon [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ une autre paramétrisation quelconque, comme décrite ci-dessus :

$$\widetilde{z}(s) \ = \ z\big(t(s)\big) \qquad (s \in [c, d]).$$

Alors c'est la formule classique de changement de variable dans une intégrale qui va rendre tout cohérent :

$$\begin{aligned}\int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt &= \int_c^d f\big(z(t(s))\big)\, z'\big(t(s)\big)\, t'(s)\, ds \\ &= \int_c^d f\big(\widetilde{z}(s)\big)\, \widetilde{z}'(s)\, ds.\end{aligned}$$

Proposition 12.11. *L'intégrale d'une fonction le long d'une courbe est indépendante de sa paramétrisation.* □

Lorsque γ est continue par morceaux, l'intégrale de f sur γ est alors simplement définie comme la somme des intégrales de f sur les morceaux lisses de la courbe. Autrement dit, dans les notations qui précèdent :

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\big(z(t)\big)\, z'(t)\,dt.$$

Définition 12.12. La *longueur* d'une courbe lisse γ est :

$$\mathsf{longueur}(\gamma) := \int_a^b \big|z'(t)\big|\,dt.$$

En raisonnant comme nous venons de le faire, on se convainc aisément que cette définition est elle aussi indépendante de la paramétrisation de la courbe. Évidemment, lorsque la courbe est lisse par morceaux, sa longueur est la somme (finie) des longueurs de ses morceaux lisses.

Proposition 12.13. *L'intégration des fonctions continues sur les courbes jouit des propriétés suivantes :*

(i) *elle est linéaire, à savoir :*

$$\int_\gamma \big(\alpha\, f(z) + \beta\, g(z)\big)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz;$$

(ii) *si γ^- est la courbe γ inverse, alors :*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz;$$

(iii) *l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma} \big|f(z)\big| \cdot \mathsf{longueur}(\gamma).$$

Démonstration. La première propriété découle directement de la définition et de la linéarité de l'intégrale (de Riemann, ou de Lebesgue). La seconde propriété est laissée en exercice au lecteur-étudiant. Pour ce qui est de la troisième, on majore (très) aisément :

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &\leqslant \sup_{t\in[a,b]} \big|f\big(z(t)\big)\big| \int_a^b \big|z'(t)\big|\,dt \\ &= \sup_{z\in\gamma} \big|f(z)\big| \cdot \mathsf{longueur}(\gamma).\end{aligned}$$

□

Comme nous l'avons dit par anticipation destinée à éveiller la curiosité, le théorème de Cauchy qui sera démontré ultérieurement énonce que pour des courbes fermées appropriées $\gamma \subset \mathbb{C}$ contenues dans certains « bons » ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lesquels f est holomorphe, on a :

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

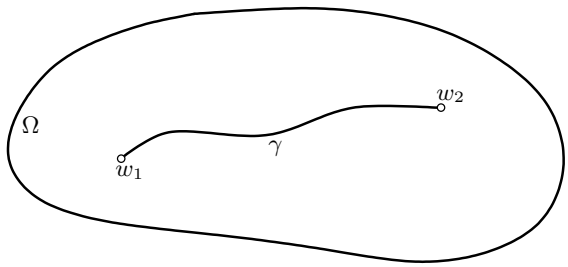
L'existence de *primitives* exhibe une première manifestation de ce phénomène remarquable.

Définition 12.14. Une *primitive (holomorphe)* pour une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction F, elle aussi holomorphe dans Ω, telle que :

$$F'(z) = f(z),$$

pour tout $z \in \Omega$.

En fait, on peut parler de primitive holomorphe de toute fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$, mais nous démontrerons dans le prochain chapitre que f est alors aussi holomorphe.



Théorème 12.15. *Si une fonction f holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ admet une primitive holomorphe F, alors pour toute courbe $\gamma \subset \Omega$ contenue dans l'ouvert qui part d'un point $w_1 \in \Omega$ et aboutit à un autre point $w_2 \in \Omega$, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(w_2) - F(w_1).$$

Démonstration. Lorsque γ est lisse, l'argument repose sur une simple application de la règle de différentiation des fonctions composées et sur une application du théorème fondamental de l'intégration. En effet, si :

$$z(t)\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une paramétrisation de γ, avec bien entendu $z(a) = w_1$ et $z(b) = w_2$, alors on calcule (très) aisément :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\big(z(t)\big)\,z'(t)\,dt \\
&= \int_a^b F'\big(z(t)\big)\,z'(t)\,dt \\
\text{[Proposition 7.7]} \qquad &= \int_a^b \frac{d}{dt}\,F\big(z(t)\big)\,dt \\
&= F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big).
\end{aligned}$$

Ensuite, lorsque γ n'est que lisse par morceaux, il en va de même grâce à une somme téléscopique :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big[F\big(z(a_{k+1})\big) - F\big(z(a_k)\big)\Big] \\
&= F\big(z(a_n)\big) - F\big(z(a_0)\big) \\
&= F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 12.16. *Si γ est une courbe fermée lisse par morceaux dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si f est une fonction continue qui admet une primitive F holomorphe dans Ω, alors :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. En effet, on voit bien que lorsque $z(b) = z(a)$, la différence $F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big)$ se réduit à 0 ! □

Par (contre-)exemple, la fonction $f(z) = 1/z$ n'a *pas* de primitive dans l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, puisque, en paramétrant le cercle unité $C = \partial\mathbb{D}$ par $z(t) = e^{i\,t}$, avec $0 \leqslant t \leqslant 2\,\pi$, on calcule :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{i\,t}}{e^{i\,t}}\,dt = 2i\pi \neq 0,$$

quantité qui n'est *pas* nulle, contrairement à ce que le dernier corollaire stipule.

Dans les chapitres qui vont suivre, nous allons voir que ce calcul d'apparence innocente gît au cœur le plus profond et le plus intime de toute la théorie.

Corollaire 12.17. *Si une fonction f holomorphe dans un domaine,* i.e. *dans un ouvert* connexe*, $\Omega \subset \mathbb{C}$, a une dérivée identiquement nulle $f' \equiv 0$, alors f est identiquement égale à une certaine constante (et réciproquement, de manière triviale).*

Démonstration. Fixons un point $w_0 \in \Omega$. Il suffit de montrer que $f(w) = f(w_0)$ pour tout $w \in \Omega$.

Puisque l'ouvert Ω est connexe, il est aussi connexe par arcs en vertu de l'Exercice 14, donc il existe une courbe γ de classe $\mathscr{C}^1$ qui joint w_0 à w. Puisque f est trivialement une primitive de f', on a :

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(w) - f(w_0).$$

Or par hypothèse, $f' \equiv 0$, donc l'intégrale à gauche est égale à 0, et on conclut que $f(w) = f(w_0)$, comme désiré. □

13. Pathologies « réelles »

Avant de dévoiler les propriétés prodigieuses des fonctions holomorphes, rappelons quelles sont les « pathologies » dont les fonctions réelles peuvent souffrir.

Tout d'abord, la dérivée f' d'une fonction dérivable en tout point peut s'avérer être assez « incontrôlable », en tout cas au moins être non continue, comme le montre :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dérivable en tout point qui a (exercice) pour fonction dérivée :

$$f'(x) := \begin{cases} 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

prenant les valeurs oscillantes ne convergeant pas vers $0 = f'(0)$:

$$f'\big(\tfrac{1}{n\,\pi}\big) = -\,(-1)^n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*).$$

Autre exemple, une dérivée f' peut être continue tandis que $(f')'$ n'existe en aucun point, comme le montre (exercice) :

$$f(x) \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\,(2^n\,x)}{4^n}.$$

Volterra a trouvé des fonctions dérivables en tout point qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann. Un premier exemple simple est (noter le changement d'exposant) :

$$f(x) \,:=\, \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dont la dérivée a pour valeurs spéciales divergentes (exercice) :

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\,\pi}}\right) \,=\, 2\,\sqrt{(2n+1)\,\pi} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

donc f' est *non* bornée, donc f' ne peut *de facto* pas être Riemann-intégrable — être bornée, c'est la tenue minimale exigée chez Riemann ! Toutefois, puisqu'il existe une théorie des intégrales généralisées au sens de Riemann, et puisque pour $\varepsilon > 0$ petit tendant vers 0, on a clairement existence de la limite de :

$$\int_{\varepsilon}^{\sqrt{2/\pi}} f'(x)\,dx \,=\, \left[x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right]_{\varepsilon}^{\sqrt{2/\pi}} \,=\, \frac{2}{\pi} \cdot 1 - \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon^2} \;\underset{\varepsilon \underset{>}{\to} 0}{\longrightarrow}\; \frac{2}{\pi},$$

cette fonction n'est pas un vrai contre-exemple, il faut trouver mieux !

En recollant-renormalisant de telles fonctions, Volterra est parvenu à construire une fonction continue $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout point, dont la dérivée est bornée $|f'(x)| \leqslant 3$ sur $[0,1]$ mais *discontinue* en tout point d'un sous-ensemble de Cantor $C \subset [0,1]$ « *gras* », c'est-à-dire de mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle strictement positive. Or rappelons que, d'après le cours d'Intégration, une fonction bornée sur $[0,1]$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle. Par conséquent, la fonction bornée f' ne peut *pas* être Riemann-intégrable. Ça, c'est un vrai contre-exemple !

Un raffinement de la construction de Volterra permet même de construire une fonction f dérivable et de dérivée f' bornée telle que f' n'est Riemann-intégrable sur aucun intervalle ouvert non vide contenu dans $]0,1[$.

Auparavant dans l'histoire des mathématiques, Riemann proposa en 1854 la fonction :

$$f(x) \,:=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

comme fonction-candidate à n'être dérivable en aucun point $x \in \mathbb{R}$.

Hardy démontra en 1916 que cette fonction n'est effectivement pas dérivable aux points de la forme :

$$x \,=\, \xi\,\pi,$$

avec :

$$\xi \,\in\, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \qquad \text{ou} \qquad \xi \,=\, \begin{cases} \frac{2a+1}{2b} \,\in\, \mathbb{Q}, \\ \frac{2a+1}{4b+1} \,\in\, \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ce qui ne traitait pas tous les points !

Gerver termina le travail en 1970, et contredisant toute attente, il fit voir que la série de Riemann *est* dérivable de dérivée égale à $-\frac{1}{2}$ aux points de la forme :

$$x = \frac{2\,a+1}{2\,b+1}\,\pi,$$

et enfin des fins, qu'elle n'est *pas* (non plus) dérivable aux points $x = \frac{2\,a}{2\,b+1}\,\pi$.

Tous ces phénomènes « pathologique » ne se produiront pas dans le pays des merveilles holomorphes, comme va commencer à le dévoiler le prochain chapitre.

14. Exercices

Exercice 1. Décrire géométriquement les différents lieux des points $z \in \mathbb{C}$ définis par les relations suivantes.

(a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fixés.

(b) $1/z = \overline{z}$.

(c) $\mathsf{Re}\, z = 3$.

(d) $\mathsf{Re}\, z > c$ puis $\mathsf{Re}\, z \geqslant c$, avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

(e) $\mathsf{Re}\,(az + b) > 0$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ fixés.

(f) $|z| = \mathsf{Re}\, z + 1$.

(g) $\mathsf{Im}\, z = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^2$, défini pour $Z = (x_1, y_1)$ et $W = (x_2, y_2)$ par :

$$\langle Z, W \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Soit aussi $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}$ défini par :

$$(z, w) := z\overline{w}.$$

Le terme *hermitien* notifie le fait que $(\cdot, \cdot)$ n'est pas symétrique, mais satisfait quand même la relation :

$$(w, z) = \overline{(z, w)}.$$

Vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \tfrac{1}{2}\left[(z, w) + (w, z)\right] \\ &= \mathsf{Re}\,(z, w), \end{aligned}$$

lorsqu'on écrit $z = x + i\,y$ et $w = u + i\,v$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Pour $\omega = s\,e^{i\,\varphi}$ fixé avec $s \geqslant 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $z^n = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

Exercice 4. Soit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z := \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin z := \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}.$$

Montrer :

$$e^{i\,z} = \cos z + i \sin z,$$

puis :

$$1 \equiv \cos^2 z + \sin^2 z,$$

et enfin :

$$\cos'(z) = -\sin z \qquad \text{et} \qquad \sin'(z) = \cos z.$$

Exercice 5. Soit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Montrer :

$$\cosh'(z) = \sinh z \qquad \text{et} \qquad \sinh'(z) = \cosh z,$$

puis :

$$1 \equiv \cosh^2(z) - \sinh^2(z),$$

et terminer en donnant les développements en séries entières de $\cosh z$ et de $\sinh z$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z/2) \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos(nz) = \frac{\sin\big(n + \frac{z}{2}\big)}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Exercice 7. Le but est de démontrer que contrairement à $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ne peut pas être muni d'un ordre *total* qui soit compatible avec l'addition et la soustraction.

Plus précisément, montrer qu'il n'existe pas de relation $\prec$ entre les nombres complexes qui jouit des trois propriétés suivantes :

(i) pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a ou bien $z \prec w$, ou bien $w \prec z$ ou bien $z = w$, de manière exclusive ;

(ii) pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ arbitraires, si $z_1 \prec z_2$, alors $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$;

(iii) pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ arbitraires, si $z_1 \prec z_2$ et si $0 \prec z_3$, alors $z_1 z_3 \prec z_2 z_3$.

Indication: Tester tout d'abord si $0 \prec i$ est possible.

Exercice 8. Montrer qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire $\Lambda \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle commute avec la multiplication par i, et lorsque tel est le cas, montrer que $\Lambda(z) = \Lambda(1)\, z$.

Exercice 9. Montrer que les quatre fonctions suivantes sont holomorphes dans leur domaine de définition et qu'elles satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$z^3, \qquad \frac{1}{z+1}, \qquad \frac{e^z}{z^5}, \qquad \frac{z^7}{z^2+1}.$$

Exercice 10. Déterminer si les cinq fonctions suivantes sont $\mathbb{C}$-dérivables en tout point de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&x^5 y^4 + i\, x y^3,\\
&y^2 \sin x + i\,(y^3 + 2\,x^2),\\
&\sin^2(x+y) + i \cos^2(x+y),\\
&e^x \cos y - 2xy + i\,\big(e^x \sin y + x^2 - y^2\big),\\
&(2-2i)\, y^3 - 6\,\big(\cos x + i \sin y\big) + 15\,(y^2 + 2\,y).
\end{aligned}$$

Exercice 11. Soit un polynôme $P = P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$.

(a) Montrer qu'il existe un autre polynôme $Q = Q(z, \overline{z}) \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ tel que $P(x, y) \equiv Q(z, \overline{z})$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit une fonction holomorphe.

Exercice 12. Pour les deux fonctions réelles suivantes $u \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &:= 2\,x^3 - 6\,xy^2 + x^2 - y^2,\\
u(x, y) &:= x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^{-y} \cos x,
\end{aligned}$$

trouver une fonction réelle $v \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u + iv \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe.

Exercice 13. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit un point $z_\infty \in \overline{\Omega}$ appartenant à son adhérence, à savoir il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de points $z_n \in \Omega$ telle que :

$$z_\infty = \lim_{n \to \infty} z_n.$$

Montrer que z_∞ est *aussi* un point d'accumulation de Ω. Indication: Perturber légèrement la suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ comme une nouvelle suite $\{z'_n\}_{n=1}^\infty$ en assurant, par récurrence, que z'_{n+1} est distinct de $z'_1, \ldots, z'_n$.

Exercice 14. Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence entre la connexité et la connexité par arcs des ensembles *ouverts* $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(a) On suppose d'abord que Ω est ouvert et connexe par arcs, mais qu'il peut s'écrire $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1, Ω_2 ouverts disjoints non vides, en raisonnant donc par l'absurde. On choisit deux points quelconques $w_1 \in \Omega_1$ et $w_2 \in \Omega_2$. Soit $z\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ une courbe continue joignant $w_1 = \gamma(a)$ à $\gamma(b) = w_2$. En introduisant :

$$t_1^* := \sup\big\{t \in [a,b]\colon\ z(s) \in \Omega_1 \ \text{ pour tous } a \leqslant s \leqslant t\big\},$$

parvenir à une contradiction.

(b) Réciproquement, on suppose que Ω est ouvert et connexe, le but étant d'établir qu'il est connexe par arcs. On fixe un point $w \in \Omega$. Soit $\Omega_1 \subset \Omega$ l'ensemble de tous les points qui peuvent être joints à w au moyen d'une courbe continue contenue dans Ω. Aussi, soit $\Omega_2 \subset \Omega$ l'ensemble de tous les points qui ne peuvent *pas* être joints à w par une courbe continue contenue dans Ω. Montrer que Ω_1 et Ω_2 sont tous deux ouverts et connexes, qu'ils sont disjoints, et que leur réunion est Ω. Conclure.

Exercice 15. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et soit un point $z \in \Omega$. La *composante connexe* de Ω contenant z est l'ensemble $\mathscr{C}_z$ de tous les points $w \in \Omega$ qui peuvent être joints à z par une courbe *continue* entièrement contenue dans Ω.

(a) Montrer tout d'abord que $\mathscr{C}_z$ est ouvert et connexe. Montrer ensuite que $w \in \mathscr{C}_z$ définit une relation d'équivalence, à savoir que $z \in \mathscr{C}_z$, puis que $w \in \mathscr{C}_z \Longleftrightarrow z \in \mathscr{C}_w$ et enfin que :

$$\Big(w \in \mathscr{C}_z \quad \text{et} \quad z \in \mathscr{C}_\zeta\Big) \Longrightarrow \Big(w \in \mathscr{C}_\zeta\Big).$$

(b) Montrer que Ω a un nombre au plus dénombrable de composantes connexes distinctes. Indication: Si, au contraire, il existait un nombre *non dénombrable* de telles composantes, obtenir un nombre non dénombrable de disques ouverts disjoints, et penser aux points de $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$ à coordonnées rationnelles.

(c) Montrer que si $\Omega = \mathbb{C} \backslash K$ est le complémentaire d'un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$, alors Ω possède une et une seule composante connexe *non bornée*, à savoir une composante connexe dont l'adhérence n'est pas compacte. Indication: Penser au complémentaire d'un grand disque ouvert contenant K.

Exercice 16. La famille d'applications introduites ici joue un rôle important en Analyse Complexe. Ces applications, dites *de Blaschke*, réapparaîtront notamment lorsqu'on étudiera les applications dites *conformes* de $\mathbb{C}$.

(a) Soient deux nombres complexes $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $z\,\overline{w} \neq 1$. Montrer que :

$$\left|\frac{w-z}{1-z\,\overline{w}}\right| < 1, \qquad \text{lorsque de plus } \ |z| < 1 \ \text{ et } \ |w| < 1,$$

et aussi que :

$$\left|\frac{w-z}{1-z\,\overline{w}}\right| = 1, \qquad \text{lorsque } \ |z| = 1 \ \text{ ou } \ |w| = 1,$$

Indication: Justifier qu'on peut supposer que $z \in \mathbb{R}$ est réel. Ensuite, se ramener à montrer que :

$$(r-w)\,(r-\overline{w}) \leqslant (1-rw)\,\big(1-r\,\overline{w}\big),$$

avec une égalité $=$ au lieu d'une inégalité $\leqslant$ pour r et $|w|$ appropriés.

(b) Montrer que pour $w \in \mathbb{D}$ fixé dans le disque unité, à savoir satisfaisant $|w| < 1$, l'application :

$$F\colon \quad z \longmapsto \frac{w-z}{1-z\,\overline{w}}$$

jouit des quatre propriétés :

- **(i)** $F\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ envoie le disque unité $\mathbb{D}$ dans lui-même, et est holomorphe ;
- **(ii)** F échange 0 et w, à savoir $F(0) = w$ et $F(w) = 0$;
- **(iii)** $|F(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$ sur le cercle unité, *i.e.* tout z avec $|z| = 1$;
- **(iv)** $F\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective. Indication: Calculer $F \circ F$.

Exercice 17. Soient $\mathsf{U} \subset \mathbb{C}$ et $\mathsf{V} \subset \mathbb{C}$ deux sous-ensembles ouverts du plan complexe. Soient les deux opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que si $f\colon \mathsf{U} \longrightarrow \mathsf{V}$ et $g\colon \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, c'est-à-dire différentiables au sens réel par rapport aux deux variables (x, y) jusqu'à l'ordre 2 avec des dérivées toutes continues, la composition :

$$h := g \circ f$$

satisfait, en termes de ces deux opérateurs, les règles suivantes de différentiation composée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial z},\\
\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.
\end{aligned}$$

Exercice 18. **(a)** Montrer qu'en coordonnées polaires $z = r\,e^{i\,\theta}$, les équations de Cauchy-Riemann prennent la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta},\\
\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\,\frac{\partial v}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Indication: Vérifier d'abord les formules :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

(b) Utiliser ces équations pour faire voir que la *fonction logarithme* définie par :

$$\log z = \log r + i\,\theta,$$

pour $z = r\,e^{i\,\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, est holomorphe.

Exercice 19. Montrer que :

$$4\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial}{\partial z} = \Delta,$$

ou Δ est le *laplacien :*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Exercice 20. Utiliser l'Exercice 19 pour montrer que si une fonction f est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors sa partie réelle $\mathsf{Re}\, f$ et sa partie imaginaire $\mathsf{Im}\, f$ satisfont :

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta\big(\mathsf{Re}\, f\big)\\
&= \Delta\big(\mathsf{Im}\, f\big).
\end{aligned}$$

(Les solutions $u \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ sont appelées *fonctions harmoniques*.)

Exercice 21. Soit la fonction :

$$f(x + i\,y) := \sqrt{|x|\;|y|},$$

définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, mais qu'elle n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en $0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 22. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que f est constante dans l'une (au moins) des trois circonstances suivantes :

- $\mathsf{Re}\, f$ est constante ;
- $\mathsf{Im}\, f$ est constante ;
- $|f|$ est constante.

Exercice 23. **(a)** Montrer que la fonction $z \longmapsto 1/\overline{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(b) Montrer qu'elle conserve les angles infinitésimaux *non* orientés entre paires de courbes.

(c) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide invariant par conjugaison complexe, c'est-à-dire satisfaisant $z \in \Omega$ implique $\overline{z} \in \Omega$. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, montrer que la fonction :

$$g(z) \,:=\, \overline{f(\overline{z})} \qquad {\scriptstyle (z \in \Omega)}$$

est holomorphe dans Ω.

(d) On suppose maintenant $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ non constante. Parmi les cinq fonctions suivantes :

$$f\big(\overline{z}\big), \qquad \overline{f(z)}, \qquad \mathsf{Re}\, f(z), \qquad \mathsf{Im}\, f(z), \qquad \big|f(z)\big|,$$

lesquelles sont holomorphes ?

Exercice 24. Soient deux suites finies de nombres complexes :

$$\big\{a_n\big\}_{1 \leqslant n \leqslant N} \qquad \text{et} \qquad \big\{b_n\big\}_{1 \leqslant n \leqslant N},$$

avec $N \geqslant 2$. Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on note :

$$B_k := b_1 + \cdots + b_k.$$

Établir la formule de *sommation par parties :*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n\, b_n = a_N\, B_N - a_M\, B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} \big(a_{n+1} - a_n\big)\, B_n,$$

valable pour tout $1 \leqslant M \leqslant N-1$.

Exercice 25. En utilisant l'Exercice 24, démontrer le *Théorème d'Abel :* si une série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ($a_n \in \mathbb{C}$), alors :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exercice 26. Montrer que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes tous non nuls $a_n \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$

avec $0 \leqslant L \leqslant \infty$, alors on a aussi :

$$L = \lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ainsi, lorsqu'il est applicable, le critère de Hadamard peut être utilisé (au lieu du critère de Cauchy), pour déterminer un rayon de convergence.

Exercice 27. **(a)** Montrer que la fonction :

$$f(z) \,:=\, \frac{1}{1 - z - z^2}$$

est holomorphe dans un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$.

(b) Montrer que les coefficients de son développement en série entière à l'origine $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ satisfont la relation de récurrence de Fibonacci :

$$a_0 \,=\, a_1 \,=\, 1, \qquad a_n \,=\, a_{n-1} + a_{n-2} \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 2)}.$$

(c) Déterminer le rayon de convergence exact de cette série entière.

Exercice 28. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\log n\big)^2\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n + 3\,n} z^n, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3\,n)!}\, z^n.$$

Indication: Utiliser l'asymptotique de Stirling $n! \sim \big(\frac{n}{e}\big)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Exercice 29. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\, z^n,$$

où $q > 0$.

Exercice 30. Soient deux séries entières centrées à l'origine :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad \text{et} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n,$$

dont les rayons de convergence respectifs $R > 0$ et $S > 0$ sont strictement positifs. Montrer que les séries somme et produit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + b_n\big)\, z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_0\, b_n + \cdots + a_n\, b_0\big)\, z^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à :

$$\min\big(R,\, S\big),$$

et fournissent les valeurs de $f(z) + g(z)$ et de $f(z)\, g(z)$ dans le disque associé.

Exercice 31. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ avec $\gamma \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$.

(a) Trouver le rayon de convergence de la *série hypergéométrique :*

$$F\big(\alpha, \beta, \gamma;\, z\big) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\;\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\, z^n.$$

(b) Montrer que $F\big(\alpha, \beta, \gamma;\, z\big)$ est une solution de l'équation différentielle dite hypergéométrique d'inconnue y :

$$0 = z\,(1-z)\,y'' + \big[c - (1+a+b)\,z\big]\,y' - ab\,y.$$

Exercice 32. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n$ une série entière ayant un rayon de convergence $R > 0$. Montrer que les séries suivantes ont le même rayon de convergence R :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}.$$

Exercice 33. Soit un entier $r \geqslant 1$. Trouver le rayon de convergence de la *fonction de Bessel* d'ordre r :

$$J_r(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Exercice 34. Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}\,?$$

Montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$0 = z\,y'' + y' - 4\,z\,y.$$

Exercice 35. Montrer qu'il existe des nombres dits *de Bernoulli* tels que :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n\,!}\, z^n.$$

Montrer que $|B_n| \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. Montrer que :

$$\frac{B_0}{n!\,0!} + \frac{B_1}{(n-1)!\,1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!\,(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } n = 1, \\ 0 & \text{lorsque } n \geqslant 2. \end{cases}$$

En déduire que $B_n \in \mathbb{Q}$. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Montrer que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$. Montrer :

$$\frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n},$$

et en déduire :

$$\pi\, z\, \mathsf{cotan}(\pi\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{(2\pi)^{2n}}{(2\,n)!}\, B_{2n}\, z^{2n}.$$

Exercice 36. Établir les énoncés suivants.

(a) La série entière $\sum n\, z^n$ ne converge en aucun point du cercle unité.

(b) La série entière $\sum \frac{1}{n^2}\, z^n$ converge en tous les points du cercle unité.

(c) La série entière $\sum \frac{1}{n}\, z^n$ converge en tous les points du cercle unité, excepté le point 1. Indication: utiliser la sommation par parties.

Exercice 37. Soit $m \geqslant 1$ un entier. Développer $(1-z)^{-m}$ en puissances de z. Montrer que les coefficients obtenus :

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n,$$

satisfont l'estimée asymptotique suivante :

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(m-1)!}\, n^{m-1}.$$

Exercice 38. Montrer que pour tout $|z| < 1$, on a :

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z},$$

et aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2\,z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^k\, z^{2^k}}{1+z^{2^k}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

Montrer que ces deux sommes infinies convergent commutativement. Indication: utiliser le développement dyadique d'un entier et le fait que $2^{k+1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k$.

Exercice 39. Un sous-ensemble $S \subset \{1, 2, 3, \dots\}$ de $\mathbb{N}^*$ est dit être *en progression arithmétique* lorsqu'il est de la forme :

$$S = \big\{a,\ a+d,\ a+2\,d,\ a+3\,d,\ \dots\dots\big\},$$

où $a, d \geqslant 1$ sont des entiers. Ici, d est appelé le *pas* de la progression arithmétique.

Montrer que $\mathbb{N}^*$ ne peut pas être partitionné en un nombre fini de sous-ensembles $S_1, \dots, S_k$ qui sont en progressions arithmétiques de pas $d_1, \dots, d_k$ tous distincts deux à deux (excepté dans le cas trivial $a = d = 1$). Indication: Écrire $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ comme somme de termes du type $\frac{z^a}{1-z^d}$.

Exercice 40. Montrer que l'anneau des fonctions analytiques dans un ouvert Ω est un anneau intègre si et seulement si Ω est connexe.

Exercice 41. Montrer que l'algèbre des fonctions continues sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ n'est jamais intègre, et décrire précisément les diviseurs de 0.

Exercice 42. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe Ω contenant $0 \in \mathbb{C}$ et satisfaisant :

- soit pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$:

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{1}{2\,n+1}\Big) = \frac{1}{n}?$$

- soit pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$:

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(-\,\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}?$$

Exercice 43. Soit $f(z) = \sin \frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $\{|z| < 1\}$. Déterminer les zéros de f. A-t-on une contradiction avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 44. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction $f \in \mathscr{O}\big(\Omega \backslash \{z_0\}\big)$ holomorphe en-dehors d'un certain point $z_0 \in \Omega$. On suppose que f est localement bornée au voisinage de z_0, à savoir qu'il existe un rayon $r > 0$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}).$$

(a) Montrer que la fonction définie par :

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{lorsque } z \in \Omega \backslash \{z_0\}, \\ 0 & \text{pour } z = z_0, \end{cases}$$

est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

(b) En admettant la coïncidence $\mathscr{O}(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$ entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques, montrer qu'il existe une série entière unique $\varphi(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (z - z_0)^n$ convergeant au voisinage de z_0 telle que :

$$g(z) = \big(z - z_0\big)^2\, \varphi(z - z_0) \qquad (\forall\, z \text{ près de } z_0).$$

(c) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\Omega)$ telle que :

$$\widetilde{f}\big|_{\Omega \backslash \{z_0\}} = f.$$

Exercice 45. Considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \leqslant 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{lorsque } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est indéfiniment différentiable, *i.e.* montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que f ne peut être représentée, dans aucun intervalle ouvert non vide centré à l'origine, sous forme d'une série entière convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Exercice 46. Calculer :

$$\int_{[0,1+i]} x\, dz, \qquad \int_0^{\pi} y\, d\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big) \qquad (\mathrm{R} > 0).$$

Exercice 47. Sur le cercle $C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - z_0| = r\}$ de rayon $r > 0$ centré en $z_0 \in \mathbb{C}$, calculer pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{C_r(z_0)} \big(z - z_0\big)^n\, dz.$$

Exercice 48. Avec $\mathrm{R} > 0$, soit C_{R}^+ le demi-cercle de diamètre $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ parcouru dans le sens trigonométrique. Vérifier que :

$$\int_{C_{\mathrm{R}}^+} e^z\, dz = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} e^x\, dx.$$

Exercice 49. Sur l'ellipse E de demi-axes $0 < a \leqslant b$ paramétrée par $\theta \longmapsto a \cos\theta + i\, b \sin\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, calculer :

$$\int_E |z|^2\, dz.$$

Exercice 50. Pour toute fonction continue g sur le cercle unité C paramétré par $\theta \longmapsto e^{i\theta}$, montrer que :

$$\overline{\int_C g(z)\, dz} = -\int_C \overline{g(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 51. Montrer que la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 - z}$ n'a pas de primitive dans l'ouvert :

$$\Omega := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ 0 < |z - 1| < 1\big\}.$$

Exercice 52. Soit γ une courbe lisse dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z(t)\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit γ^- la courbe orientée dans le sens inverse. Montrer que pour toute fonction continue f sur γ, on a :

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Exercice 53. Cet exercice a pour objectif de faire pénétrer plus avant dans la substance essentielle du théorème de Cauchy, qui sera traité en détail dans le chapitre suivant.

(a) Soit γ un cercle quelconque centré à l'origine $0 \in \mathbb{C}$, muni de l'orientation trigonométrique. Pour $n \in \mathbb{Z}$ entier relatif, évaluer l'intégrale :

$$\int_{\gamma} z^n\,dz.$$

(b) Traiter la même question, mais pour un cercle γ dont l'intérieur ne contient pas l'origine $0 \in \mathbb{C}$.

(c) Soit C_r le cercle de centre $0 \in \mathbb{C}$ et rayon $r > 0$, orienté dans le sens trigonométrique. Montrer que pour $|a| < r < |b|$, on a :

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = \frac{2i\pi}{a-b}.$$

Exercice 54. Soit f une fonction continue dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que deux primitives quelconques de f (s'il en existe) diffèrent toujours par une constante.

Exercice 55. Soit un rayon $\mathrm{R} > 0$, soit le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < \mathrm{R}\}$ centré en l'origine, et soit $f\colon \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est holomorphe. Ainsi, la dérivée complexe $z \longmapsto f'(z)$ est ici supposée continue.

Pour $0 < r < \mathrm{R}$, dans le sous-disque $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, pour $z \in \mathbb{D}_r$ quelconque fixé, *i.e.* pour $|z| < r$, on introduit les intégrales suivantes dépendant d'un paramètre réel $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$I(\lambda) := \int_0^{2\pi} \frac{f\big((1-\lambda)\,z + \lambda\,r\,e^{i\theta}\big) - f(z)}{r\,e^{i\theta} - z}\,r\,e^{i\theta}d\theta.$$

(a) Justifier que $\lambda \longmapsto I(\lambda)$ est continue sur $[0,1]$.

(b) Trouver $I(0)$.

(c) Justifier que pour tout $0 < \lambda \leqslant 1$, la dérivée $I'(\lambda)$ existe.

(d) Calculer $I'(\lambda)$ sur $]0,1]$.

(e) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta}) - f(z)}{r\,e^{i\theta} - z}\,r\,e^{i\theta}\,d\theta \;=\; 0.$$

(f) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\,e^{i\theta}}{r\,e^{i\theta} - z}\,d\theta \;=\; 2\pi.$$

Indication: Développer en série entière $1\big/\big(1 - \frac{z}{r\,e^{i\theta}}\big)$.

(g) Démontrer et justifier la formule suivante :

$$2\pi\,f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f\big(r\,e^{i\theta}\big)\,e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Indication: En appelant c_n le coefficient de $\frac{z^n}{r^n}$ ci-dessus, vérifier que :

$$|c_n| \;\leqslant\; 2\pi \sup_{|\zeta|=r} \big|f(\zeta)\big|.$$

(h) Montrer que toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ et $\mathscr{C}^1$ dans un disque $\Delta := \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| < \mathrm{R}\}$ est développable en série entière convergente :

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\big(z - z_0\big)^n \qquad {\scriptstyle (\forall\,|z-z_0|<\mathrm{R})},$$

avec des coefficients complexes donnés par :

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (n \geqslant 0).$$

(i) Obtenir la formule de Cauchy valable pour tous r et z avec $|z - z_0| < r < \mathrm{R}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\, e^{i\theta})}{z_0 + r\, e^{i\theta} - z}\, r\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

Théorèmes de Cauchy et applications

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les concepts de base pour la topologie sur $\mathbb{C}$, nous avons défini les fonctions holomorphes et nous avons montré comment les intégrer le long de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$. Le premier résultat remarquable de la *Théorie de Cauchy* exhibe des connexions profondes entre ces notions.

En effet, le *Théorème de Cauchy* énonce que si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et si $\gamma \subset \Omega$ est une courbe fermée simple dont la région intérieure $\gamma_{\mathsf{int}} \subset \Omega$ est contenue dans Ω, alors :

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,=\, 0.$$

De très nombreux résultats découleront de cette formule, et notamment la clé de voûte de tout l'édifice, le *Théorème des résidus* — véritable magie de l'holomorphie ! — qui va nous inviter à sa pêche interstellaire miraculeuse, nous, glaneurs de belles singularités résiduelles...

Un théorème célèbre de Jordan stipule en effet que le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\gamma$ consiste en exactement *deux* composantes connexes ouvertes γ_{int} et γ_{ext} avec la décomposition disjointe :

$$\mathbb{C} \,=\, \gamma_{\mathsf{int}} \cup \gamma \cup \gamma_{\mathsf{ext}},$$

celle qu'on nomme *intérieure* étant la seule dont l'adhérence dans $\mathbb{C}$ est compacte. Le théorème de Cauchy suppose donc, et c'est important, que cette adhérence compacte est entièrement contenue dans le domaine de définition :

$$\gamma_{\mathsf{int}} \cup \gamma \,\subset\, \Omega.$$

Toutefois, puisque la visualisation intuitive instantanée du théorème de Jordan est en décalage complet avec sa démonstration mathématique rigoureuse complète, laquelle est passablement longue et difficile, nous en admettrons l'énoncé, et ne le démontrerons que dans un chapitre spécialement dédié. En tout cas, pour toutes les courbes auxquelles nous aurons affaire dans ce chapitre, la détermination de l'intérieur et de l'extérieur de γ ne poseront aucun problème.

Une version initiale élémentaire de ce théorème de Cauchy suppose que la fonction possède une primitive dans Ω, au sens où cela a été défini dans le chapitre précédent. En fait, nous démontrerons que pour des contours élémentaires γ dont l'intérieur γ_{int} est contenu

dans Ω, les fonctions holomorphes ont des primitives, et alors le théorème de Cauchy deviendra tout aussi translucide que la formule fondamentale du calcul intégral réel :

$$\int_0^1 g'(x)\,dx \;=\; g(1) - g(0).$$

Dans la Nature (mathématique !), le contour essentiellement le plus simple possible est celui qui borde un triangle fermé $T \subset \Omega \subset \mathbb{C}$. L'existence de primitives pour les fonctions holomorphes découlera du *Théorème de Goursat*, lequel énonce que pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, on a l'annulation :

$$0 \;=\; \int_{\partial T} f(z)\,dz.$$

Il est absolument remarquable que ce sous-cas du théorème de Cauchy est le germe de tous les autres résultats plus avancés de la théorie de Cauchy. En plaçant des triangles orientés blottis les uns à côté des autres, nous allons en déduire, à la manière de carreleurs, l'existence de primitives dans un voisinage de γ_{int}, ainsi qu'une démonstration directe du théorème fondamental de Cauchy susmentionné.

Toutes ces idées séduisantes vont nous conduire par la main au résultat central de ce chapitre, la *Formule intégrale de Cauchy*. Sa version prototypique énonce que si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$, on retrouve les valeurs de la fonction en chaque point intérieur $z \in \Delta$ par l'intégration :

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Ensuite, des différentiations successives de cette identité nous fourniront une collection infinie de formules intégrales, dont découlera un théorème absolument fantastique montrant que les fonctions holomorphes sont *indéfiniment différentiables* — alors qu'elles n'étaient supposées qu'une seule fois $\mathbb{C}$-différentiables en tout point, même pas $\mathscr{C}^1$ au départ ! Ah oui certes, pour les fonctions de variable *réelle*, l'énoncé analogue est radicalement faux !

Pourquoi, alors, tout est si vrai, si beau, et si bon, dans le monde holomorphe ? Parce que la Magie, c'est, en Mathématique, l'Unité : tout, dans la théorie des fonctions holomorphes, s'entrelace : Analyse, Géométrie, Topologie, Algèbre, Calcul !

2. Théorème de Goursat

À la fin du chapitre précédent, nous avons démontré que si une fonction holomorphe f dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ y admet une primitive F, à savoir une fonction F telle que $F' = f$, alors :

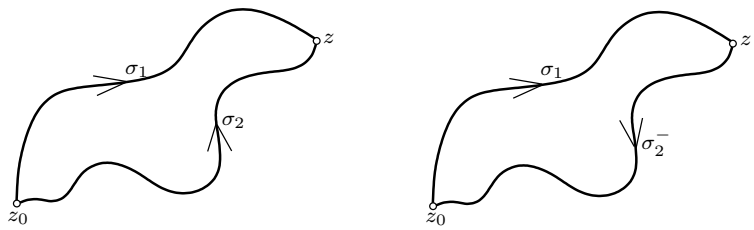
$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Omega$.

Réciproquement, si de telles annulations sont toujours satisfaites, une primitive existe pour f, car il suffit en effet de fixer un point $z_0 \in \Omega$, et de définir :

$$F_\sigma(z) := \int_{\sigma\colon\, z_0 \to z} f(z)\,dz,$$

cette intégrale étant prise le long de n'importe quelle courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux $\sigma\colon\, z_0 \longrightarrow z$ allant de z_0 à z contenue dans Ω, puisque la valeur *ne dépend alors pas de la courbe* !

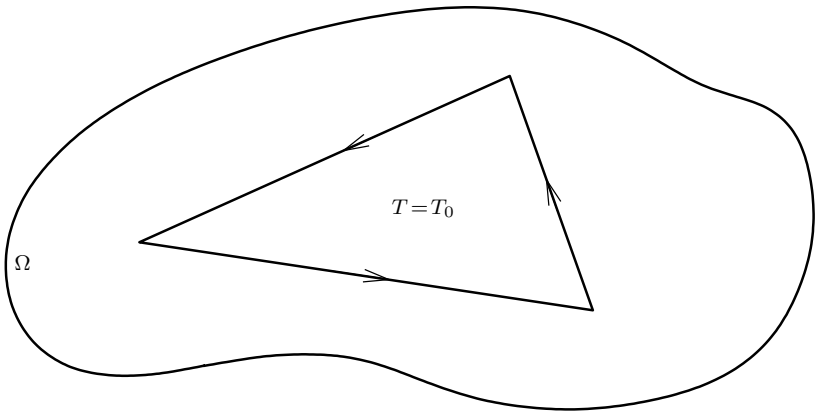


Effectivement, la différence entre deux valeurs :

$$\begin{aligned} F_{\sigma_2}(z) - F_{\sigma_1}(z) &= \int_{\sigma_1 \,:\, z_0 \to z} f(z)\, dz - \int_{\sigma_2 \,:\, z_0 \to z} f(z)\, dz \\ &= \int_{\sigma_1\, \sigma_2^-} f(z)\, dz \\ &= \int_{\substack{\text{courbe} \\ \text{fermée}}} f(z)\, dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

s'annule par hypothèse !

Notre point de départ sera le théorème suivant, dans lequel on ne suppose pas l'existence d'une primitive, mais où l'on se restreint d'abord à des figures géométriques simples. Classiquement, on note $\mathscr{O}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.



Théorème 2.1. [de Goursat] *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un sous-ensemble ouvert, et si $T = \overline{T} \subset \Omega$ est un triangle euclidien fermé 2-dimensionnel entièrement contenu dans Ω dont le bord ∂T est constitué de trois segments orientés, alors :*

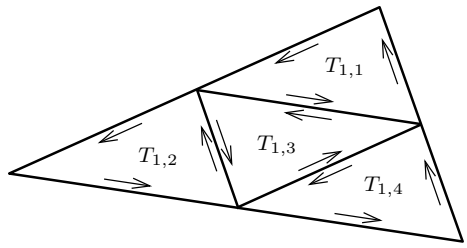
$$0 = \int_{\partial T} f(z)\, dz,$$

pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Constamment, nous choisirons l'orientation trigonométrique directe.

Démonstration. Appelons $T_0 := T$ notre triangle. Lorsqu'il est aplati, l'énoncé est trivial — pourquoi ? Lorsqu'il n'est pas aplati, nous allons le disséquer indéfiniment — oui, sans pitié !

Notons d_0 le diamètre de T_0 et p_0 son périmètre. Relions les trois milieux de ses trois côtés.



Quatre triangles en similitude apparaissent — notons-les $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}, T_{1,4}$. Orientons-les dans le sens trigonométrique direct. Deux côtés adjacents appartenant à deux triangles distincts sont orientés de manière opposée.

Par conséquent, des annihilations d'intégrales sur paires de segments orientés inverses permettent d'écrire (exercice) :

$$\int_{\partial T_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{\partial T_{1,1}} f(z)\,dz + \int_{\partial T_{1,2}} f(z)\,dz + \int_{\partial T_{1,3}} f(z)\,dz + \int_{\partial T_{1,4}} f(z)\,dz,$$

ce qu'on peut abréger en :

$$I_0 \;=\; I_{1,1} + I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4}.$$

Affirmation 2.2. *Il existe un indice* $1 \leqslant i \leqslant 4$ *tel que :*

$$\left|\int_{\partial T_0} f(z)\,dz\right| \;\leqslant\; 4\left|\int_{\partial T_{1,i}} f(z)\,dz\right|.$$

Preuve. Sinon, si on avait pour tous $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{1}{4}\left|\int_{\partial T_0} f(z)\,dz\right| \;>\; \left|\int_{\partial T_{1,i}} f(z)\,dz\right|,$$

une inégalité triangulaire à 4 termes conduirait à l'absurdité :

$$\begin{aligned} 4\cdot\frac{1}{4}\left|I_0\right| \;&>\; \left|I_{1,1}\right| + \left|I_{1,2}\right| + \left|I_{1,3}\right| + \left|I_{1,4}\right| \\ \text{[Inégalité triangulaire]} \qquad &\geqslant\; \left|I_0\right|. \end{aligned}$$

□

Sélectionnons un triangle $T_{1,i}$ qui satisfait cette inégalité, puis renommons-le T_1. Puisqu'il est homothétique de rapport $\frac{1}{2}$ à partir de T_0, son diamètre d_1 et son périmètre p_1 valent :

$$d_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\,d_0 \qquad \text{et} \qquad p_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\,p_0.$$

Itérons ce procédé en décomposant T_1 en quatre triangles $T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3}, T_{2,4}$, sélectionnons l'un d'entre eux, redécomposons-le, resélectionnons, et ainsi de suite. Nous construisons ainsi une suite infinie de triangles fermés emboîtés les uns dans les autres :

$$T_0 \;\supset\; T_1 \;\supset\; \cdots \;\supset\; T_n \;\supset\; \cdots$$

de diamètres et de périmètres tendant vers 0 comme :

$$d_n \;=\; \tfrac{1}{2^n}\,d_0 \qquad \text{et} \qquad p_n \;=\; \tfrac{1}{2^n}\,p_0,$$

de telle sorte qu'ils satisfont les inégalités :

$$\left|\int_{\partial T_0} f(z)\,dz\right| \;\leqslant\; 4^n\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right|.$$

Alors d'après un théorème connu de topologie, cette suite de compacts emboîtés $T_{n+1} \subset T_n \subset \mathbb{C}$ de diamètres tendant vers 0 converge vers un unique point du plan :

$$z_0 \,:=\, \bigcap_{n \geqslant 0} T_n.$$

Maintenant — enfin vient l'hypothèse principale ! —, comme f est holomorphe en z_0, nous pouvons écrire :

$$f(z) \,=\, f(z_0) + f'(z_0)\,\big(z - z_0\big) + \psi(z)\,\big(z - z_0\big),$$

avec une fonction-reste satisfaisant $\psi(z) \longrightarrow 0$ lorsque $z \longrightarrow z_0$. Or comme les premiers termes affines $f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)$ possèdent la primitive holomorphe évidente :

$$f(z_0)\,\big(z - z_0\big) + \tfrac{1}{2}\,f'(z_0)\,\big(z - z_0\big)^2,$$

un énoncé vu au chapitre précédent et rappelé dans l'introduction nous offre, pour tout $n \geqslant 0$, l'annulation de leur intégrale sur ∂T_n, donc il ne reste plus que :

$$\int_{\partial T_n} f(z)\,dz \,=\, 0 + 0 + \int_{\partial T_n} \psi(z)\,\big(z - z_0\big)\,dz \qquad (n \geqslant 0).$$

Dans ces intégrales, z_0 appartient au triangle fermé T_n et z se promène sur son bord ∂T_n, d'où :

$$\big|z - z_0\big| \,\leqslant\, d_n \,=\, \tfrac{1}{2^n}\,d_0.$$

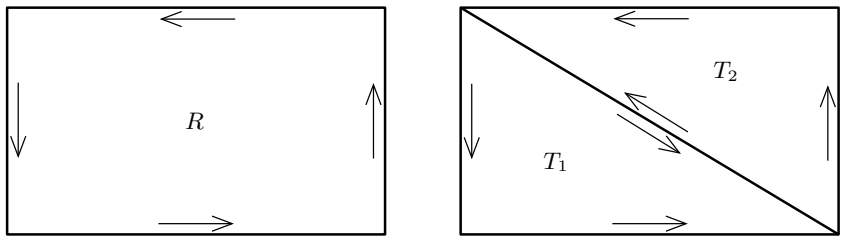
Comme le diamètre de T_n tend vers zéro :

$$\varepsilon_n \,:=\, \sup_{z \in T_n} \big|\psi(z)\big| \,\underset{n \to \infty}{\longrightarrow}\, 0.$$

Toutes ces estimations nous permettent enfin d'exprimer la synthèse terminale sous la forme d'un calcul vertical conclusif :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial T_0} f(z)\,dz\right| &\leqslant 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \\
&= 4^n \left|\int_{\partial T_n} \psi(z)\,\big(z - z_0\big)\,dz\right| \\
&\leqslant 4^n\,\varepsilon_n\,d_n\,p_n \\
&= 4^n\,\varepsilon_n\,\tfrac{d_0}{2^n}\,\tfrac{p_0}{2^n} \\
&= \varepsilon_n\,d_0\,p_0 \,\underset{n \to \infty}{\longrightarrow}\, 0.
\end{aligned}$$

□



Corollaire 2.3. *Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui contient un rectangle fermé $R = \overline{R} \subset \Omega$, alors :*

$$0 \,=\, \int_{\partial R} f(z)\,dz.$$

Preuve. C'est immédiat, puisque nous pouvons découper en deux triangles ce rectangle le long d'une de ses diagonales, et constater que :

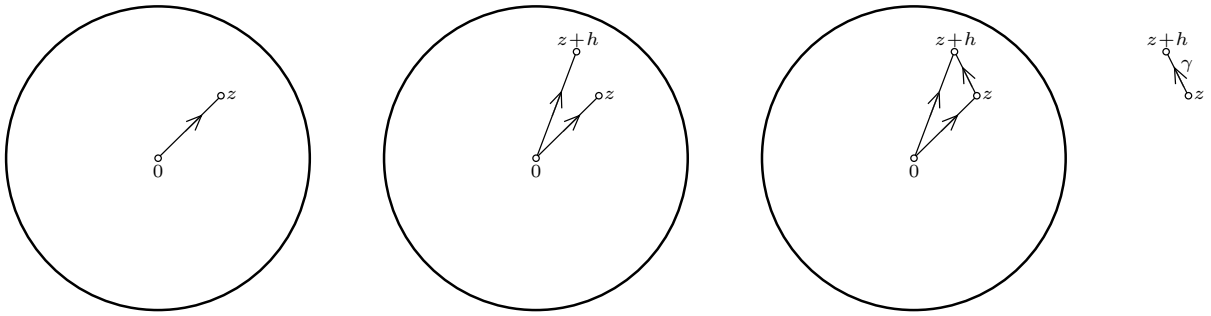
$$\int_{\partial R} f(z)\,dz \;=\; \int_{\partial T_1} f(z)\,dz + \int_{\partial T_2} f(z)\,dz \;=\; 0+0. \qquad \square$$

3. Existence locale de primitives et théorèmes de Cauchy dans des disques

Une première conséquence du théorème de Goursat est l'existence de primitives dans la situation géométrique la plus simple possible.

Théorème 3.1. [Cauchy 1] *Une fonction $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ holomorphe dans un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$ y possède toujours une primitive holomorphe $F \in \mathscr{O}(\Delta)$ avec $F' = f$.*

Démonstration. Après une translation, nous pouvons supposer que ce disque $\Delta \ni 0$ est centré à l'origine.



Pour $z \in \Delta$ quelconque, en notant $[0,z]$ le segment fermé allant de 0 à z, lequel est visiblement contenu dans Δ, intégrons :

$$F(z) \;:=\; \int_{[0,z]} f(\zeta)\,d\zeta,$$

pour définir de manière inambiguë une fonction $F\colon \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$, et vérifions que F est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point, de dérivée $F' = f$.

Avec $h \in \mathbb{C}$ assez petit pour que $z+h \in \Delta$, exprimons donc la différence :

$$F(z+h) - F(z) \;=\; \int_{[0,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[0,z]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Mais n'y aurait-il pas un triangle à la Goursat pour simplifier tout cela ?

Oui, car par convexité de Δ, le troisième segment $[z, z+h]$ est contenu dans Δ, tout aussi bien que le triangle fermé de sommets 0, z, $z+h$, et alors grâce à Goursat (exercice visuel) :

$$F(z+h) - F(z) \;=\; \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta,$$

où l'on a, pour désalourdir, abrégé $\gamma := [z, z+h]$.

Or puisque $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est $\mathbb{C}$-différentiable, donc continue, nous pouvons écrire :

$$f(\zeta) \;=\; f(z) + \psi(\zeta),$$

avec une fonction-reste $\psi(\zeta) \longrightarrow 0$ lorsque $\zeta \longrightarrow z$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_\gamma f(z)\, d\zeta + \int_\gamma \psi(\zeta)\, d\zeta \\ &= f(z) \int_\gamma 1\, d\zeta + \int_\gamma \psi(\zeta)\, d\zeta \\ &= f(z)\, h + \int_\gamma \psi(\zeta)\, d\zeta, \end{aligned}$$

et comme la fonction constante 1 possède la primitive holomorphe évidente ζ, un théorème vu au chapitre qui précéde montre que la première intégrale vaut h.

Mais alors en majorant le deuxième terme par :

$$\Big| \int_\gamma \psi(\zeta)\, d\zeta \Big| \leqslant \sup_{\zeta \in \gamma} \big|\psi(\zeta)\big|\, |h|,$$

nous concluons sans effort :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= f(z) + \lim_{h \to 0} \sup_\gamma \big|\psi(\zeta)\big| \\ &= f(z). \end{aligned}$$

□

Ce Théorème 3.1 implique donc que les fonctions holomorphes dans un ouvert quelconque $\Omega \subset \mathbb{C}$ possèdent toujours des primitives *locales*, c'est-à-dire définies dans des disques $\Delta \subset \Omega$. La suite des événements mathématiques va montrer que ce théorème est non seulement vrai pour des disques, mais aussi pour beaucoup de régions ayant d'autres formes, et c'est là que Géométrie et Topologie vont s'inviter sans prévenir chez Dame Analyse.

Théorème 3.2. [Cauchy 2] *Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ est holomorphe dans un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, alors :*

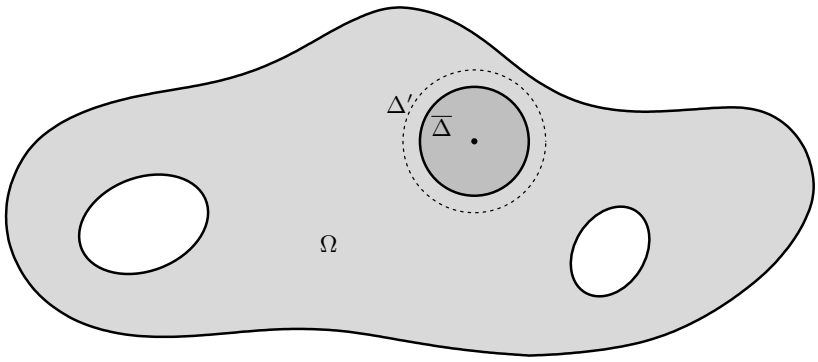
$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta,$$

pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Delta$.

Preuve. Puisque f possède une primitive $F \in \mathscr{O}(\Delta)$, avec $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ satisfaisant $\gamma(0) = \gamma(1)$, un théorème du chapitre qui précède — mobilisation mentale ! — s'applique directement :

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = F\big(\gamma(1)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = 0.$$

□



Théorème 3.3. [Cauchy 3] *Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset C \cup \Delta$ contenant un cercle C ainsi que son disque intérieur Δ, alors :*

$$0 = \int_C f(\zeta)\, d\zeta.$$

Preuve. Puisqu'il existe un disque ouvert intercalé :

$$C \cup \Delta = \overline{\Delta} \subset \Delta' \subset \Omega,$$

le théorème précédent s'applique immédiatement à la courbe $\gamma := C$ — trop facile ! □

4. Contours élémentaires

Au-delà des cercles, nous commençons à avoir l'intuition que pour des fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ définies dans des voisinages ouverts de contours élémentaires fermés simples Γ :

$$\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}},$$

lesquels bordent un ouvert borné Γ_{int} d'après le théorème de Jordan (admis temporairement), on doit encore avoir :

$$0 = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

Mais attention ! Il est important de supposer que :

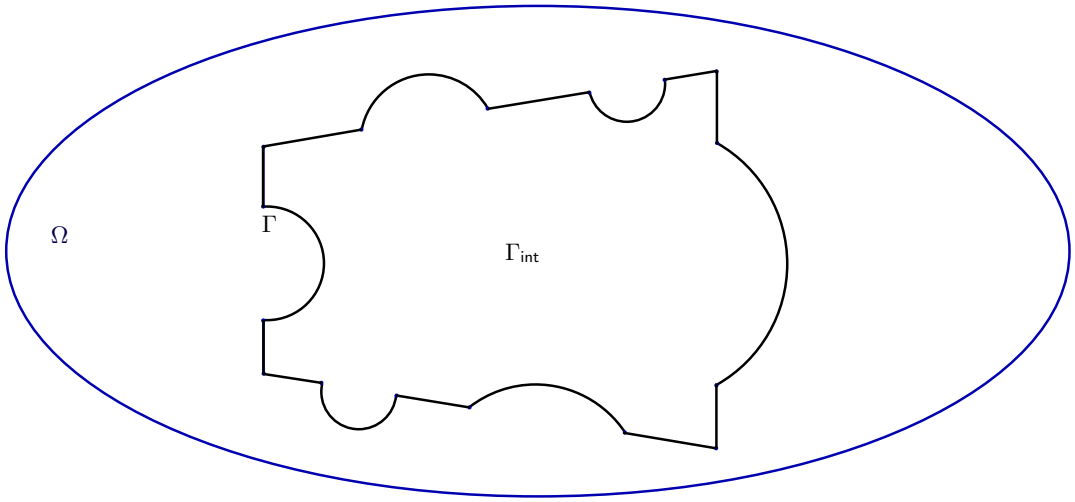
- Γ est une courbe fermée simple (au moins $\mathscr{C}^1$ par morceaux) ;
- $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$;

car sinon, l'intégrale en question peut être *non* nulle, à cause de singularités éventuelles de f dans Γ_{int}.

Exemple 4.1. En revenant à un exemple discuté à la fin du chapitre précédent, soit la fonction $f(z) := \frac{1}{z}$, holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, soit le disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ à bord le cercle unité $\partial\mathbb{D} := \{|z| = 1\}$. Ici évidemment, $\big[\partial\mathbb{D}\big]_{\mathsf{int}} = \mathbb{D}$, mais f n'est *pas* holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$, et d'ailleurs, son intégrale sur $\partial\mathbb{D}$ ne vaut *pas* zéro :

$$0 \neq 2i\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\, dz. \qquad \square$$

Ainsi, dans le théorème de Cauchy, il est crucial que Γ_{int} ne contienne aucune singularité de f. À l'avance, énonçons-en une version très générale, que nous ne démontrerons que dans un chapitre spécialement dédié. Rappelons que l'image d'un compact par une application continue est toujours un compact, donc une courbe de la forme $\Gamma = z\big([0,1]\big)$ avec $z \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, est toujours compacte.



Théorème 4.2. [Jordan, Cauchy 4] *Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe fermée simple $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$, alors :*

$\mathbb{C}\backslash\Gamma \;=\; \Gamma_{\mathsf{int}} \cup \Gamma_{\mathsf{ext}}$ *consiste en exactement deux composantes connexes ouvertes ;*

$\overline{\Gamma_{\mathsf{int}}} \;=\; \Gamma_{\mathsf{int}} \cup \Gamma \;=$ *compact* $=$ *fermé-borné ;*

$\overline{\Gamma_{\mathsf{ext}}} \;=\; \Gamma_{\mathsf{ext}} \cup \Gamma \;=$ non *compact.*

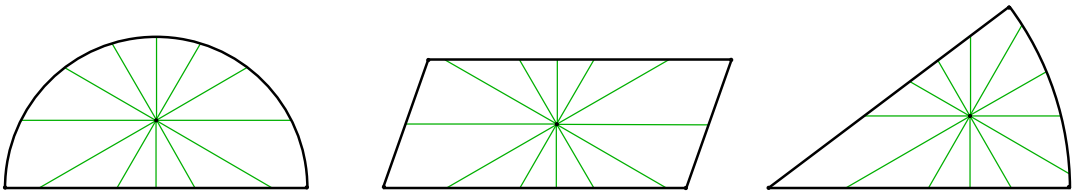
De plus, pour toute fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma_{\mathsf{int}} \cup \Gamma$ qui contient l'adhérence de la composante relativement compacte Γ_{int}, on a :

$$0 \;=\; \int_{\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Contentons-nous, ici, de vérifier ce théorème pour des contours élémentaires, « peu compliqués » sur le plan géométrique.

Définition 4.3. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *étoilé* en l'un de ses points $z_0 \in \Omega$ si, pour tout point $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z] \subset \Omega$ est contenu en lui. On dira que Ω est *étoilé* s'il est étoilé en au moins un point.

Dans ce cas, la topologie est assez simple. Donnons trois exemples d'ouverts étoilés, qui sont en fait convexes.



Définition 4.4. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *convexe* si, pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$, le segment $[z_1, z_2] \subset \Omega$ est contenu en lui.

On vérifie (exercice) qu'un ouvert convexe est étoilé en chacun de ses points.

Théorème 4.5. [Cauchy étoilé] *Dans un ouvert étoilé $\Omega \subset \mathbb{C}$, les deux propriétés suivantes sont vraies.*

(1) *Toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ possède une primitive holomorphe $F \in \mathscr{O}(\Omega)$, c'est-à-dire avec $F' = f$.*

(2) *Pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Omega$ qui est $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$, on a :*

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

En particulier, si $\Gamma \subset \Omega$ est un contour fermé simple $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ avec $\Gamma_{\mathsf{int}} \subset \Omega$, alors $0 = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta$.

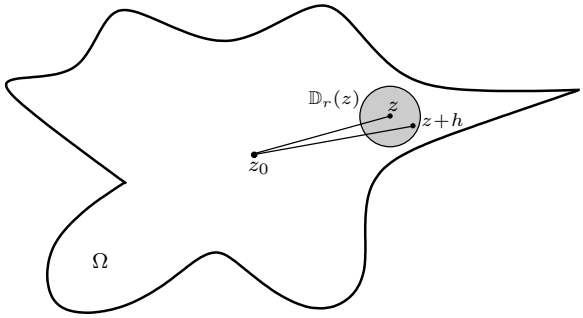
Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ un point en lequel Ω est étoilé. En un point quelconque $z \in \Omega$, définissons en intégrant sur un segment :

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

cette intégrale ayant un sens, puisque $[z_0, z] \subset \Omega$. Fixons $z \in \Omega$, prenons $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$, et regardons les quotients différentiels :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h},$$

pour $z + h \in \mathbb{D}_r(z)$, c'est-à-dire pour $|h| < r$.



Comme Ω est étoilé, $[z_0, z+h] \subset \Omega$, et même, le triangle fermé tout entier de sommets z_0, z, $z+h$ est contenu dans Ω (exercice mental). Le théorème de Goursat donne alors :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

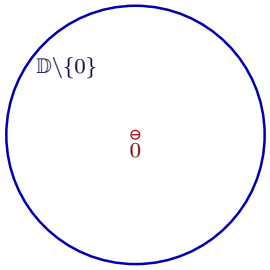
et ensuite, le même argument que dans la démonstration du Théorème 3.1 montre l'existence de :

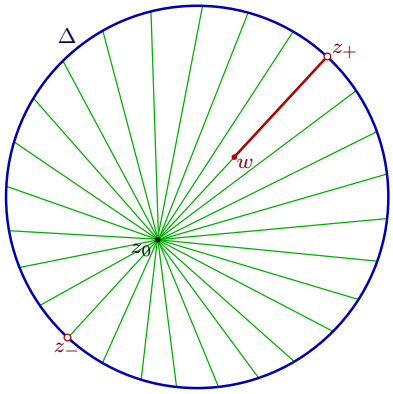
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Enfin, nous avons déjà vu que l'existence d'une primitive donnait gratuitement **(2)**. $\square$

Le plan complexe épointé $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est étoilé en aucun de ses points, sinon, s'il l'était, le Théorème 4.5 **(2)** précédent, appliqué à la fonction $f(\zeta) := \frac{1}{\zeta}$, intégrée sur le cercle unité $z(t) := e^{2i\pi t}$, contredirait l'Exemple 4.1.

Mieux encore, il est préférable de se convaincre visuellement que ni $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, ni $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ ne sont étoilés. Pour les rendre étoilés, il faut en fait retrancher (beaucoup) plus qu'un seul point.





Exemple 4.6. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide, soit un diamètre :

$$\big[z_-, z_+\big] \subset \overline{\Delta},$$

avec $z_-, z_+ \in \partial\Delta$, et soit un point quelconque :

$$w \in \big]z_-, z_+\big[.$$

Alors l'ouvert :

$$\Omega := \Delta\backslash\big[w, z_+\big[,$$

est étoilé (exercice visuel) en chaque point :

$$z_0 \in \big]z_-, w\big[,$$

et n'est étoilé en aucun autre point (exercice supplémentaire).

Dans la suite, nous aurons besoin d'une version-clé du théorème de Cauchy :

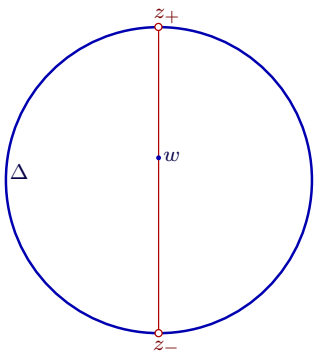
$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(\zeta)\, d\zeta,$$

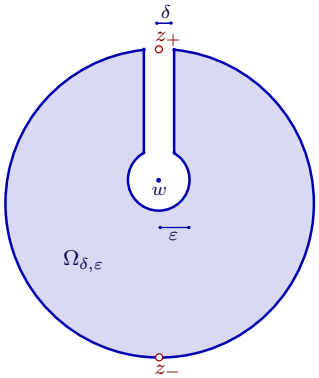
pour une sorte d'« *épaississement* » d'un tel segment $[w, z_+[\subset \Delta$, le long d'un contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ qui ressemble à la section d'un trou de serrure, que nous allons commencer à définir comme suit.

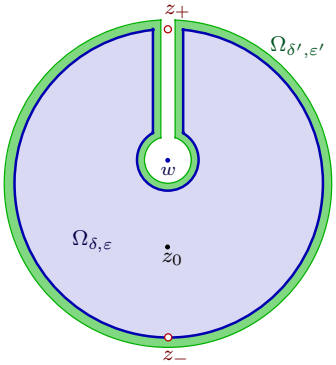
Soit donc $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide, soit un point quelconque $w \in \Delta$ distinct du centre, et soit le diamètre unique $]z_-, z_+[\ni w$ de Δ avec $z_-, z_+ \in \partial\Delta$; quand w est le centre de Δ, on choisit un diamètre quelconque de Δ.

Soient aussi deux nombres réels :

$$0 < \delta < \varepsilon \ll \mathsf{rayon}(\Delta).$$







Comme sur la figure, soit $\mathbb{D}_\varepsilon(w)$ le disque ouvert de rayon $\varepsilon > 0$ centré en w, et soit le tunnel ou canal de largeur étroite $2\,\delta$ autour du segment $[w, z_+[$. Nous construisons ainsi un certain ouvert $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ qui est l'intérieur de Jordan évident de son bord :

$$\Gamma_{\delta,\varepsilon} \;:=\; \partial\Omega_{\delta_\varepsilon},$$

lequel consiste en une courbe fermée simple $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$. Pour la suite, il ne sera pas nécessaire de préciser explicitement une paramétrisation de cette courbe $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$, donc nous nous en dispenserons.

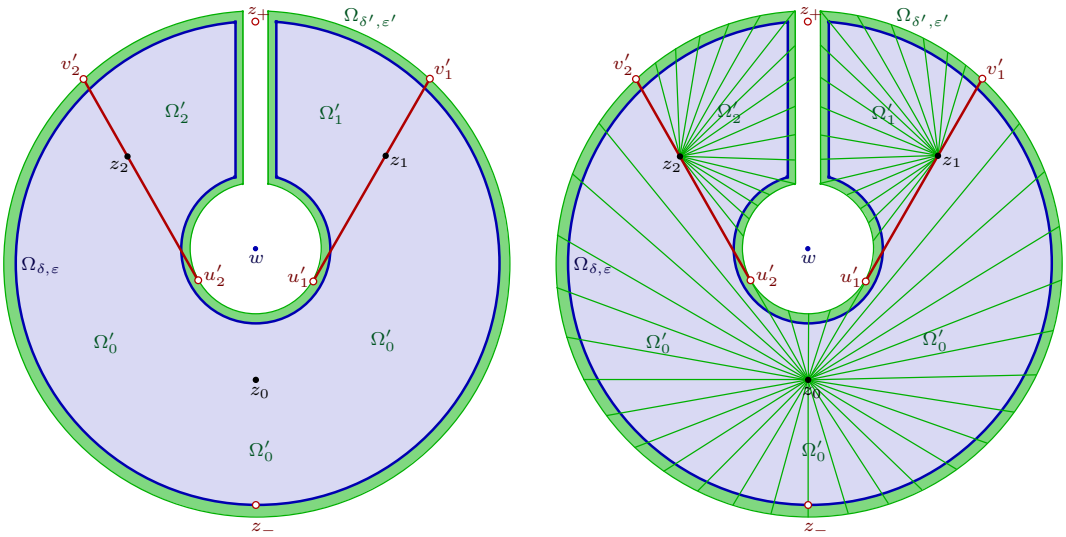
Ensuite, soit $\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta,\varepsilon}}$ un ouvert quelconque, non dessiné. Comme sur la figure, nous pouvons « *épaissir* légèrement » l'ouvert $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ en un sur-ouvert $\Omega_{\delta',\varepsilon'}$ toujours contenu dans Ω :

$$\Omega \;\supset\; \overline{\Omega_{\delta',\varepsilon'}} \;\supset\; \Omega_{\delta',\varepsilon'} \;\supset\; \overline{\Omega_{\delta,\varepsilon}} \;\supset\; \Omega_{\delta,\varepsilon},$$

associé, par exemple, à des quantités toujours très petites :

$$0 \;<\; \delta' \;<\; \delta \;<\; \varepsilon' \;<\; \varepsilon \;\ll\; \mathsf{rayon}(\Delta),$$

avec $\delta' \approx \delta$ très proche de δ, et avec $\varepsilon' \approx \varepsilon$ également.



Théorème 4.7. [Cauchy 5, Trou de Serrure, Clé du Ciel] *Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta,\varepsilon}}$, on a :*

$$0 \;=\; \int_{\partial\Omega_{\delta,\varepsilon}} f(\zeta)\,d\zeta.$$

En première lecture, il est conseillé d'admettre cet énoncé, et de passer directement à la Section **5** suivante.

Démonstration. Il suffit de trouver une primitive holomorphe $F' = f$ dans $\Omega_{\delta',\varepsilon'} \supset \partial\Omega_{\delta,\varepsilon}$.

Ainsi, choisissons un léger épaississement $\Omega_{\delta',\varepsilon'}$ de $\Omega_{\delta,\varepsilon}$. Prenons un point :

$$z_0 \;\in\; \big]z_-, w\big[\setminus \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon(w),$$

proche du milieu de ce segment. À cause du disque excisé autour de w, l'ouvert $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ n'est *pas* étoilé en z_0, mais soyons astucieux !

Soit le sous-disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon'}(w) \subset \mathbb{D}_{\varepsilon}(w)$. En partant de z_0, traçons les deux demi-droites qui lui sont tangentes, et pointons les deux points de tangence :

$$u_1' \in \partial\mathbb{D}_{\varepsilon'}(w) \qquad \text{et} \qquad u_2' \in \partial\mathbb{D}_{\varepsilon'}(w),$$

ainsi que les deux points d'intersection avec le bord de l'ouvert trou de serrure épaissi, qui sont situés au-delà :

$$v_1' \in \partial\Omega_{\delta',\varepsilon'} \qquad \text{et} \qquad v_2' \in \partial\Omega_{\delta',\varepsilon'}.$$

Les deux segments ouverts correspondants sont alors contenus dans cet ouvert :

$$\big]u_1',\, v_1'\big[\subset \Omega_{\delta',\varepsilon'} \qquad \text{et} \qquad \big]u_2',\, v_2'\big[\subset \Omega_{\delta',\varepsilon'}.$$

Prenons aussi deux points :

$$z_1 \in \big]u_1',\, v_1'\big[\qquad \text{et} \qquad z_2 \in \big]u_2',\, v_2'\big[,$$

proches des milieux de ces segments. Visiblement, ces deux segments décomposent $\Omega_{\delta',\varepsilon'}$ en trois composantes connexes ouvertes :

$$\Omega_0' \ni z_0, \qquad \Omega_1' \ni z_1, \qquad \Omega_2' \ni z_2,$$

à savoir :

$$\Omega_{\delta',\varepsilon'} = \Omega_0' \cup \Omega_1' \cup \Omega_2' \cup \big]u_1',\, v_1'\big[\cup \big]u_2',\, v_2'\big[.$$

Maintenant, définissons les valeurs de la primitive recherchée F de f en tous les points $z \in \Omega_{\delta',\varepsilon'}$, donc en particulier, en tous les points $z \in \Gamma_{\delta,\varepsilon} \subset \Omega_{\delta',\varepsilon'}$ du contour d'intégration qui nous intéresse, comme suit.

- Pour $z \in \Omega_0' \cup \,]u_1', v_1'[\, \cup \,]u_2', v_2'[$, intégrons simplement le long d'un segment droit :

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Observons que pour $z \in \,]u_1', v_1'[$ ou pour $z \in \,]u_2', v_2'[$, le segment sur lequel on intègre passe par le point $u_1' \notin \Omega_{\delta',\varepsilon'}$ ou par le point $u_2' \notin \Omega_{\delta',\varepsilon'}$, mais en ces points, f est quand même définie, puisque $\Omega \supset \overline{\Omega}_{\delta',\varepsilon'}$, par hypothèse. Observons aussi que Ω_0' est, intentionnellement, étoilé en z_0.

- Pour $z \in \Omega_1'$, passons d'abord par z_1 :

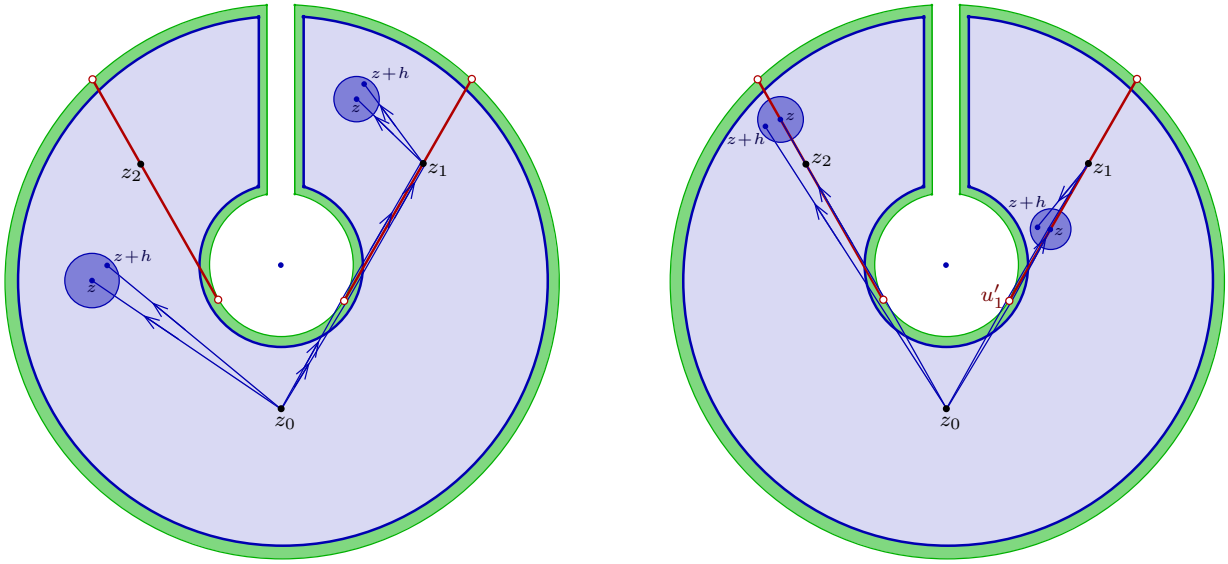
$$F(z) := \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Observons que pour tout $z \in \Omega_1'$, le segment $]z_1, z] \subset \Omega_1'$ est contenu dans Ω_1', puisque z_1 n'a pas été choisi trop proche du disque $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon'}(w)$.

- Symétriquement, pour $z \in \Omega_2'$, passons d'abord par z_2 :

$$F(z) := \int_{[z_0,z_2]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_2,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Ainsi, F est définie partout dans $\Omega_{\delta',\varepsilon'}$, uniquement et sans ambiguïté.



Assertion 4.8. *En tout point $z \in \Omega_{\delta',\varepsilon'}$, on a pour tous $h \in \mathbb{C}$ assez petits avec $[z, z+h] \subset \Omega_{\delta',\varepsilon'}$:*

$$F(z+h) - F(z) \;=\; \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Démonstration. Quand $z \in \Omega_0'$, pour tout $h \in \mathbb{C}$ suffisamment petit, *i.e.* pour $|h| < r$ avec $r > 0$ petit, on a $z + h \in \Omega_0'$, et même, tout le triangle fermé de sommets z_0, z, $z + h$ est contenu dans Ω_0', donc le Théorème 2.1 de Goursat donne bien :

$$F(z+h) - F(z) \;=\; \int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta \;=\; \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Quand $z \in \Omega_1'$ — et symétriquement aussi quand $z \in \Omega_2'$ —, pour $|h| < r$ avec $r > 0$ assez petit, d'où $z + h \in \Omega_1'$ encore, on calcule :

$$F(z+h) - F(z) \;=\; \underline{\int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\, d\zeta} + \int_{[z_1,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \underline{\int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\, d\zeta} - \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

[Goursat !] $$= \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

puisque le triangle de sommets z_1, z, $z + h$ est toujours contenu dans $\Omega_1' \cup \{z_1\}$.

Mais que se passe-t-il lorsque $z \in]u_1', v_1'[$ — et symétriquement aussi lorsque $z \in]u_2', v_2'[$ — ?

Visiblement, $z + h$ peut se trouver de l'un, ou de l'autre côté de la « frontière rouge » (mexicaine ?).

• Premier cas : si $z + h \in \Omega_0' \cup]u_2', v_2'[$ avec $|h| < r$ petit, alors le triangle fermé de sommets z_0, z, $z + h$ est encore contenu dans $\overline{\Omega_{\delta',\varepsilon'}} \subset \Omega$ où f est holomorphe, donc :

$$F(z+h) - F(z) \;=\; \int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

[Goursat !] $$= \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

• Deuxième cas : si $z+h \in \Omega_1'$ avec $|h| < r$ petit, alors on calcule :

$$\begin{aligned}
F(z+h) - F(z) &= \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\
&= \underline{\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta} + \int_{[z,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - \underline{\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta} \\
&= \int_{[z,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta \\
\text{[Goursat !]} \qquad &= \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta,
\end{aligned}$$

parce que le triangle fermé de sommets z, z_1, $z+h$ est toujours contenu dans $\Omega_1' \cup \,]u_1', v_1'[$ où f est holomorphe. □

Grâce à cette formule intégrale pour la différence, nous concluons comme précédemment que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z). \qquad \square$$

Avant d'appliquer ce Théorème 4.7, illustrons la méthode de calcul d'intégrales complexes dans quelques cas spectaculaires.

5. Exemples de calculs d'intégrales réelles par la méthode complexe

Commençons par démontrer la formule sympathique :

$$e^{-\pi\,\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2i\pi\xi x}\,dx,$$

valable pour tout nombre réel $\xi \in \mathbb{R}$. Ceci nous fournira une nouvelle démonstration du fait remarquable, déjà vu dans le cours d'*Analyse de Fourier*, que la fonction gaussienne $e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier.

Pour $\xi = 0$, cette formule est précisément l'intégrale connue :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

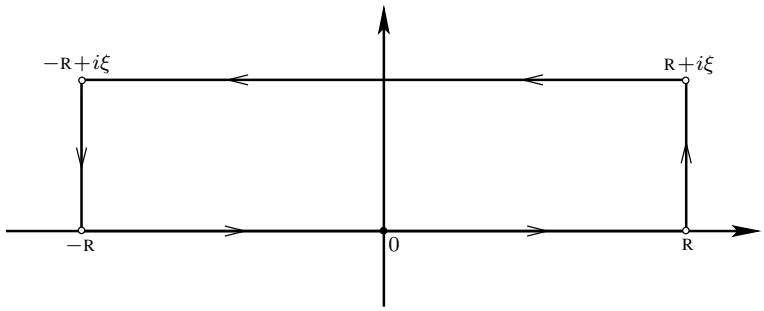
qui se démontre fort astucieusement en en prenant le carré et en passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\Big)^2 &= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy\Big)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx\,dy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}\,r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\infty} 2\pi\,e^{-\pi\,r^2}\,r\,dr\\ &= \Big[-\,e^{-\pi\,r^2}\Big]_0^{\infty}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Pour fixer les idées, supposons maintenant que $\xi > 0$, et introduisons la fonction de variable complexe :

$$f(z) := e^{-\pi z^2},$$

qui est holomorphe *entière*, c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.



En particulier, pour tout $\mathrm{R} > 0$, cette fonction est holomorphe dans le voisinage ouvert $\mathbb{C}$ du rectangle fermé ayant pour quatre sommets $-\mathrm{R}$, R, $\mathrm{R} + i\,\xi$, $-\mathrm{R} + i\,\xi$. Notons γ_{R} son bord, orienté dans le sens trigonométrique direct. Le Théorème 4.5 de Cauchy étoilé donne :

$$0 = \int_{\gamma_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz.$$

Des quatre morceaux en lesquels se découpe cette intégrale, le premier est simplement :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

et il converge donc vers 1 lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Le deuxième morceau est l'intégrale sur le segment vertical à droite :

$$I_{\mathrm{R}} := \int_0^{\xi} f\big(\mathrm{R} + i\,y\big)\,i\,dy = \int_0^{\xi} e^{-\pi(\mathrm{R}^2+2i\,\mathrm{R}y-y^2)}\,i\,dy.$$

Or par chance cette intégrale tend vers 0 lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, puisque nous pouvons l'estimer (exercice visuel) par :

$$\big|I_{\mathrm{R}}\big| \leqslant \xi\,e^{-\pi\mathrm{R}^2+\pi\xi^2},$$

sachant que ξ, ici, est fixé. De manière similaire, l'intégrale sur le segment vertical à gauche tend aussi vers 0 lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Enfin, l'intégrale sur le segment horizontal surélevé ressemble fort à celle qui nous intéresse :

$$\int_{\mathrm{R}}^{-\mathrm{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx \;=\; -\, e^{\pi\xi^2} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} e^{-\pi x^2}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

Finalement, en prenant donc la limite pour $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$ dans l'identité de Cauchy écrite plus haut, nous obtenons :

$$0 \;=\; 1 + 0 - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx + 0,$$

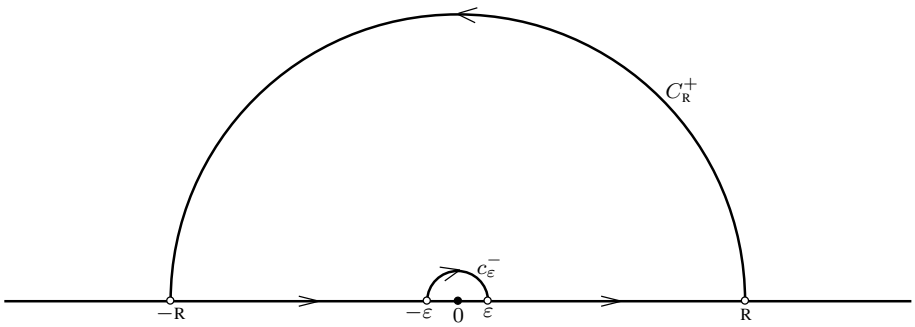
ce qui est la formule annoncée dans le cas où $\xi > 0$ — évidemment, le cas $\xi < 0$ se traite de la même manière avec des rectangles situés en-dessous de l'axe des abscisses.

Cette technique de déplacement et de création de contours qui tendent en partie vers l'infini possède de très nombreuses applications. Observons que nous avons surélevé, dans le plan complexe, le lieu d'intégration réelle $]-\infty, \infty[$, utilisé ensuite le théorème de Cauchy, et fait voir que certaines contributions s'évanouissaient.

Les plus beaux exercices d'Analyse Complexe font découvrir de multiples exemples d'intégrales qu'il semble impossible de calculer en recherchant des changements de variables astucieux, mais qui deviennent simples et transparentes quand on s'autorise à prendre son envol vers l'imaginaire.

Voici alors un autre exemple, classique :

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$$



Pour atteindre cette formule, introduisons la fonction de variable complexe holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$f(z) \;:=\; \frac{1 - e^{iz}}{z^2},$$

et intégrons-la sur le bord d'un grand demi-disque posé à plat sur l'axe des abscisses, tout en le perforant un peu en son centre afin d'éviter la singularité $z = 0$ de $f(z)$. Notons donc c_{ε}^{-} le petit demi-cercle de rayon $\varepsilon > 0$ *orienté négativement*, ainsi que C_{R}^{+} celui de grand rayon $\mathrm{R} > 0$ orienté positivement.

Dans ce contexte, une adaptation du Théorème 4.7 de Cauchy discuté dans les précédents paragraphes offre alors aussi l'annulation de l'intégrale de f le long de ce contour :

$$0 \,=\, \int_{-\mathrm{R}}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz + \int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \underbrace{\int_{C_\mathrm{R}^+} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz}_{\substack{\longrightarrow \\ \mathrm{R}\to\infty}\, 0}.$$

Commençons ici, via l'estimée :

$$\left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right| \leqslant \frac{2}{|z|^2},$$

par observer que la dernière intégrale, majorée en module par $\frac{2}{\mathrm{R}^2}\,\pi\mathrm{R}$, s'évanouit lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$. Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx \,=\, -\int_{c_\varepsilon^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz.$$

Ensuite par développement limité, nous avons :

$$f(z) \,=\, \frac{-i}{z} + g(z),$$

avec une fonction-reste $g(z)$ lisse, donc bornée près de l'origine. Paramétrons ensuite c_ε^- par $z \,=\, \varepsilon\, e^{i\theta}$ avec θ décroissant de π vers 0, prenons la différentielle $dz \,=\, \varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta$, calculons :

$$\begin{aligned}\int_{c_\varepsilon^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \,&=\, \int_{\pi}^{0} \frac{-\,i}{\varepsilon\, e^{i\theta}}\, i\,\varepsilon\, e^{i\theta}\, d\theta + \int_{\pi}^{0} g\big(\varepsilon\, e^{i\theta}\big)\, i\,\varepsilon\, e^{i\theta}\, d\theta \\ &=\, -\,\pi + \mathrm{O}(\varepsilon) \,\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\, -\,\pi,\end{aligned}$$

et revenons à l'identité abandonnée en chemin plus haut :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx \,=\, \pi.$$

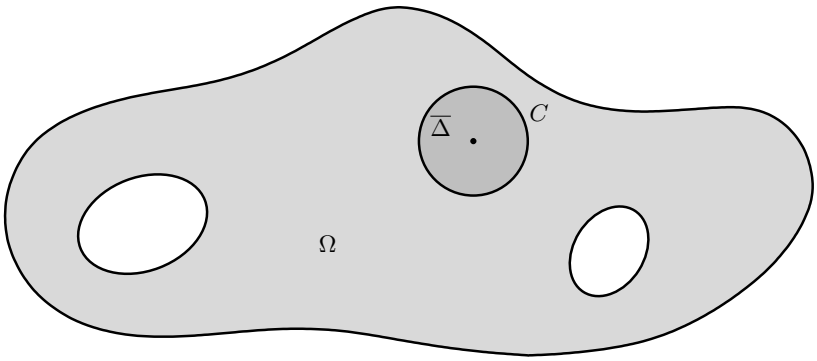
Un exercice visuel (ou un calcul à la sauvette, autorisé !) convainc que cette somme d'intégrales est en fait réelle et vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \,=\, \pi.$$

Par parité de la fonction réelle intégrée ici, nous atteignons la formule annoncée.

6. Formule de représentation intégrale de Cauchy

Les formules de représentation intégrale jouent un rôle important en mathématiques, car elles permettent de retrouver les valeurs d'une fonction sur un grand ensemble, souvent ouvert, à partir de la seule connaissance de ses valeurs sur un plus petit ensemble, en général le bord de l'ouvert. Dans le cours d'*Analyse de Fourier*, nous avons vu que le noyau de Poisson sur le cercle unité était un bon noyau qui approxime l'identité pour la convolution. Ce noyau de Poisson est aussi intimement lié aux fonctions holomorphes, comme le montrent l'Exercice 17 et l'Exercice 18.



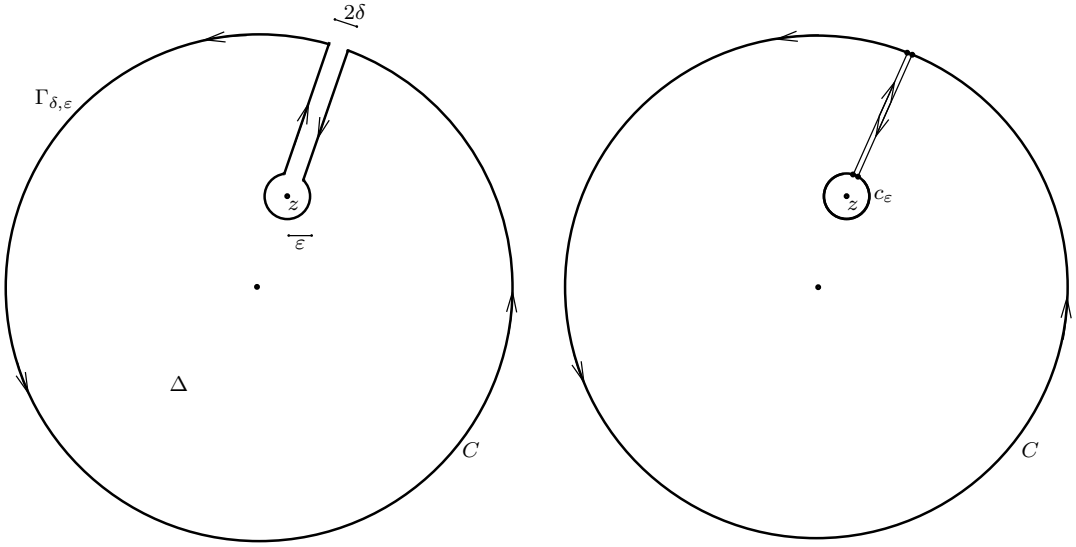
Théorème 6.1. [Formule de Cauchy 6] *Soit $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$ qui est contenu dans l'ouvert, les valeurs de f* dans Δ *s'expriment par l'intégrale suivante sur le cercle-bord $C := \partial\Delta$:*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (\forall\, z \in \Delta).$$

La fonction-poids $\zeta \longmapsto \frac{1}{\zeta - z}$ qui dépend du point z en lequel on souhaite retrouver la valeur de f, est souvent appelée *noyau de Cauchy*.

Le Théorème 4.7 un peu « *technique* » a été préparé à l'avance pour obtenir cette formule.

Démonstration. Fixons $z \in \Delta$ et introduisons, pour $0 < \delta < \varepsilon$ petits, le contour suivant $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$, en forme de trou de serrure.



Ici, δ est la largeur d'un couloir tracé en direction de z, et ε est le rayon d'un cercle centré en z. Puisque la fonction $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe en-dehors du point $\zeta = z$, la formule Cauchy discutée dans la Section **4** — *voir* le Théorème 4.7 spécialement préparé à cette fin — donne l'annulation :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Maintenant, faisons $\delta \longrightarrow 0$, ce qui écrase le couloir jusqu'à ce que ses deux murs coïncident, et en utilisant la continuité de $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, nous voyons que la somme des intégrales sur les deux murs égaux s'annule puisque l'orientation est opposée, et donc il ne reste plus que :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \end{aligned}$$

où c_ε est le tout petit cercle de centre z et de rayon $\varepsilon > 0$, orienté positivement.

Ensuite, écrivons :

$$f(\zeta) = f(\zeta) - f(z) + f(z),$$

et prenons — juste pour le plaisir des yeux ! — la limite de tout cela lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$0 = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or comme f est holomorphe au point z, ce quotient différentiel, qui possède donc une limite, reste nécessairement borné :

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leqslant \mathrm{M} \qquad (\exists\, \mathrm{M} < \infty),$$

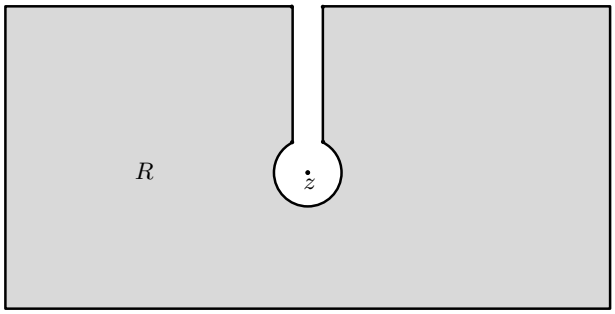
donc la deuxième intégrale au centre tend vers 0 lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, simplement parce qu'elle est majorée par $\mathrm{M}\, 2\pi\, \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| &\leqslant \mathrm{M} \int_{c_\varepsilon} \big| d\zeta \big| \\ &= \mathrm{M}\, \mathsf{longueur}\, \big(c_\varepsilon\big) = \mathrm{M}\, 2\pi\, \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à calculer la troisième intégrale. À cette fin, paramétrons le petit cercle c_ε par $\zeta = z + \varepsilon\, e^{it}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, d'où $d\zeta = i\varepsilon e^{it}\, dt$, ce qui offre la formule annoncée :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 0 - f(z) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{i\, \varepsilon\, e^{it}}{\varepsilon\, e^{it}}\, dt \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\, i\, 2\pi. \end{aligned}$$

□



Cette formule de Cauchy dans un disque fermé se généralise aisément au cas d'un rectangle fermé $\overline{R} \subset \Omega$, avec des points z à l'intérieur R du rectangle en intégrant sur le bord ∂R du rectangle, car il suffit de percer un trou de serrure similaire dans le rectangle :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Eu égard au Théorème 4.2 non encore démontré, énonçons le résultat analogue qui constitue la forme la plus générale du théorème de représentation intégrale de Cauchy.

Théorème 6.2. [Jordan, Cauchy] *Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe fermée simple $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$, et si $\Omega \supset \Gamma_{\mathsf{int}} \cup \Gamma$ est un ouvert la contenant ainsi que son intérieur de Jordan, alors pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, on a en tout point intérieur :*

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (\forall\, z \in \Gamma_{\mathsf{int}}),$$

tandis que pour les points extérieurs :

$$0 \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (\forall\, z \in \Omega \setminus (\Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}})).$$

Ce dernier cas où $z \notin \overline{\Gamma}_{\mathsf{int}}$ est en fait un corollaire direct dudit Théorème 4.2, puisqu'alors la fonction $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est *holomorphe* dans un certain voisinage ouvert $\omega \supset \overline{\Gamma}_{\mathsf{int}}$ assez 'resserré' pour que $z \notin \omega$. Nous démontrerons ce résultat ultérieurement.

Corollaire 6.3. *Pour tout disque fermé ou rectangle fermé contenu dans un ouvert du plan complexe $\overline{\Delta}, \overline{R} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, et pour tout point extérieur $z \in \Omega \backslash \overline{\Delta}, \overline{R}$, on a :*

$$0 \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \qquad \square$$

7. Analyticité des fonctions holomorphes et principe d'unicité

Comme conséquence de la formule intégrale de Cauchy, nous parvenons à une des caractéristiques les plus frappantes des fonctions holomorphes, à savoir qu'elle sont indéfiniment dérivables, alors que leur définition requérait seulement une dérivée (complexe) d'ordre 1, sans même demander la continuité de la dérivée, d'ailleurs.

Théorème 7.1. [de régularité, Cauchy 7] *Les fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ possèdent toujours une infinité de dérivées complexes. De plus, pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$ contenu dans l'ouvert de bord le cercle $C := \partial\Delta$, on a en tout point intérieur $z \in \Delta$:*

$$f^{(n)}(z) \,=\, \frac{n!}{2i\pi} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Rappelons que nous orientons toujours les courbes — telles que le cercle C ici — dans le sens trigonométrique direct, c'est-à-dire que l'intérieur Δ de la courbe C doit se situer du côté de la main gauche quand on se promène le long de C.

Démonstration. Pour $n = 0$, c'est la formule de Cauchy que nous venons d'établir.

Avec $n \geqslant 1$ quelconque, supposons donc par récurrence que la formule est vraie pour une dérivée complexe d'ordre $(n-1)$:

$$f^{(n-1)}(z) \,=\, \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n}}\, d\zeta.$$

Pour $h \in \mathbb{C}^*$ petit, nous devons alors estimer le quotient différentiel infinitésimal de $f^{(n-1)}(z)$ et montrer qu'il possède une limite lorsque $h \longrightarrow 0$.

Avec $A := \frac{1}{\zeta - z - h}$ et $B := \frac{1}{\zeta - z}$, en utilisant la factorisation élémentaire :

$$A^n - B^n \,=\, \big(A - B\big)\,\big[A^{n-1} + A^{n-2}\,B + \cdots + A\,B^{n-2} + B^{n-1}\big],$$

nous pouvons calculer en éliminant h au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \,&=\, \frac{(n-1)!}{2i\pi}\int_C f(\zeta)\,\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}\right] d\zeta \\ &=\, \frac{(n-1)!}{2i\pi}\int_C f(\zeta)\,\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right]\Bigg(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \frac{1}{(\zeta - z - h)^{n-1-k}}\,\frac{1}{(\zeta - z)^k}\Bigg)\, d\zeta.\end{aligned}$$

Alors le point crucial est que $\frac{1}{h}$ au dénominateur disparaît dans la simplication :

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right] \,=\, \frac{1}{h}\,\frac{\zeta - z - \zeta + z + h}{(\zeta - z - h)\,(\zeta - z)} \,=\, \frac{1}{\underline{h}_\circ}\,\frac{\underline{h}_\circ}{(\zeta - z - h)\,(\zeta - z)},$$

ce qui conduit à l'intégration d'une fonction qui dépend maintenant continûment du paramètre h :

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \,=\, \frac{(n-1)!}{2i\pi}\int_C f(\zeta)\,\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\Bigg(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \frac{1}{(\zeta - z - h)^{n-1-k}}\,\frac{1}{(\zeta - z)^k}\Bigg)\, d\zeta,$$

et donc, lorsque $h \longrightarrow 0$, nous obtenons bien grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre :

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \,&=\, \frac{(n-1)!}{2i\pi}\int_C f(\zeta)\,\frac{1}{(\zeta - z)^2}\left(\frac{n}{(\zeta - z)^{n-1}}\right) d\zeta \\ &=\, \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \qquad \square\end{aligned}$$

Dans la suite, nous appellerons les formules de représentation que nous venons d'obtenir *formules intégrales de Cauchy*.

Corollaire 7.2. *Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors toutes ses $\mathbb{C}$-dérivées successives :*

$$f',\ f'',\ \ldots,\ f^{(n)},\ \ldots\ \in\ \mathscr{O}(\Omega)$$

sont aussi *holomorphes dans Ω.* $\square$

La conséquence la plus frappante de la formule intégrale de Cauchy est l'équivalence entre le fait d'être holomorphe, et le fait d'être localement développable en série entière convergente, équivalence promise dans le chapitre qui précède.

Théorème 7.3. [d'analyticité, Cauchy 8] *Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon $r > 0$ tel que :*

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)\ \subset\ \Omega,$$

la fonction f possède un développement en série infinie de Taylor entière :

$$f(z)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,\big(z - z_0\big)^n,$$

qui converge en tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$.

Si donc nous introduisons la distance de z_0 au complémentaire $\complement\,\Omega := \mathbb{C}\backslash\Omega$ de l'ouvert :

$$\mathsf{dist}\,\big(z_0,\,\complement\,\Omega\big) \;:=\; \mathsf{inf}\,\big\{|z_0 - w|\colon\; w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\big\},$$

la convergence a lieu quel que soit :

$$0 \;<\; r \;<\; \mathsf{dist}\,\big(z_0,\,\complement\,\Omega\big),$$

d'où en faisant tendre $r \overset{<}{\longrightarrow} \mathsf{dist}\,\big(z_0, \complement\Omega\big)$, on déduit que la convergence a lieu dans le plus grand disque ouvert centré en z_0 et contenu dans Ω.

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$, et rappelons que $C_r(z_0)$ désigne le cercle de centre z_0 de rayon $r > 0$. La formule intégrale de Cauchy donne :

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

L'idée est d'écrire pour $|\zeta - z_0| = r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)}\\ &= \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.\end{aligned}$$

Comme $|z - z_0| < r$ est fixe et comme $\big|\zeta - z_0\big| = r$ est constant, on a une majoration uniforme :

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \;<\; 1 \qquad\qquad (\forall\,\zeta \in C_r(z_0)),$$

qui nous permet de développer en série convergeant normalement :

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n,$$

donc uniformément, quel que soit $\zeta \in C_r(z_0)$. En revenant alors à la formule de Cauchy, cette convergence contrôlée nous autorise à intervertir intégration et sommation infinie :

$$\begin{aligned}f(z) \;&=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n\right)d\zeta\\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)}_{\text{reconnaître } \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}\big(z - z_0\big)^n,\end{aligned}$$

tout en reconnaissant la formule du Théorème 7.1 pour $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

Observons que puisque nous avons déjà démontré qu'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n$ est indéfiniment dérivable, ce théorème confirme le fait qu'une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable.

Dans le chapitre précédent, nous avons formulé et démontré le *Principe du prolongement analytique* ainsi que le *Principe d'unicité* pour les fonctions localement développables en série entière convergente, et ces résultats s'appliquent dorénavant à toutes les fonctions holomorphes. Par souci de complétude théorique, reformulons-les.

Théorème 7.4. [Principes d'unicité] *Dans un ouvert* connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$*, si une fonction holomorphe* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *satisfait l'une des trois conditions suivantes :*

- *il existe* $z_0 \in \Omega$ *en lequel* $f^{(n)}(z_0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*;*
- *il existe* $z_0 \in \Omega$ *au voisinage duquel* $f \equiv 0$*;*
- *il existe une suite* $(w_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ *de points distincts deux à deux convergeant vers un point* $w_\infty = \lim_{\nu\to\infty} w_\nu \in \Omega$ dans l'ouvert *en lesquels* $f(w_\nu) = 0$ *pour tout* $\nu \in \mathbb{N}$*;*

alors $f \equiv 0$ *est identiquement nulle dans* Ω*.*

Souvent, ce principe d'unicité est appliqué à la différence $f = g - h$ de deux fonctions holomorphes.

Démonstration. Redémontrons seulement le premier cas, d'une manière légèrement différente.

Grâce au Théorème 7.3 d'analyticité, pour tout rayon r avec $0 \leqslant r < \operatorname{dist}\big(z_0, \complement\,\Omega\big)$, on a en tout point z avec $|z - z_0| < r$ une représentation :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \underline{f^{(n)}(z_0)}_{\circ}\, \frac{(z-z_0)^n}{n\,!},$$

qui montre que $f \equiv 0$ dans $\mathbb{D}_r(z_0)$, et donc, l'ensemble :

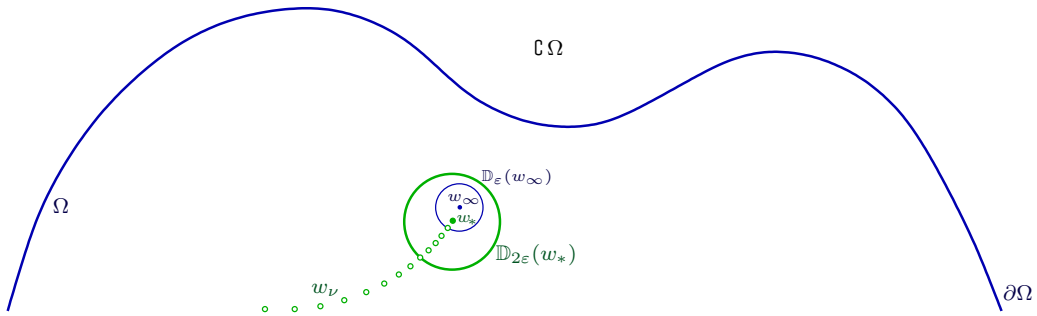
$$\mathscr{W} \,:=\, \big\{w \in \Omega\colon \text{ il existe } \omega \ni w \text{ ouvert avec } f\big|_{\omega} \equiv 0\big\}$$

est non vide. Pour conclure, il nous faudrait avoir $\mathscr{W} = \Omega$.

En tout cas, $\mathscr{W}$ est clairement ouvert (exercice mental).

Assertion 7.5. *Cet ensemble* $\mathscr{W}$ *est aussi fermé, relativement dans* Ω*.*

Démonstration. Étant donné une suite $(w_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ quelconque de points $w_\nu \in \mathscr{W} \subset \Omega$ qui converge vers un point $\lim_{\nu\to\infty} w_\nu =: w_\infty \in \Omega$ dans l'ouvert, l'objectif est de faire voir que $w_\infty \in \mathscr{W}$.



Avec $\varepsilon > 0$ satisfaisant :

$$4\,\varepsilon \,<\, \operatorname{dist}\big(w_\infty, \complement\,\Omega\big),$$

prenons un $\nu \gg 1$ assez grand pour que $|w_\nu - w_\infty| \leqslant \varepsilon$, fixons ce point, et notons-le :

$$w_\nu \,=:\, w_* \,\in\, \mathscr{W}.$$

Premièrement, nous avons $\overline{\mathbb{D}}_{2\varepsilon}(w_*) \subset \Omega$, car pour $z \in \overline{\mathbb{D}}_{2\varepsilon}(w_*)$ quelconque, l'inégalité $|z - w_*| \leqslant 2\,\varepsilon$ entraîne :

$$|z - w_\infty| \,\leqslant\, |z - w_*| + |w_* - w_\infty| \,\leqslant\, 2\,\varepsilon + \varepsilon \,<\, 4\,\varepsilon.$$

Par conséquent, le Théorème 7.3 d'analyticité s'applique et donne, puisque $f \equiv 0$ au voisinage de w_*, l'annulation :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \underline{f^{(n)}(w_*)}_{\circ} \, \frac{(z-w_*)^n}{n\,!} \,=\, 0 \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*)).$$

Deuxièmement, ce disque d'annulation contient un voisinage de w_∞, à savoir plus précisément on a $\mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*) \supset \mathbb{D}_\varepsilon(w_\infty)$, car $|z - w_\infty| < \varepsilon$ entraîne :

$$|z - w_*| \,\leqslant\, |z - w_\infty| + |w_\infty - w_*| \,\leqslant\, |z - w_\infty| + \varepsilon \,<\, \varepsilon + \varepsilon.$$

Donc $f(z) \equiv 0$ dans le voisinage ouvert $\mathbb{D}_\varepsilon(w_\infty)$, ce qui montre bien $w_\infty \in \mathscr{W}$. □

En conclusion, le sous-ensemble non vide $\mathscr{W} \subset \Omega$, ouvert et fermé, ne peut que coïncider avec Ω, puisque ce dernier a été supposé connexe. □

Corollaire 7.6. *Dans un ouvert non vide* connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$*, l'anneau* $\mathscr{O}(\Omega)$ *des fonctions holomorphes est intègre.*

Démonstration. En effet, si deux fonctions $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ satisfont $f\,g \equiv 0$ et si l'une d'entre elle, disons $g(z_0) \neq 0$, ne s'annule pas en un point $z_0 \in \Omega$, alors par continuité, il existe un disque ouvert non vide $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$ en restriction auquel $g \neq 0$, donc $f|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv 0$, et ensuite, grâce au principe d'unicité, $f \equiv 0$ partout dans Ω. □

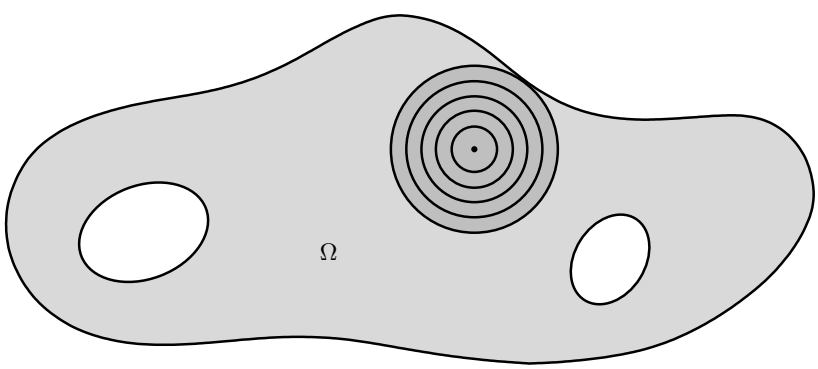
8. Inégalités de Cauchy et principes du maximum

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour un rayon $\mathrm{R} > 0$, rappelons que nous notons les disques ouverts et fermés de centre z_0 et de rayon R comme suit :

$$\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0) \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, |z - z_0| < \mathrm{R}\big\},$$
$$\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0) \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, |z - z_0| \leqslant \mathrm{R}\big\}.$$

Nous noterons aussi le cercle de rayon $\mathrm{R} > 0$ centré en z_0 :

$$C_{\mathrm{R}}(z_0) \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, |z - z_0| = \mathrm{R}\big\}.$$



Théorème 8.1. [Inégalités de Cauchy 9] *Si* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *est une fonction holomorphe dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, alors en tout point* $z_0 \in \Omega$*, et pour tout rayon* $\mathrm{R} > 0$ *tel que :*

$$\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0) \,\subset\, \Omega,$$

on a les inégalités :

$$\big|f^{(n)}(z_0)\big| \,\leqslant\, \frac{n!}{\mathrm{R}^n} \sup_{|z-z_0|=\mathrm{R}} \big|f(z)\big| \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Ici, l'intérêt est souvent de faire R le plus grand possible de manière à rendre le majorant à droite le plus petit possible, et donc, de faire « gonfler » les disques fermés centrés en z_0 jusqu'à ce qu'ils « touchent » le bord de Ω.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n)}(z_0)$ et de majorer :

$$\begin{aligned}
\big|f^{(n)}(z_0)\big| &= \left|\frac{n!}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\mathrm{R}\,e^{i\theta})}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^{n+1}}\,\mathrm{R}\,i\,e^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi}\,\frac{\sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\big|f(z_0+\mathrm{R}\,e^{i\theta})\big|}{\mathrm{R}^{n+1}}\,\mathrm{R}\,2\pi \\
&= \frac{n!}{\mathrm{R}^n}\sup_{z\in C_{\mathrm{R}}(z_0)}|f(z)|. \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 8.2. [Liouville] *Si $f\in\mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière définie sur l'intégralité du plan complexe et si elle est* bornée :

$$\exists\,\mathrm{M}<\infty \qquad \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M} \qquad (\forall\, z\in\mathbb{C}),$$

alors $f=$ constante.

Démonstration. Il suffit de faire voir que $f'\equiv 0$, car sur $\mathbb{C}$ qui est étoilé, une formule vue plus haut :

$$f(z) = f(0)+\int_{[0,z]} \underline{f'(\zeta)}_{\circ}\,d\zeta$$

fera voir que $f(z)\equiv f(0)$ est constante.

En tout point $z_0\in\mathbb{C}$, pour tout rayon $\mathrm{R}>0$, les inégalités de Cauchy donnent sans effort :

$$\begin{aligned}
\big|f'(z_0)\big| &\leqslant \frac{1!}{\mathrm{R}^1}\sup_{|z-z_0|=\mathrm{R}}\big|f(z)\big| \\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Une autre application merveilleuse de la théorie des fonctions holomorphes est une preuve extrêmement simple du théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 8.3. [D'Alembert-Gauss] *Tout polynôme* non constant $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ *avec $n\geqslant 1$ et $a_n\neq 0$ à coefficients complexes $a_i\in\mathbb{C}$ possède toujours au moins une racine $z_0\in\mathbb{C}$ avec $P(z_0)=0$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $P(z)\neq 0$ en tout point $z\in\mathbb{C}$. Alors la fonction $\frac{1}{P(z)}$ est holomorphe entière sur $\mathbb{C}$.

L'idée est de constater que $\frac{1}{|P(z)|}$ est alors aussi *bornée*, car le Théorème 8.2 de Liouville vu à l'instant la forcera à être *constante*, ce qui sera très faux (contradictoire), car $\deg P = n\geqslant 1$.

Tout d'abord, quel que soit $\mathrm{R} > 0$, il existe une constante $c = c(\mathrm{R}) > 0$ telle que sur le disque compact $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ où P ne s'annule pas :

$$\big|P(z)\big| \geqslant c > 0 \qquad (\forall\, |z| \leqslant \mathrm{R}).$$

Ensuite, en dehors de ce disque, c'est-à-dire pour $|z| > \mathrm{R}$, factorisons :

$$P(z) = z^n \Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\Big),$$

et minorons :

$$\begin{aligned}
\big|P(z)\big| &\geqslant |z|^n \Big(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\Big) \\
&\geqslant \mathrm{R}^n \Big(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{\mathrm{R}} - \cdots - \frac{|a_0|}{\mathrm{R}^n}\Big) \\
\text{[Si } \mathrm{R} \gg 1 \text{ est grand]} \qquad &\geqslant \mathrm{R}^n \, \frac{|a_n|}{2}.
\end{aligned}$$

Enfin, synthétisons une majoration conclusive sur la réunion $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}} \cup \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$:

$$\frac{1}{|P(z)|} \leqslant \max\Big(\frac{1}{c}, \frac{2}{\mathrm{R}^n\, |a_n|}\Big) < \infty. \qquad \square$$

Théorème 8.4. *Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ à coefficients $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, de degré $n \geqslant 1$ admet exactement n racines complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, comptées avec multiplicité, et se factorise comme :*

$$P(z) = a_n \big(z - \alpha_1\big) \cdots \big(z - \alpha_n\big).$$

Preuve. Grâce au théorème qui précède, P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$, disons $\alpha_1 \in \mathbb{C}$. Comme soustraire par $0 = P(\alpha_1)$ ne change rien, écrivons, factorisons, et réorganisons :

$$\begin{aligned}
P(z) &= P(z) - \underline{P(\alpha_1)}_{\circ} \\
&= a_n \big(z^n - \alpha_1^n\big) + a_{n-1} \big(z^{n-1} - \alpha_1^{n-1}\big) + \cdots + a_1 \big(z - \alpha_1\big) + \underline{a_0 - a_0}_{\circ} \\
&= \big(z - \alpha_1\big) \Big[a_n \big(z^{n-1} + \cdots + \alpha_1^{n-1}\big) + a_{n-1} \big(z^{n-2} + \cdots + \alpha_1^{n-2}\big) + \cdots + a_1\Big] \\
&= \big(z - \alpha_1\big) \Big[a_n\, z^{n-1} + \big(a_n\, \alpha_1 + a_{n-1}\big)\, z^{n-2} + \cdots + \big(a_n \alpha_1^{n-1} + a_{n-1} \alpha_1^{n-2} + \cdots + a_1\big)\Big] \\
&=: \big(z - \alpha_1\big)\, Q(z),
\end{aligned}$$

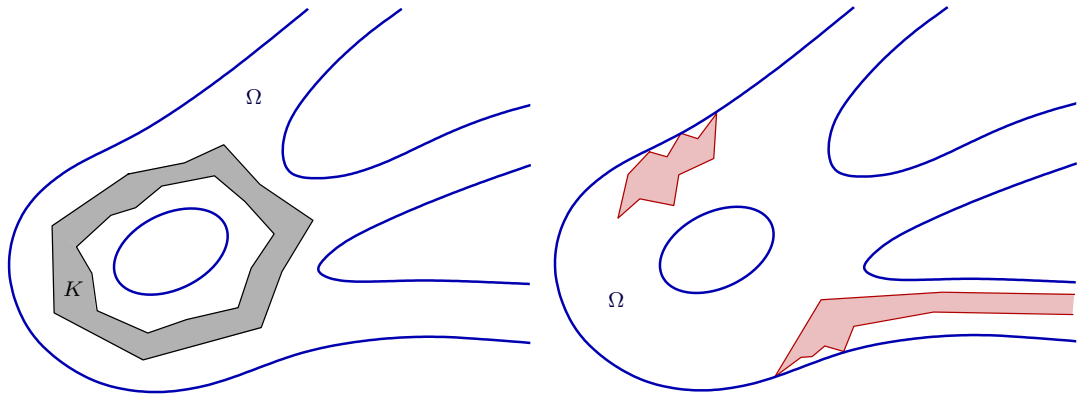
avec un nouveau polynôme $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ à coefficients complexes et de degré $n-1$, puisque $a_n \neq 0$.

Une récurrence élémentaire sur le degré n des polynômes offre à la fin, pour un certain nombre complexe $b \in \mathbb{C}$, une factorisation de type conclusif :

$$\begin{aligned}
P(z) &= \big(z - \alpha_1\big) \cdots \big(z - \alpha_{n-1}\big) \big[a_n\, z + b\big] \\
&=: a_n \big(z - \alpha_1\big) \cdots \big(z - \alpha_{n-1}\big) \big(z - \alpha_n\big). \qquad \square
\end{aligned}$$

Revenons maintenant aux inégalités de Cauchy, afin de généraliser le Théorème 8.1 à des situations plus sophistiquées que des disques.

Tout d'abord, un exercice de topologie générale convainc de la véracité du critère suivant.



Critère de compacité 8.5. *Un sous-ensemble $K \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est* compact *si et seulement si :*

① *K est borné dans $\mathbb{C}$;*

② *K est fermé dans Ω,* i.e. *tous les points-limites de suites de Cauchy d'éléments de K qui convergent dans Ω appartiennent encore à K ;*

③ $\mathsf{dist}\big(K, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) = \mathsf{dist}\big(K, \partial\Omega\big) > 0.$ □

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact contenu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. La distance à K d'un point quelconque $w \in \mathbb{C}$ est :

$$\mathsf{dist}\big(w, K\big) := \inf_{z \in K} \big|w - z\big|,$$

et puisque K est compact, en raisonnant avec une suite minimisante puis convergente après extraction de sous-suite, cette distance est atteinte en au moins un point $z_w \in K$, c'est-à-dire :

$$\mathsf{dist}\big(w, K\big) = \big|w - z_w\big|.$$

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$, introduisons le ε-épaississement de K :

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &:= \big\{w \in \mathbb{C} \colon \mathsf{dist}\,(w, K) \leqslant \varepsilon\big\} \\ &= \big\{w \in \mathbb{C} \colon \exists\, z \in K,\ |w - z| \leqslant \varepsilon\big\} \supset K. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on est certain grâce au critère qui précède que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

La version générale des inégalités de Cauchy s'applique à des compacts quelconques, et elle permet de contrôler toutes les dérivées des fonctions holomorphes par leur norme du supremum — sans aucune dérivée ! — sur un compact légèrement plus grand.

Théorème 8.6. *Soit $K \subset L \subset \Omega$ une paire emboîtée de sous-ensembles compacts d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec :*

$$K \subset \mathsf{Int}\, L.$$

Alors pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe une constante positive $C = C_{K,L,n} < \infty$ telle que :

$$\max_{z \in K} \big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant C \max_{w \in L} \big|f(w)\big| \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que :

$$K \subset K_\varepsilon \subset L,$$

d'où $\varepsilon = \varepsilon_{K,L}$. Alors en un point quelconque $z \in K$ et pour toute $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, le Théorème 8.1 donne un contrôle sur le cercle correspondant :

$$\begin{aligned} \big|f^{(n)}(z)\big| &\leqslant \frac{n!}{\varepsilon^n} \max_{|w-z|=\varepsilon} \big|f(w)\big| \\ &\leqslant \frac{n!}{\varepsilon^n} \max_{w\in K_\varepsilon} \big|f(w)\big| \\ &\leqslant C_{K,L,n} \max_{w\in L} \big|f(w)\big|, \end{aligned}$$

et il suffit de prendre à gauche le maximum sur $z \in K$ pour conclure. □

Par ailleurs, les inégalités originales de Cauchy dans un disque fournies par le Théorème 8.1 admettent une version beaucoup plus précise qui prend la forme d'une *égalité*.

Théorème 8.7. *Si $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0) \subset \Omega$ est un disque fermé de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ centré en un point $z_0 \in \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big|\frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0)\Big|^2 \mathrm{R}^{2n} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f\big(z_0 + \mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|^2\, d\theta \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

En effet, tous les termes à gauche étant positifs, chacun d'entre eux est inférieur ou égal à leur somme infinie, d'où on re-déduit le Théorème 8.1 :

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0)\Big|^2 \mathrm{R}^{2n} \;\leqslant\; \sum_{m=0}^{\infty} \Big|\frac{1}{m!}\, f^{(m)}(z_0)\Big|^2 \mathrm{R}^{2m} \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f\big(z_0 + \mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|^2\, d\theta \\ &\leqslant\; \max_{\theta\in\mathbb{R}} \big|f\big(z_0 + \mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|^2 \qquad (\forall\, n \geqslant 0). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0) \subset \Omega$, le Théorème 7.3 assure que le rayon de convergence de la série de Taylor infinie de f en z_0 est $> \mathrm{R}$, donc cette série converge normalement sur le cercle de rayon R :

$$f\big(z_0 + \mathrm{R}\, e^{i\theta}\big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0)\, \mathrm{R}^n\, e^{in\theta}.$$

Lorsqu'on prend le module au carré de cela, on a encore convergence normale, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \big|f\big(z_0 + \mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|^2 \;&=\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0)\, \mathrm{R}^n\, e^{in\theta}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\, \overline{f^{(m)}(z_0)}\, \mathrm{R}^m\, e^{-im\theta}\Big) \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{m!}\, f^{(n)}(z_0)\, \overline{f^{(m)}(z_0)}\, \mathrm{R}^n\, \mathrm{R}^m\, e^{in\theta}\, e^{-im\theta}. \end{aligned}$$

Pour intégrer tout ce beau monde, utilisons (exercice) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta \;=\; \begin{cases} 1 & \text{lorsque } n = m, \\ 0 & \text{lorsque } n \neq m, \end{cases}$$

ce qui élimine énormément de prétendants et nous conduit en douceur à la conclusion :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f\big(z_0 + \mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|^2\, d\theta \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0)\, \overline{f^{(n)}(z_0)}\, \mathrm{R}^n\, \mathrm{R}^n \cdot 1. \qquad \square$$

Voici une autre conséquence remarquable des inégalités de Cauchy : si le module $|f|$ d'une fonction holomorphe admet un maximum global, ou même local, en un point *intérieur* d'un ouvert connexe Ω, alors elle est partout constante.

Théorème 8.8. [Principe du maximum, 1] *Soit $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert* connexe. *S'il existe un point $a \in \Omega$ et $r > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}}_r(a) \subset \Omega$ tels que :*

$$\big|f(a)\big| \geqslant \big|f(z)\big| \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}_r(a)),$$

alors $f \equiv f(a)$ est constante dans Ω.

Démonstration. En revenant au paragraphe qui suit le Théorème 8.7 mais en conservant deux termes à gauche au lieu d'un, pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé, nous construisons un jeu d'inégalités oppressantes :

$$\begin{aligned}
\big|f(a)\big|^2 + \Big|\frac{1}{n!}\, f^{(n)}(a)\Big|^2 r^{2n} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \Big|\frac{1}{m!}\, f^{(m)}(a)\Big|^2 r^{2m} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f\big(a + r\, e^{i\theta}\big)\big|^2\, d\theta \\
&\leqslant \max_{\theta\in\mathbb{R}} \big|f\big(a + r\, e^{i\theta}\big)\big|^2 \\
&\leqslant \max_{|z-a|\leqslant r} \big|f(z)\big|^2 \\
\text{[Hypothèse !]} \qquad &\leqslant \big|f(a)\big|^2
\end{aligned}$$

qui forcent l'annulation $f^{(n)}(a) = 0$ de toutes ces dérivées, donc le Principe d'unicité 7.4 appliqué à $f - f(a)$ conclut. $\square$

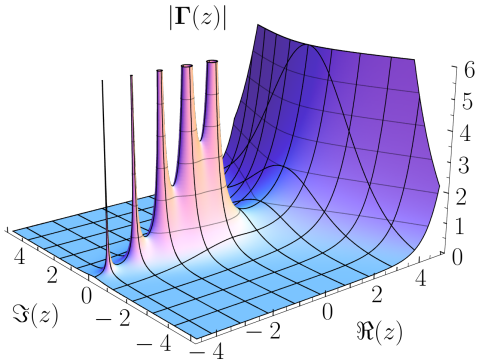
Puisque les fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ sont définies dans un espace 2-dimensionnel réel et prennent aussi leurs valeurs dans un espace 2-dimensionnel, et puisque $2+2=4$ (certes !), il n'est pas vraiment aisé de représenter ou de visualiser leurs graphes :

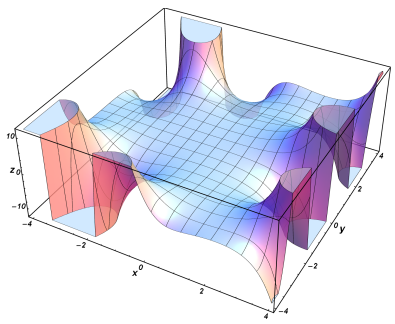
$$\mathsf{Graphe}(f) := \big\{\big(z, f(z)\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \colon\ z \in \Omega\big\}.$$

C'est pourquoi on se contente souvent de représenter le graphe de leurs modules, vu dans un demi-espace 3-dimensionnel :

$$\mathsf{Graphe}\big(|f|\big) := \big\{\big(z, |f(z)|\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \colon\ z \in \Omega\big\},$$

et là par chance, tout semble devenir visualisable.





Si donc nous appelons *paysage analytique* de f le graphe de $|f|$ dans l'espace à trois dimensions — comme s'il était constitué de montagnes et de vallées photographiables —,

alors le principe du maximum affirme qu'il n'y a aucun sommet intérieur, et donc, que les points les plus hauts sont à rechercher au bord.

Une conséquence plus importante des inégalités de Cauchy demande donc d'examiner le comportement au bord des fonctions holomorphes. L'ouvert n'étant pas forcément borné, on doit tenir compte aussi de ce qui se passe quand on s'évade vers l'infini.

Théorème 8.9. [Principe du Maximum, 2] *Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfait, pour une constante finie $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$, les inégalités en tout point $\zeta \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$ du bord :*

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ z \to \zeta}} \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M},$$

ainsi que l'inégalité à l'infini :

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ |z| \to \infty}} \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M},$$

alors la même inégalité est satisfaite partout dans Ω :

$$\sup_{z \in \Omega} \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}.$$

Quand $\Omega \subset \mathbb{C}$ est borné, c'est-à-dire contenu dans un disque assez grand, la deuxième condition à l'infini n'est évidemment pas requise. Inversement, quand $\Omega = \mathbb{C}$, d'où $\partial\Omega = \emptyset$, c'est la première condition qui saute !

Par ailleurs, l'hypothèse concernant la limite supérieure quand $|z| \longrightarrow \infty$ est essentielle, comme le montre l'exemple $f(z) = e^z$ sur $\Omega := \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ avec $|f(i\,y)| = |e^{iy}| = 1$ sur $\partial\Omega = \{x = 0\}$, tandis que $f(x) = e^x \longrightarrow \infty$ est non bornée sur $\mathbb{R}_+^* \subset \Omega$.

Démonstration. Donnons-nous $\mathrm{M}' > \mathrm{M}$ arbitrairement proche de M, et introduisons l'ensemble :

$$K_{\mathrm{M}'} := \big\{z \in \Omega \colon\ |f(z)| \geqslant \mathrm{M}'\big\}.$$

Comme f est continue, $K_{\mathrm{M}'}$ est relativement fermé dans Ω. Les deux hypothèses garantissent aussi (exercice) que $K_{\mathrm{M}'}$ possède une fermeture dans $\mathbb{C}$ ne rencontrant pas $\overline{\Omega} \backslash \Omega$, et qu'il est borné dans $\mathbb{C}$. Le Critère de compacité 8.5 assure alors que $K_{\mathrm{M}'}$ est un *compact*.

Assertion 8.10. *En fait, $K_{\mathrm{M}'} = \emptyset$.*

Preuve. Si $K_{\mathrm{M}'} \neq \emptyset$ était non vide, la borne supérieure de $|f|$ sur $K_{\mathrm{M}'}$ serait atteinte en un certain point $a \in K_{\mathrm{M}'}$ de ce compact :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \big|f(a)\big| \qquad (\forall\, z \in K_{\mathrm{M}'}),$$

mais par ailleurs, comme $|f(a)| \geqslant \mathrm{M}'$, on aurait en tout autre point $z \in \Omega \backslash K_{\mathrm{M}'}$ par définition :

$$\big|f(z)\big| < \mathrm{M}' \leqslant \big|f(a)\big|,$$

et donc l'inégalité serait satisfaite partout :

$$|f(z)| \leqslant \big|f(a)\big| \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Par conséquent, $|f|$ atteindrait son maximum sur Ω au point intérieur $a \in \Omega$, donc $f \equiv f(a)$ serait constante dans Ω à cause du Principe du Maximum 8.8, et comme $|f(a)| \geqslant \mathrm{M}'$, cela contredirait l'hypothèse que $|f|$ est $\leqslant \mathrm{M}$ au bord et à l'infini. $\square$

Puisque $\Omega \backslash K_{\mathrm{M}'} = \Omega$, nous avons donc :

$$\big|f(z)\big| \,<\, \mathrm{M}' \qquad (\forall\, z \in \Omega),$$

et comme $\mathrm{M}' > \mathrm{M}$ pouvait être choisi arbitrairement proche de M, c'est terminé ! □

Ce théorème général admet une variante simplifiée mais plus utile dans de nombreuses circonstances.

Théorème 8.11. [Principe du Maximum, 3] *Sur la fermeture $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ d'un ouvert* connexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}$*, si une fonction continue :*

$$f \,\in\, \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\Omega \cup \partial\Omega\big),$$

est holomorphe à l'intérieur, alors :

$$\big|f(z)\big| \,\leqslant\, \sup_{\zeta \in \partial\Omega} \big|f(\zeta)\big| \,<\, \infty \qquad (\forall\, z \in \overline{\Omega}).$$

Autrement dit, sur le compact $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, le maximum du module est toujours atteint au bord.

Démonstration. S'il existait un point $z \in \Omega$ en lequel :

$$\big|f(z)\big| \,>\, \sup_{\zeta \in \partial\Omega} \big|f(\zeta)\big|, \tag{8.12}$$

le maximum du module de f, atteint sur le compact $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, le serait alors en un certain point $a \in \overline{\Omega}$ devant satisfaire :

$$\big|f(a)\big| \,\geqslant\, \big|f(z)\big| \,>\, \sup_{\zeta \in \partial\Omega} \big|f(\zeta)\big|,$$

donc $a \in \Omega$ devrait être à l'intérieur, ce qui forcerait f à être constante à cause du Théorème 8.8, en contradiction affligeante avec (8.12). □

9. Théorème de Morera et convergence uniforme sur des compacts

Une application directe de ce qui précède offre une réciproque particulièrement utile du théorème de Cauchy.

Théorème 9.1. [de Morera] *Si une fonction $f \in \mathscr{C}^0(\Delta)$ continue dans un disque ouvert non vide $\Delta \subset \mathbb{C}$ satisfait, pour tout triangle fermé plein $T = \overline{T} \subset \Delta$:*

$$0 \,=\, \int_{\partial T} f(z)\, dz,$$

alors $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ est holomorphe.

Démonstration. Notons z_0 le centre de Δ. Une répétition de la preuve du Théorème 3.1 de Cauchy convainc que la fonction :

$$F(z) \,:=\, \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (z \in \Delta)$$

est $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe), de dérivée $F' = f$.

Maintenant, grâce au Théorème 7.1 de régularité et à son Corollaire 7.2, F est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, donc $f' = (F')'$ existe, *i.e.* $f \in \mathscr{O}(\Delta)$. □

Prochain théorème « *magique* » : Si une suite de fonctions holomorphes converge uniformément sur (tous) les compacts d'un ouvert, alors la fonction-limite est non seulement continue — théorème classique —, mais aussi holomorphe, donc lisse. On dirait de la prestidigitation !

Contraste déroutant avec la théorie des fonctions de variables réelles ! Par exemple, le cours d'Analyse de Fourier a fait voir que la fonction de Weierstrass :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\big(2\pi b^n\, x\big)$$

avec $0 < a < 1$ et $ab \geqslant 1$, est continue mais n'est dérivable en *aucun* point : dans le monde réel la convergence uniforme n'assure nullement la dérivabilité, mais dans le monde imaginaire, si !

Théorème 9.2. [Cauchy 10] *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui converge en tout point vers une certaine fonction-limite $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, uniformément sur chaque compact de Ω :*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} \big|f_n(z) - f(z)\big| \qquad (\forall\, K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Alors la fonction-limite $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe.

Démonstration. L'idée, splendide, consiste à déduire cela du Théorème 9.1 de Morera.

Soit Δ un disque ouvert non vide quelconque avec $\Delta \subset \Omega$. Pour vérifier que f est holomorphe dans Δ, soit $T = \overline{T} \subset \Delta$ un triangle fermé quelconque. Comme les $f_n \in \mathscr{O}(\Delta)$ y sont holomorphes, Goursat offre :

$$\int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0 \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Comme $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément sur le compact $\overline{T} \subset \Delta \subset \Omega$, donc sur ∂T, nous avons le droit d'intervertir $\lim \int f_n = \int \lim f_n$, ce qui nous donne :

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0,$$

et comme cela est vrai pour *tous* les triangles fermés pleins contenus dans Δ, Morera nous garantit que $f \in \mathscr{O}(\Delta)$. Enfin, $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, car l'holomorphie est une condition locale, et en tout point $z_0 \in \Omega$, on peut centrer un disque $\Delta \ni z_0$ avec $\Delta \subset \Omega$. $\square$

Maintenant, qu'en est-il de la suite des fonctions dérivées $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$? Dans le monde réel, tout le monde sait que la convergence uniforme n'entraîne presque jamais celle des fonctions dérivées. Et dans le monde holomorphe ?

En fait, étant donné une série entière $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ ayant un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que la série dérivée terme à terme $\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, a_{\nu+1}\, z^\nu$ possède le même rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, et par conséquent, les sommes partielles :

$$f_n(z) := \sum_{0\leqslant\nu\leqslant n} a_\nu\, z^\nu \qquad \text{de dérivées} \qquad f_n'(z) = \sum_{0\leqslant\nu\leqslant n-1} (\nu+1)\, a_{\nu+1}\, z^\nu,$$

satisfont simultanément la convergence uniforme sur tout sous-disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ avec $0 < r < \mathrm{R}$:

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \max_{|z|\leqslant r} \big|f_n(z) - f(z)\big| \;=\; \lim_{n\to\infty} \max_{|z|\leqslant r} \big|f_n'(z) - f'(z)\big|.$$

Le théorème suivant montre que ceci reste vrai dans la situation la plus générale possible.

Théorème 9.3. [Cauchy 11] *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ converge, uniformément sur chaque compact de Ω, vers une fonction-limite $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ — holomorphe d'après le Théorème 9.2 —, alors il en va de même pour la suite $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ de ses dérivées :*

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} \big|f_n'(z) - f'(z)\big| \qquad (\forall\, K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Le même Théorème 9.2 refait voir que $f' \in \mathscr{O}(\Omega)$, ce que l'on savait déjà.

Démonstration. Soit donc $K \subset \Omega$ un compact quelconque. Pour $\delta > 0$ assez petit, l'ensemble :

$$K_\delta \;:=\; \big\{z \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,(z, K) \leqslant \delta\big\}$$

est aussi compact, avec (exercice de topologie) :

$$K \;\subset\; \mathsf{Int}\, K_\delta \;\subset\; K_\delta \;\subset\; \Omega.$$

La version générale des inégalités de Cauchy du Théorème 8.6 appliquée à une seule dérivée de la suite $\{f_n - f\}_{n=1}^{\infty}$ et au compact élargi $L := K_\delta$, fournit alors une constante positive $C = C_{K,\delta} < \infty$ qui contrôle la convergence uniforme sur K :

$$\begin{aligned} \max_{z\in K} \big|(f_n - f)'(z)\big| \;&\leqslant\; C \max_{w\in K_\delta} \big|(f_n - f)(w)\big| \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0. \end{aligned}$$

□

Évidemment, ce que nous venons de faire pour une seule dérivée fonctionne pour les dérivées de tous ordres, soit en itérant (sans retenue !) l'énoncé par pure logique directe, soit en nous souvenant que le Théorème 8.6 était profilé pour des dérivées d'ordre quelconque.

Théorème 9.4. *Sous les mêmes hypothèses :*

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} \big|f_n^{(\kappa)}(z) - f^{(\kappa)}(z)\big| \qquad (\forall\, \kappa \geqslant 1,\ \forall\, K \subset \Omega \text{ compact}).$$ □

En pratique, on utilise ces théorèmes de convergence uniforme pour construire certaines fonctions holomorphes nouvelles qui jouissent de propriétés intéressantes, très souvent définies commes séries infinies :

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans une région donnée $\Omega \subset \mathbb{C}$. La plupart du temps, il est assez facile de vérifier qu'il y a convergence uniforme, et donc, les théorèmes qui précèdent garantissent que cette somme infinie est elle-même holomorphe, et qu'on peut la dériver terme à terme indéfiniment — ce qui est fort pratique !

Par exemple, de nombreuses fonctions spéciales sont définies sous forme de série infinie d'une variable réelle x ; on remplace alors x par une variable complexe z, et on recherche les

lieux où il y a convergence (uniforme). Spécifiquement, nous étudierons dans un chapitre ultérieur la célèbre *fonction zêta de Riemann :*

$$\zeta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Une variante des séries de fonctions holomorphes, tout aussi fréquente et utile, consiste en les fonctions qui sont définies par des intégrales sur un segment réel du type :

$$f(z) := \int_a^b F(z,s)\, ds,$$

ou encore, des limites de telles intégrales. Ici, la fonction F est supposée holomorphe en son premier argument, et continue en son second. Pour simplifier, l'intégrale est prise au sens de Riemann sur l'intervalle borné $[a,b]$. Le problème est d'établir que f est holomorphe. Par exemple, nous étudierons dans un prochain chapitre la *fonction Gamma d'Euler*, définie pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, z > 0$ par :

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt.$$

Dans le théorème qui suit, nous imposons une condition suffisante sur F qui est souvent vérifiée en pratique, et qui implique facilement que f est holomorphe. Après un changement affine de variable réelle, nous pouvons supposer que $a = 0$ et $b = 1$.

Théorème 9.5. *Soit $F = F(z,s)$ une fonction définie pour $(z,s) \in \Omega \times [0,1]$, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, qui satisfait les deux propriétés suivantes :*

- *$F(z,s)$ est holomorphe en z pour tout $s \in [0,1]$ fixé ;*
- *F est continue sur $\Omega \times [0,1]$.*

Alors la fonction définie dans Ω par :

$$f(z) := \int_0^1 F(z,s)\, ds,$$

est holomorphe dans Ω.

La continuité supposée est une continuité par rapport aux *trois* variables (x,y,s) avec $x + i\,y \in \Omega$ et $s \in [0,1]$.

Démonstration. Pour obtenir ce résultat fondamental, il suffit de montrer que f est holomorphe dans tout disque ouvert Δ avec $\Delta \subset \Omega$, et grâce au Théorème 9.1 de Morera, il suffit même de faire voir que pour tout triangle fermé $T = \overline{T} \subset \Delta$, on a :

$$0 = \int_{\partial T} \int_0^1 F(z,s)\, ds\, dz.$$

Ici, un simple échange de l'ordre d'intégration conduirait au résultat, puisque F est holomorphe en z, donc satisfait la condition de Morera. Le théorème de type Fubini dans la théorie de l'intégration de Riemann justifie d'ailleurs immédiatement cela (exercice de révision).

Toutefois, nous pouvons contourner l'emploi du théorème de Fubini, en approximant l'intégrale par des sommes de Riemann :

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\big(z, \tfrac{k}{n}\big) \qquad (n \geqslant 1).$$

Ici, toutes ces sommes finies $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes $\frac{1}{n} F\big(z, \frac{k}{n}\big)$ sont holomorphes.

Affirmation 9.6. *Sur tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$, les f_n convergent uniformément vers $f(z) = \int_0^1 F(z,s)\, ds$.*

Preuve. La fonction F étant continue sur le compact $\overline{\Delta} \times [0,1]$, elle y est uniformément continue, ce qui entraîne (exercice) :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(|s_1 - s_2| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \max_{z \in \overline{\Delta}} \big| F(z,s_1) - F(z,s_2) \big| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Maintenant, en choisissant $n \geqslant \frac{1}{\delta}$ assez grand, nous pouvons effectuer une estimation uniforme valable pour tout $z \in \overline{\Delta}$ qui prouve l'affirmation :

$$\begin{aligned}
\big| f_n(z) - f(z) \big| &= \Bigg| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big(F\big(z, \tfrac{k}{n}\big) - F(z,s) \Big)\, ds \Bigg| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big| F\big(z, \tfrac{k}{n}\big) - F(z,s) \Big|\, ds \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \varepsilon\, ds \\
&= \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ainsi, on a convergence uniforme $f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$ sur le disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$, et le Théorème 9.2 conclut que $f \in \mathscr{O}(\Delta)$. $\square$

10. Principe de symétrie de Schwarz

En Analyse réelle, il se produit de nombreuses circonstances où l'on désire étendre à un domaine plus grand des fonctions initialement définies dans une certaine région bien visible. Des techniques diverses existent afin de produire de telles extensions, notamment pour des fonctions qui sont continues ou qui jouissent de propriétés de différentiabilité variées. Bien entendu, les difficultés s'accroissent avec les exigences de lissité, mais tant qu'on reste dans l'univers des fonctions non développables en série entière, l'existence *e.g.* de fonctions-plateau — vues dans le cours d'Analyse de Fourier — permet de jouer avec elles presque comme avec de la pâte à modeler.

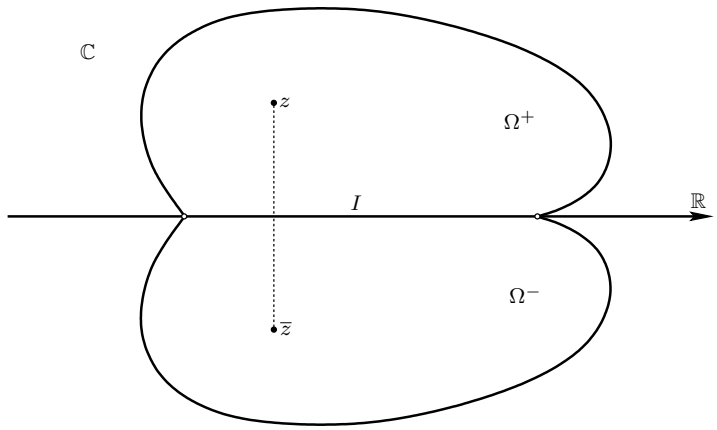
À l'inverse, la situation est très différente pour les fonctions holomorphes, car non seulement ces fonctions sont indéfiniment différentiables dans leur région initiale de définition, mais aussi, elles sont localement développables en série entière convergente, ce qui est une rigidité additionnelle vraiment caractéristique et limitante. Par exemple, il existe des fonctions holomorphes dans un disque ouvert qui sont continues dans la fermeture de ce disque, mais qu'il est impossible de prolonger holomorphiquement au-delà du cercle-bord, comme le montre l'Exercice 29.

Une autre contrainte à respecter quand on cherche à prolonger des fonctions holomorphes est le principe d'identité : une fonction holomorphe devient identiquement nulle si elle vaut zéro sur un sous-ouvert non vide, ou même sur un segment réel non réduit à un point. Ainsi, les fonctions-plateau, nulles en-dehors d'un compact, sont à proscrire !

Nonobstant ces obstacles, cette section présente un phénomène de prolongement assez simple et très utile dans les applications à la théorie des applications conformes : le *Principe de réflexion de Schwarz*. Sa démonstration consiste en deux parties : définir le prolongement, puis vérifier qu'il est holomorphe. Commençons par le second point.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert qui est symétrique par conjugaison complexe, à savoir qui satisfait :

$$z \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} \in \Omega.$$



Soit Ω^+ la partie de Ω située au-dessus de l'axe réel, et soit Ω^- celle en-dessous. Aussi, soit $I := \Omega \cap \mathbb{R}$, de telle sorte que :

$$\Omega^- \cup I \cup \Omega^+ \,=\, \Omega.$$

On suppose implicitement que $I \neq \emptyset$, sinon, le théorème suivant n'a pas d'intérêt.

Théorème 10.1. [Principe de symétrie] *Si $f^- \in \mathscr{O}(\Omega^-)$ et $f^+ \in \mathscr{O}(\Omega^+)$ sont deux fonctions holomorphes qui se prolongent continûment à I :*

$$f^- \,\in\, \mathscr{C}^0\big(\Omega^- \cup I\big) \qquad \textit{et} \qquad f^+ \,\in\, \mathscr{C}^0\big(\Omega^+ \cup I\big),$$

avec des valeurs coïncidantes :

$$f^-(x) \,=\, f^+(x) \qquad (\forall\, x \in I),$$

alors la fonction continue définie dans Ω tout entier par :

$$f(z) \,:=\, \begin{cases} f^-(z) & \text{lorsque } z \,\in\, \Omega^-, \\ f^-(z) \,=\, f^+(z) & \text{lorsque } z \,\in\, I, \\ f^+(z) & \text{lorsque } z \,\in\, \Omega^+, \end{cases}$$

est holomorphe dans Ω.

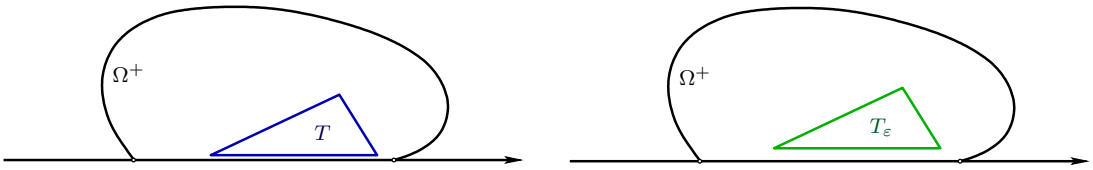
Démonstration. Effectivement, on vérifie (exercice) que f est continue dans Ω.

Pour établir l'holomorphie, faisons appel au Théorème 9.1 Morera. Soit Δ un disque centré en un point de I avec $\overline{\Delta} \subset \Omega$. Soit $T = \overline{T} \subset \Delta$ un triangle plein fermé contenu dans le disque.

Quand T n'intersecte pas I, d'où $T \subset \Omega^-$ ou $T \subset \Omega^+$, on a gratuitement :

$$0 = \int_{\partial T} f(z)\, dz,$$

puisque f est supposée holomorphe dans $\Omega^- \cup \Omega^+$.



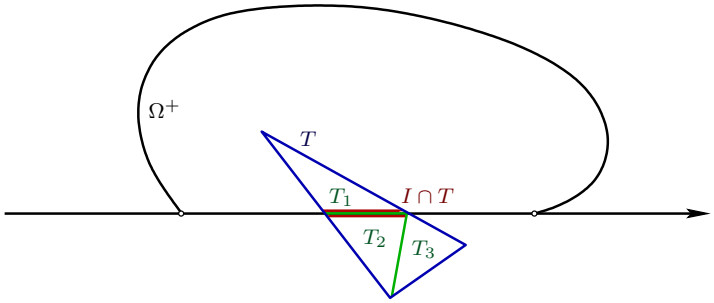
Ensuite, supposons premièrement qu'un côté ou un sommet de T rencontre I, tandis que le reste se trouve entièrement, disons, dans le demi-plan supérieur :

$$T \subset I \cup \Omega^+.$$

Dans ce cas, le triangle $T_\varepsilon := T + i\,\varepsilon$ poussé vers le haut d'une hauteur 'infinitésimale' $\varepsilon > 0$ est entièrement contenu dans la zone où $f = f^+$ est holomorphe, donc on a :

$$0 = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)\, dz,$$

et en faisant tendre $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, la continuité de f donne bien $0 = \int_{\partial T} f(z)\, dz$. Le cas où $T \subset I \cup \Omega^-$ est similaire.



Enfin, supposons deuxièmement que le triangle T en question intersecte I en son intérieur. Une découpe de T en trois triangles T_1, T_2, T_3 par le couteau $I \cap T$ nous ramène à la situation que nous venons de traiter. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 10.2. [Principe de réflexion de Schwarz] *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert invariant par conjugaison complexe $z \longmapsto \overline{z}$ tel que l'intersection $I := \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ soit non vide, et si :*

$$\Omega^- := \Omega \cap \big\{\mathsf{Im}\, z < 0\big\}, \qquad \Omega^+ := \Omega \cap \big\{\mathsf{Im}\, z > 0\big\},$$

alors toute fonction holomorphe définie au-dessus et continue jusqu'à I :

$$f^+ \in \mathscr{O}(\Omega^+) \cap \mathscr{C}^0\big(I \cap \Omega^+\big),$$

et qui prend des valeurs réelles sur I :

$$f^+(x) \in \mathbb{R} \qquad (\forall\, x \in I),$$

admet un prolongement holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ unique à l'ouvert $\Omega = \Omega^- \cup I \cup \Omega^+$, dont les valeurs sont définies en-dessous par :

$$f^-(z) := \overline{f^+(\overline{z})} \qquad (\forall\, z \in \Omega^-).$$

Démonstration. Au voisinage d'un point $z_0 \in \Omega^-$, disons dans un disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega^-$, les valeurs $\overline{z}$ pour $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ appartiennent au symétrique de ce disque, donc sont contenues dans Ω^+ où f^+ est holomorphe :

$$f^+(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\overline{z} - \overline{z}_0\right)^n,$$

avec $a_n := \frac{1}{n!}\,(f^+)^{(n)}(\overline{z}_0)$ et un rayon de convergence $\geqslant r$. Une simple conjugaison :

$$\overline{f^+(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n \left(z - z_0\right)^n,$$

— qui n'altère en rien le rayon de convergence ! — montre clairement le caractère *holomorphe* de f^- dans $\mathbb{D}_r(z_0)$, donc partout dans Ω^-.

Ensuite, en un point $x_0 \in I$, puisque $f^+(x) \in \mathbb{R}$ pour $x \in I$ proche de x_0, la continuité de f^+ sur $I \cup \Omega^+$ garantit, pour la fonction f^- ainsi définie, que $f^-(x_0 + h) \longrightarrow f^+(x_0)$ quand $h \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} h < 0$ tend vers 0, donc le prolongement f est continu partout dans $\Omega^- \cup I \cup \Omega^+$.

Enfin, en notant que $f^-(x) = f^+(x)$ pour tout $x \in I$, le Principe de symétrie 10.1, spécialement concocté à l'avance, conclut en beauté l'argumentation. $\square$

11. Théorème d'approximation de Weierstrass complexe dans un disque

Sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, le célèbre *Théorème de Weierstrass* stipule que toute fonction continue $f \in \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ peut être approximée à volonté en norme uniforme par de simples polynômes :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P = P_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{tel que} \quad \max_{x \in [a,b]} \big|f(x) - P(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Question 11.1. *Existe-t-il un résultat similaire en Analyse Complexe ?*

Attention : tout devient 2-dimensionnel !

Nous allons regarder un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$, éventuellement d'intérieur non vide, et des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage ouvert $\Omega \supset K$, éventuellement très « resserré » autour de K. Dans ces circonstances, a-t-on :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) = P_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon\,\textbf{?}$$

Cela serait un résultat remarquable, car les polynômes sont des objets globaux, définis pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Commençons par examiner le cas simple où $\Omega = \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0)$ est un disque ouvert de rayon :

$$0 < \mathrm{R} \leqslant \infty,$$

centré en un certain point fixé $z_0 \in \mathbb{C}$. Le cas $\mathrm{R} = \infty$ correspond à $\Omega = \mathbb{C}$.

Théorème 11.2. *Les fonctions holomorphes dans un disque $\mathbb{D}_{\mathrm{R}} = \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0)$ de rayon $0 < \mathrm{R} \leqslant \infty$ sont approximables uniformément sur les compacts $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ par des polynômes :*

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) = P_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \textit{tel que} \quad \max_{z \in K} \big| f(z) - P(z) \big| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Après translation, on se ramène à $z_0 = 0$. En vertu d'un théorème vu dans le chapitre qui précède, toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big)$ a une série de Taylor en tout point $w \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ qui converge au moins dans le plus grand disque centré en w qui est contenu dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Au point $w = 0$, ce plus grand disque coïncide avec $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, et donc en vertu de ce résultat, la fonction f est représentée par une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ qui converge dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$.

Soit donc une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ à coefficients complexes $a_n \in \mathbb{C}$, dont le rayon de convergence R satisfait :

$$0 < \mathrm{R} \leqslant \infty.$$

D'après le chapitre qui précède, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ est défini par :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Par conséquent, la définition de la limite supérieure fournit, pour tout $\delta > 0$, un entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\delta) \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} + \delta.$$

Maintenant, soit un compact $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ contenu dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ centré en l'origine de $\mathbb{C}$. D'après un théorème topologique qui a déjà été vu, la distance entre K et le complémentaire fermé $\mathbb{C} \backslash \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ est strictement positive, et si on prend $0 < r < \mathrm{R}$ satisfaisant :

$$0 < \mathrm{R} - r < \mathsf{dist}\big(K,\, \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big),$$

alors on assure que :

$$K \subset \overline{\mathbb{D}}_r.$$

Choisissons maintenant $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$q := \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)\, r < 1.$$

L'inégalité triangulaire suivie de la sommation d'une série géométrique offre pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n \Big| &\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \big|a_n\big|\, |z|^n \\
[z \in K \Longrightarrow |z| \leqslant r] \qquad &\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)^n\, r^n \\
&= q^{\mathrm{N}} \sum_{m=0}^{\infty} q^m \\
&\leqslant q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q}.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Toujours avec $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, et avec δ assez petit pour que $\big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\big)\, r \,=\, q < 1$, choisissons $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ et $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grands pour qu'on ait :

$$\begin{aligned} n \,\geqslant\, \mathrm{N}(\delta) \qquad &\Longrightarrow \qquad \big|a_n\big| \,\leqslant\, \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)^n, \\ \mathrm{N} \,\geqslant\, \mathrm{N}(\varepsilon) \qquad &\Longrightarrow \qquad q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q} \,\leqslant\, \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui est possible car $q^{\mathrm{N}} \longrightarrow 0$ quand $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. En prenant :

$$\mathrm{N} \,:=\, \mathsf{max}\big(\mathrm{N}(\delta),\, \mathrm{N}(\varepsilon)\big),$$

si on découpe alors la série qui représente $f(z)$ en deux morceaux :

$$f(z) \,=\, \underbrace{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} a_n\, z^n}_{=:\, P(z)} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n,$$

dont le premier est visiblement un polynôme de degré $\leqslant \mathrm{N}-1$, on atteint l'inégalité conclusive :

$$\begin{aligned} \mathsf{max}_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \,&=\, \mathsf{max}_{z\in K} \Big|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\Big| \\ &\leqslant\, q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q} \\ &\leqslant\, \varepsilon. \end{aligned}$$

□

12. Théorème de Runge rationnel

Approfondissons maintenant les réflexions de la Section **11** précédente. Soit donc $K \subset \mathbb{C}$ un compact, et soit $\Omega \supset K$ un ouvert. On ne suppose pas que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe : seule la Section **13** suivante fera cette hypothèse topologique significative.

Tout d'abord, si $K = \big\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\big\}$ est le cercle unité, nous affirmons que la fonction $f(z) := \frac{1}{z}$ définie dans un anneau $\Omega := \big\{\frac{1}{r} < |z| < r\big\}$ avec $r > 1$ ne satisfait *pas* la propriété d'approximation polynomiale :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \mathsf{max}_{z\in K} \Big|\frac{1}{z} - P(z)\Big| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

En effet, observons que l'intégrale bien connue suivante est non nulle :

$$\int_K \frac{1}{z}\, dz \,=\, \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta \,=\, 2i\pi,$$

tandis que, pour tout polynôme $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ qui est holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C}$ qui contient l'intérieur de Jordan $\mathbb{D}$ (disque unité) de $K = C$ (cercle unité), le premier théorème de Cauchy donne :

$$0 \,=\, \int_K P(z)\, dz.$$

Maintenant, soit $0 < \varepsilon < 1$ quelconque. S'il existait un polynôme $P(z)$ satisfaisant la propriété d'approximation en question, alors par un jeu taquin d'inégalités taquines :

$$\begin{aligned} 2\pi \,=\, \big|2i\pi\big| \,&=\, \bigg|\int_K \Big(\frac{1}{z} - P(z)\Big)\,dz\bigg| \\ &\leqslant\, \int_K \Big|\frac{1}{z} - P(z)\Big|\,\big|dz\big| \\ &\leqslant\, \varepsilon \int_C \big|dz\big| \\ &=\, \varepsilon\, 2\pi, \end{aligned}$$

on en déduirait $2\pi \leqslant \varepsilon\, 2\pi$ qui équivaudrait à l'absurdité fatale $1 \leqslant \varepsilon$. Moralité :

Observation 12.1. *Quand K a un, voire plusieurs, « trous », les fonctions holomorphes au voisinage de K ne sont en général pas approximables sur K par des polynômes.*

Dans la Section **13** suivante, nous verrons qu'il existe un théorème positif d'approximation polynomiale quand $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe. Pour l'instant, continuons à nous interroger sur le cas où le compact $K \subset \mathbb{C}$ est quelconque.

La fonction $\frac{1}{z}$ a un pôle en $z = 0$, à l'intérieur (hors) de $K = C$. En tout cas, ce contre-exemple $\frac{1}{z}$ suggère d'utiliser pour l'approximation uniforme non pas des polynômes, mais des fractions rationnelles à pôles hors de K.

Théorème 12.2. [de Runge rationnel] *Pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ et pour tout voisinage ouvert $\Omega \supset K$, les fonctions holomorphes dans Ω peuvent être approximées à volonté sur K par des fractions rationnelles sans pôles sur K, c'est-à-dire :*

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P \in \mathbb{C}[z] \quad \exists\, Q \in \mathbb{C}[z] \ \textit{avec}\ \ Q\big|_K \neq 0$$
$$\textit{tels que} \quad \max_{z\in K}\bigg|f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)}\bigg| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Dans un chapitre qui précède, on a vu que pour $K \subset \Omega$ compact contenu dans un ouvert, on a toujours :

$$\mathsf{dist}\,\big(K,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \,>\, 0.$$

Avec un réel $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on pose alors et on fixe définitivement :

$$\delta \,:=\, \alpha\, \mathsf{dist}\,\big(K,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \,>\, 0.$$

On considère le réseau δ-*renormalisé* de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$, à savoir :

$$\big(\mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}\big)\,\delta \,:=\, \big\{(k + i\ell)\,\delta\colon\ k, \ell \in \mathbb{Z}\big\},$$

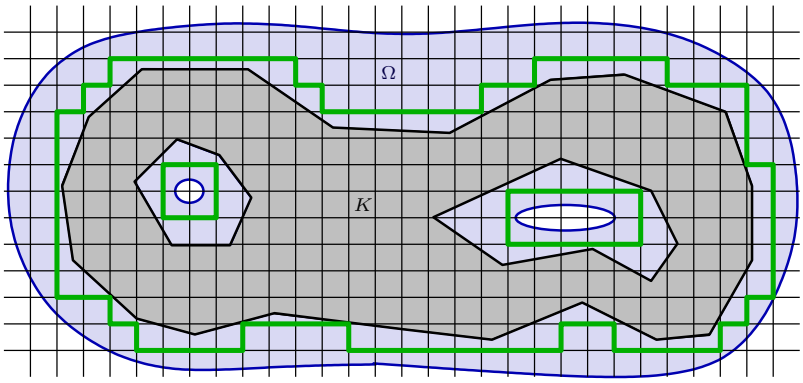
et on regarde tous les carrés pleins fermés de côté δ que ce réseau découpe :

$$\overline{\Pi}_{k,\ell} \,:=\, \big\{x + iy \in \mathbb{C}\colon\ k\delta \leqslant x \leqslant (k+1)\delta,\ \ \ell\delta \leqslant y \leqslant (\ell+1)\delta\big\} \qquad {\scriptstyle (k,\,\ell\,\in\,\mathbb{Z})},$$

dont la réunion *pave* le plan tout entier de manière presque disjointe :

$$\mathbb{C} \,=\, \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\ \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}}\ \overline{\Pi}_{k,\ell}.$$

Leur intérieur, défini par des inégalités strictes, sera noté $\Pi_{k,\ell}$, et leur bord, consistant en 4 segments de longueur δ (> 0) parallèles aux axes $0x$ et $0y$, sera noté $\partial\Pi_{k,\ell} = \partial\overline{\Pi}_{k,\ell}$.



Maintenant, on note $\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_{\mathrm{J}}$ avec $\mathrm{J} \geqslant 1$ entier la collection de *tous* les $\overline{\Pi}_{k,\ell}$ qui *intersectent* $K \neq \emptyset$. Enfin, on note $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mathrm{H}}$ avec $\mathrm{H} \geqslant 1$ entier les segments de longueur δ qui appartiennent au bord d'un unique carré $\overline{\Pi}_j$, *sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents*. Autrement dit, on *supprime* tous les bords adjacents, comme sur la figure. Quitte à réajuster légèrement le côté $\delta > 0$ de la grille, ou à translater légèrement K, on peut supposer que K contient au moins un point qui n'est pas sur la grille, c'est-à-dire au moins un point à l'intérieur d'un carré.

Sur la figure, le compact K est en foncé, avec des bords anguleux. Le complémentaire $\mathbb{C}\backslash K$ contient trois composantes connexes. L'ouvert $\Omega \supset K$ est d'une forme analogue, mais son bord est représenté de manière courbée et lisse. La grille est bien visible. Les traits très épais représentent les segments $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mathrm{H}}$. Les carrés $\overline{\Pi}_j$ qui intersectent et recouvrent K ne sont pas explicitement représentés.

Si un point $z \in \overline{\Pi}_j \cap K$ est donné, alors pour tout autre point $w \in \overline{\Pi}_j$, puisqu'il est bien connu que le diamètre d'un carré de côté $\delta > 0$ vaut $\sqrt{2}\,\delta$, il vient :

$$\big|z - w\big| \leqslant \mathsf{diam}\,\overline{\Pi}_j \leqslant \sqrt{2}\,\delta.$$

Par hypothèse, chaque $\overline{\Pi}_j$ possède au moins un point en commun avec le compact K, disons $z_j \in \overline{\Pi}_j \cap K$. Or nous venons de voir que :

$$\overline{\Pi}_j \subset \overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}\,\delta}\big(z_j\big).$$

Mais grâce à l'hypothèse $\sqrt{2}\,\alpha < 1$, tout se situe à distance *strictement inférieure* à la distance au complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Omega$ de l'ouvert :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\delta &= \sqrt{2}\,\alpha\,\mathsf{dist}\,\big(K,\,\mathbb{C}\backslash\Omega\big)\\ &< \mathsf{dist}\,\big(K,\,\mathbb{C}\backslash\Omega\big),\end{aligned}$$

donc chaque disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}\,\delta}(z_j) \subset \Omega$ est contenu dans l'ouvert, puis par inclusion $\overline{\Pi}_j \subset \Omega$, et enfin :

$$\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \mathrm{J}} \overline{\Pi}_j \subset \Omega.$$

Évidemment, puisque chaque segment γ_h est côté d'un (unique) $\overline{\Pi}_j$, il en découle sans effort :

$$\bigcup_{1 \leqslant h \leqslant \mathrm{H}} \gamma_h \subset \Omega.$$

Assertion 12.3. *Pour tout* $1 \leqslant h \leqslant \mathrm{H}$, *on a* $\gamma_h \cap K = \emptyset$.

Preuve. Si, au contraire, $\gamma_h \cap K \ni z$ contenait un point du compact, comme chaque segment de longueur δ dans le réseau est toujours bord commun entre deux carrés distincts adjacents :

$$\gamma_h \,=\, \overline{\Pi}_{k(h),\ell(h)} \cap \overline{\Pi}_{k(h)',\ell(h)'},$$

ces deux carrés adjacents intersecteraient alors tous deux K à cause du point z qu'ils ont en commun, mais alors, cela impliquerait que les deux carrés en question appartiendraient à la collection $\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_{\mathrm{J}}$, et donc que γ_h serait adjacent à deux carrés distincts de cette collection, et justement, on a *supprimé à l'avance* tous ces bords adjacents — contradiction ! $\square$

Ensuite, pour un carré $\overline{\Pi}_j$ avec $1 \leqslant j \leqslant \mathrm{J}$ quelconque, la formule de Cauchy donne :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,=\, \begin{cases} f(z) & \text{lorsque } z \in \Pi_j, \\ 0 & \text{lorsque } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\Pi}_j, \end{cases}$$

sachant qu'au niveau de ce cours, nous ne sommes pas en mesure de présenter ce qui se passe lorsque $z \in \partial \Pi_j$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ assez petit pour que le compact :

$$K_\varepsilon \,:=\, \big\{ z \in \mathbb{C} \colon \ \mathsf{dist}\,(z, K) \leqslant \varepsilon \big\},$$

qui contient l'ouvert $\mathscr{O}_\varepsilon$ contenant K défini par :

$$\mathscr{O}_\varepsilon \,:=\, \big\{ \mathsf{dist}\,(z, K) < \varepsilon \big\} \,\supset\, K,$$

satisfasse encore :

$$\emptyset \,=\, \gamma_h \cap K_\varepsilon \qquad\qquad (1 \leqslant h \leqslant \mathrm{H}),$$

donc soit encore recouvert par la même collection de carrés fermés :

$$K_\varepsilon \,\subset\, \overline{\Pi}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Pi}_{\mathrm{J}}.$$

Ici, K_ε et $\mathscr{O}_\varepsilon$ sont introduits pour des raisons techniques, utiles à la fin de la démonstration du Lemme 12.5.

Lemme 12.4. *Pour tout $z \in K_\varepsilon$ qui n'appartient à aucun bord des carrés $\overline{\Pi}_j$ (il existe au moins un tel point z), on a :*

$$f(z) \,=\, \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Notons que l'intégrale peut être calculée parce que $\partial \Pi_j \subset \Omega$ d'après ce qui précède.

Preuve. Puisque la réunion de ces carrés recouvre :

$$K_\varepsilon \,\subset\, \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \mathrm{J}} \overline{\Pi}_j,$$

si un point z est dans K_ε mais dans aucun bord, il appartient alors à un unique carré ouvert $\Pi_{j(z)}$ avec un certain indice $1 \leqslant j(z) \leqslant \mathrm{J}$, d'où grâce à ce qu'on vient de voir :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_{j(z)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

tandis que pour *tout* autre indice $j' \neq j(z)$:

$$0 \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Pi_{j'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

En sommant bêtement tout cela, la conclusion tombe comme une prune pulpeuse, flasque, juteuse :

$$\begin{aligned} f(z) + \underline{\big(\mathrm{J}-1\big)\cdot 0}_{\circ} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Pi_{j(z)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \sum_{\substack{1\leqslant j'\leqslant \mathrm{J}\\ j'\neq j(z)}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Pi_{j'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \qquad \square \end{aligned}$$

Ensuite, revenons à des points $z \in K$, y compris sur les bords des carrés $\overline{\Pi}_j$.

Lemme 12.5. *On a, pour* tout $z \in K$, *la formule de représentation :*

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\mathrm{H}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_h} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Démonstration. Tout d'abord, lorsque $z \in K_\varepsilon$, en supposant toujours que z n'appartienne à aucun bord $\partial\overline{\Pi}_1, \ldots, \partial\overline{\Pi}_{\mathrm{J}}$, dans la formule que nous venons de démontrer, toutes les intégrales sur des bords de deux carrés adjacents s'annulent par paires, puisque les orientations des segments d'intégration sont opposées, et il ne reste alors plus que les intégrales sur les bords *non-adjacents*, que nous avions notés $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mathrm{H}}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Pi_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \sum_{h=1}^{\mathrm{H}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_h} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \qquad (\forall\, z \in K_\varepsilon \setminus (\partial\overline{\Pi}_1 \cup \cdots \cup \partial\overline{\Pi}_{\mathrm{J}}). \end{aligned}$$

Ensuite, dans cette somme finie, chaque intégrale s'effectue sur un segment compact $\gamma_h \subset \Omega$ qui n'a aucune intersection avec K_ε, donc se situe à distance strictement positive de K_ε, et par conséquent, l'intégrande $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ de ces intégrales $\int_{\gamma_h}$ à paramètre $z \in K$ est *continu* par rapport à :

$$(z, \zeta) \in K_\varepsilon \times \gamma_h,$$

donc un théorème vu en cours d'Intégration (de Riemann) garantit la *continuité* par rapport à $z \in K_\varepsilon$ de ces intégrales $\int_{\gamma_h}$.

Par conséquent, la formule reste vraie par continuité en faisant tendre des points $z \in \mathscr{O}_\varepsilon$ non situés sur la réunion des bords des $\overline{\Pi}_j$ vers les points quelconques de K qui ont le malheur de rôtir sur la grille de côté δ. $\square$

Soit maintenant $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega\backslash K$ une courbe de classe $\mathscr{C}^1$, par exemple $\gamma = \gamma_h$ pour un indice $1 \leqslant h \leqslant \mathrm{H}$. Par convention, on identifie l'application γ et sa courbe-image $\gamma\big([0,1]\big) \subset \Omega\backslash K$. On introduit :

$$F_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (z \in K).$$

Lemme 12.6. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ *et* $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ *avec* $Q\big|_K \neq 0$ *tels que :*

$$\max_{z\in K}\Big|F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)}\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Pour $g \in \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{C}\big)$, les sommes de Riemann, associées à la subdivision équitable (mais non commerciale) par segments de longueur $\frac{1}{n}$ de l'intervalle compact $[0,1]$, convergent vers l'intégrale (de Riemann) de g :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} g\Big(\frac{k}{n}\Big)\,\frac{1}{n} \;=\; \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Ensuite, par définition :

$$F_\gamma(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\,\gamma'(t)\,dt,$$

ce qui conduit à examiner la fonction de $t \in [0,1]$ dépendant du paramètre $z \in K$:

$$H(z,t) \;:=\; \frac{1}{2i\pi}\,\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\,\gamma'(t).$$

Sur le compact $K \times [0,1] \ni (z,t)$, cette fonction est continue, puisque $\gamma\big([0,1]\big) \cap K = \emptyset$. Grâce au théorème de Heine-Borel, elle y est donc uniformément continue.

Or la continuité uniforme implique en particulier (exercice mental), pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| \;\leqslant\; \delta(\varepsilon) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \Big|H(z,t_1) - H(z,t_2)\Big| \;\leqslant\; \varepsilon \quad \forall\, z \in K,$$

ce, uniformément sur K.

Alors dès que $n \gg 1$ est choisi assez grand pour que $\frac{1}{n} \leqslant \delta(\varepsilon)$, la somme de Riemann associée à l'intégrale considérée :

$$F_\gamma(z) \;=\; \int_0^1 H(z,t)\,dt,$$

peut être soumise à un traitement de choc qui établit à grands coups d'inégalités triangulaires sa proximité à son intégrale-mère :

$$\begin{aligned}
\Big|F_\gamma(z) - \sum_{k=0}^{n-1} H\Big(z,\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n}\Big| \;&=\; \Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} H(z,t)\,dt - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} H\Big(z,\frac{k}{n}\Big)\,dt\Big| \\
&\leqslant\; \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \underbrace{\Big|H(z,t) - H\Big(z,\frac{k}{n}\Big)\Big|}_{\leqslant\,\varepsilon}\,dt \\
&\leqslant\; \int_0^1 \varepsilon\,dt \\
&=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de prendre conscience que cette somme de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H\Big(z,\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2i\pi}\;\underbrace{\frac{f\big(\gamma(\frac{k}{n})\big)}{\gamma(\frac{k}{n})-z}}_{\text{pôle en } z=\gamma(\frac{k}{n})}\;\gamma'\Big(\frac{k}{n}\Big)\,\frac{1}{n}$$

est une somme finie de fractions rationnelles simples à coefficients complexes, donc peut être écrite, après réduction au même dénominateur, sous la forme $\frac{P(z)}{Q(z)}$ avec deux polynômes

$P, Q \in \mathbb{C}[z]$. Comme les pôles $\gamma\big(\frac{0}{n}\big), \gamma\big(\frac{1}{n}\big), \dots, \gamma\big(\frac{n-1}{n}\big)$ se situent tous sur γ, on a bien $Q\big|_K \neq 0$ avec le dénominateur commun :

$$\frac{1}{Q} := \frac{1}{\big(\gamma(\frac{0}{n}) - z\big)\big(\gamma(\frac{1}{n}) - z\big) \cdots \big(\gamma(\frac{n-1}{n}) - z\big)}. \qquad \square$$

Nous pouvons enfin effectuer la synthèse mathématique de tout ce qui précède, et détailler rigoureusement tous les arguments manquants qui terminent la démonstration du Théorème 12.2 de Runge rationnel.

D'après ce qui précède, à chaque courbe $\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_{\mathrm{H}}$ qui survit lorsqu'on élimine les frontières communes entre les $\overline{\Pi}_j$ recouvrant K, on peut associer la transformée de Cauchy :

$$F_{\gamma_h}(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (1 \leqslant h \leqslant \mathrm{H}),$$

et puisque nous avons démontré par construction que :

$$f(z) = F_{\gamma_1}(z) + \cdots + F_{\gamma_{\mathrm{H}}}(z),$$

il suffirait, pour conclure, de montrer que *chacune* de ces fonctions $F_{\gamma_h}(z)$ possède la propriété d'approximation à volonté — mais nous venons de le faire il y a un instant !

Afin d'être parfaitement rigoureux et complet, comme cela est exigé par Dame Mathématique, il faut partir, pour tout $1 \leqslant h \leqslant \mathrm{H}$, avec ε astucieusement remplacé à l'avance par $\frac{\varepsilon}{\mathrm{H}}$, de tous les résultats d'approximation :

$$\exists\, \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \in \mathsf{Frac}\,\mathbb{C}[z] \quad \text{avec } Q_h\big|_K \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} \Big| F_{\gamma_h(z)} - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{H}},$$

puis définir :

$$\begin{aligned} Q_1(z) \cdots Q_{\mathrm{H}}(z) &=: Q(z) \quad \text{jamais nul sur } K, \\ \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \cdots + \frac{P_{\mathrm{H}}(z)}{Q_{\mathrm{H}}(z)} &=: \frac{P(z)}{Q(z)}, \end{aligned}$$

somme qui est une fraction rationnelle — car les fraction rationnelles, c'est comme les gènes, cela ne peut se mélanger qu'en produisant *aussi* des gènes —, puis effectuer une majoration classique par inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned} \Big| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \Big| &= \Big| F_{\gamma_1}(z) + \cdots + F_{\gamma_{\mathrm{H}}}(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} - \cdots - \frac{P_{\mathrm{H}}(z)}{Q_{\mathrm{H}}(z)} \Big| \\ &= \Big| F_{\gamma_1}(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \cdots + F_{\gamma_{\mathrm{H}}}(z) - \frac{P_{\mathrm{H}}(z)}{Q_{\mathrm{H}}(z)} \Big| \\ &\leqslant \Big| F_{\gamma_1}(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \Big| + \cdots + \Big| F_{\gamma_{\mathrm{H}}}(z) - \frac{P_{\mathrm{H}}(z)}{Q_{\mathrm{H}}(z)} \Big| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{H}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{\mathrm{H}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \qquad \square$$

13. Théorème de Runge polynomial

En partant d'une approximation rationnelle $\big|f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)}\big| \leqslant \varepsilon$ comme dans le Théorème 12.2 dont nous venons d'achever la démonstration, nous allons mettre au point un procédé final qui consiste à « pousser vers l'infini » les pôles de $\frac{P(z)}{Q(z)}$, procédé qui ne pourra être accompli que sous l'hypothèse que $\mathbb{C}\backslash K$ soit connexe. Nous 'transformerons' ainsi une fraction rationnelle en un polynôme.

Théorème 13.1. [de Runge polynomial] *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact dont le complémentaire $\mathbb{C}\backslash K$ est* connexe*. Alors pour tout ouvert $\Omega \supset K$, les fonctions holomorphes dans Ω sont approximables uniformément sur K par des polynômes :*

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) = P_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \textit{tel que} \quad \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Ce résultat est remarquable, car les fonctions polynomiales sont holomorphes *globalement*, définies sur $\mathbb{C}$ tout entier, tandis que les $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ ne sont définies que dans un voisinage ouvert de K.

Démonstration. Comme toute fonction rationnelle ayant pour unique pôle un point donné $z_0 \in \mathbb{C}$ peut s'écrire comme *polynôme* en la fonction-type $\frac{1}{z-z_0}$ à coefficients dans $\mathbb{C}[z]$, il suffit d'établir le lemme suivant pour conclure la démonstration de ce Théorème 13.1.

Lemme 13.2. *Si un compact $K \subset \mathbb{C}$ a un complémentaire $\mathbb{C}\backslash K$* connexe*, alors pour tout point $z_0 \notin K$, la fonction rationnelle $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approximée uniformément sur K par des polynômes de $\mathbb{C}[z]$.*

Démonstration. Soit un rayon $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand pour que $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)$. Choisissons un point hors de ce grand disque ouvert $z_1 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, et développons :

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}},$$

où cette série converge uniformément pour tout $z \in K$, comme on s'en convainc en utilisant le fait (exercice de rappel) qu'il existe un rayon $0 < r < \mathrm{R}$ strictement inférieur tel que $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r(0)$.

Grâce à cette convergence, les sommes partielles $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}$, avec $\mathrm{N} \geqslant 0$ entier quelconque, de cette série géométrique sont alors des polynômes qui approximent uniformément $\frac{1}{z-z_1}$ sur K. Ensuite, cela implique que toute puissance $\frac{1}{(z-z_1)^k}$ peut aussi être approximée uniformément sur K par des polynômes.

Il suffit maintenant d'établir que la fraction $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approximée uniformément sur K par des polynômes en $\frac{1}{z-z_1}$, avec certains $z_1 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$.

À cette fin, utilisons l'hypothèse que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe, et prenons une courbe continue $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash K$ partant de $z_0 = \gamma(0)$ et aboutissant à $\gamma(1) = z_1$. Comme $\gamma \equiv \gamma\big([0,1]\big) \subset \mathbb{C}\backslash K$ est un compact disjoint de K, le nombre réel :

$$\rho := \tfrac{1}{2}\,\mathsf{dist}\,\big(\gamma, K\big) > 0$$

est strictement positif.

Choisissons alors une suite de points $\big\{w_0, w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}}\big\}$ sur γ avec $z_0 = w_1$ et $w_{\mathrm{L}} = z_1$ assez nombreux pour que :

$$\big|w_\ell - w_{\ell+1}\big| \leqslant \rho \qquad (0 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}-1)$$

Assertion 13.3. *Pour toute paire de points $w, w' \in \gamma$ situés à distance :*

$$\big|w - w'\big| \leqslant \rho,$$

la fraction rationnelle $z \longmapsto \frac{1}{z-w}$ peut être approximée uniformément sur K par des polynômes en $z \longmapsto \frac{1}{z-w'}$.

Preuve. En effet, avec $z \in K$, nous pouvons développer :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-w'}\,\frac{1}{1-\frac{w-w'}{z-w'}}\\ &= \frac{1}{z-w'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-w'}{z-w'}\right)^n,\end{aligned}$$

et comme cette somme converge uniformément pour $z \in K$ grâce à :

$$\left|\frac{w-w'}{z-w'}\right| \leqslant \frac{\rho}{\mathsf{dist}\,(\gamma, K)} = \frac{1}{2},$$

de simples approximations par des sommes partielles $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}$ fonctionnent. □

Ce résultat nous permet donc de voyager de z_0 vers z_1 en effectuant un nombre fini d'arrêts « approximatifs » aux point-auberges $\{w_\ell\}_{0\leqslant\ell\leqslant\mathrm{L}}$, et pas à pas, de conclure à dos de cheval que $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approximée uniformément sur K par des polynômes en $\frac{1}{z-z_1}$.

Ceci conclut la démonstration du Lemme 13.2, et simultanément aussi, celle du Théorème 13.1. □

14. Approximation polynomiale sur des ouverts à complémentaire connexe

Le Théorème 13.1 vient de faire voir que les compacts $K \subset \mathbb{C}$ dont le complémentaire $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe permettent aux fonctions qui sont holomorphes dans leur voisinage d'être approximées à volonté par des polynômes. L'énoncé est vrai quel que soit l'ouvert $\Omega \supset K$, même lorsque Ω n'est qu'un « épaississement infinitésimal » de K.

En faisant « tendre » $\Omega \longrightarrow K$, on pourrait alors s'imaginer que la connexité de $\mathbb{C}\backslash K$ est essentiellement équivalente à la connexité de $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

Soit donc un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ dont le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est connexe. Nous allons voir que certains compacts bien choisis $L \subset \Omega$ ont eux aussi un complémentaire $\mathbb{C}\backslash L$ connexe. Commençons par un préliminaire.

Lemme 14.1. *Étant donné deux ouverts $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2 \subset \mathbb{C}$ non vides disjoints, quels que soient $z_1 \in \mathscr{O}_1$ et $z_2 \in \mathscr{O}_2$, il est impossible que le segment $[z_1, z_2]$ soit contenu dans leur réunion :*

$$[z_1, z_2] \not\subset \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2.$$

Démonstration. Sinon, si $[z_1, z_2] \subset \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$, alors le segment d'intérieur non vide $[z_1, z_2] = I_1 \cup I_2$ est réunion des deux ouverts (relatifs) non vides :

$$I_1 := \mathscr{O}_1 \cap [z_1, z_2] \qquad \text{et} \qquad I_2 := \mathscr{O}_2 \cap [z_1, z_2],$$

ce qui contredit la connexité de $[z_1, z_2]$. □

Proposition 14.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert* borné *dont le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est connexe. Alors pour tout $\delta > 0$, le sous-ensemble compact de Ω :*

$$L_\delta := \big\{z \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \delta\big\}$$

a un complémentaire $\mathbb{C}\big\backslash L_\delta$ qui est lui aussi connexe.

En particulier, il y a une homologie entre le fait que le fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega =: F_\infty$ consiste une unique composante connexe F_∞ qui s'échappe vers l'infini, et le fait que l'ouvert $\mathbb{C}\backslash K =: \mathscr{O}_\infty$ est lui aussi connexe allant vers l'infini.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\mathbb{C}\backslash L_\delta$ est réunion de deux ouverts *non vides* disjoints :

$$\mathbb{C}\big\backslash L_\delta \,=\, \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2, \qquad\qquad \emptyset \,=\, \mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2.$$

Comme $L_\delta \subset \Omega$, on a $\mathbb{C}\backslash\Omega \subset \mathbb{C}\backslash L_\delta$, d'où :

$$\mathbb{C}\backslash\Omega \,\subset\, \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2. \tag{14.3}$$

Introduisons alors les deux ensembles :

$$F_1 \,:=\, \mathscr{O}_1 \cap \big(\mathbb{C}\backslash\Omega\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad F_2 \,:=\, \mathscr{O}_2 \cap \big(\mathbb{C}\backslash\Omega\big).$$

Puisqu'on a alors $\mathbb{C}\backslash\Omega = F_1 \cup F_2$, afin d'atteindre une contradiction, nous allons montrer que F_1 et F_2 sont non vides, disjoints, fermés.

Assertion 14.4. *$F_1 \neq \emptyset$ et $F_2 \neq \emptyset$.*

Preuve. Sinon $F_1 = \emptyset$ — le cas $F_2 = \emptyset$ étant symétrique —, et cherchons une contradiction. Autrement dit, $\mathscr{O}_1 \subset \Omega$, d'où via (14.3) :

$$\mathbb{C}\backslash\Omega \,\subset\, \mathscr{O}_2.$$

Prenons un point quelconque $w \in \mathscr{O}_1$, donc $w \in \mathbb{C}\backslash L_\delta$. Alors par définition de L_δ, on a $\mathrm{dist}\big(w, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) < \delta$, donc il existe un point $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ avec $|w - z| < \delta$. Ensuite, tout point $\zeta \in [z, w]$ sur le segment satisfait :

$$|\zeta - z| \,\leqslant\, |w - z| \,<\, \delta,$$

donc $\mathrm{dist}\big(\zeta, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) < \delta$, et ainsi $\zeta \notin L_\delta$, c'est-à-dire :

$$[z, w] \,\subset\, \mathbb{C}\backslash L_\delta.$$

Nous sommes alors parvenus à une situation :

- $w \,\in\, \mathscr{O}_1$,
- $z \,\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega \,\subset\, \mathscr{O}_2$,
- $[z, w] \,\subset\, \mathbb{C}\big\backslash L_\delta \,=\, \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$,

que nous savons déjà impossible, grâce au Lemme 14.1, ce qui est l'absurdité recherchée. □

Assertion 14.5. *F_1 et F_2 sont disjoints.*

Preuve. Comme $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 = \emptyset$, il est clair que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ aussi. □

Assertion 14.6. *F_1 et F_2 sont fermés.*

Preuve. Pour voir que F_1 est fermé (*idem* par symétrie pour F_2), soit une suite de Cauchy quelconque $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de points $z_n \in F_1$ qui converge vers un point $z_\infty \in \mathbb{C}$.

Comme $F_1 \,\subset\, \mathscr{O}_1$, on a $z_n \,\in\, \mathscr{O}_1$. Comme $F_1 \,\subset\, \mathbb{C}\backslash\Omega$ qui est fermé, ce point-limite satisfait :

$$z_\infty \,\in\, \mathbb{C}\backslash\Omega.$$

Comme $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est à distance finie $\delta > 0$ de L_δ, on en déduit que :

$$z_\infty \notin L_\delta, \qquad\qquad \text{donc} \quad z_\infty \in \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2.$$

Ensuite, il est impossible que $z_\infty \in \mathscr{O}_2$, car par ouverture de $\mathscr{O}_2$, les z_n pour n grand appartiendraient aussi à $\mathscr{O}_2$, mais on vient de voir que tous les $z_n \in \mathscr{O}_1$. Ainsi :

$$z_\infty \in \mathscr{O}_1,$$

et enfin $z_\infty \in \mathscr{O}_1 \cap \mathbb{C}\backslash\Omega = F_1$. □

En conclusion, on a représenté le complémentaire fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega = F_1 \cup F_2$ comme réunion disjointe de deux fermés non vides, en contradiction avec l'hypothèse qu'il est connexe. □

Pour terminer, voici une application importante du Théorème 13.1 de Runge polynomial qui s'avérera utile dans les chapitres subséquents.

Théorème 14.7. *Dans tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{C}$ dont le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est* connexe*, on a la propriété d'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des polynômes sur les compacts :*

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, K \subset \Omega \text{ compact} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \textit{tel que} \quad \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

De plus, pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

Nous allons démontrer cette dernière propriété *sans* construire de primitive pour les fonctions $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Ce n'est qu'à un stade beaucoup plus avancé de la théorie que nous serons en mesure d'établir que dans les ouverts bornés $\Omega \subset \mathbb{C}$ à complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Omega$ connexe, toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

Démonstration. Clairement, puisque $\mathsf{dist}\,(K, \mathbb{C}\backslash\Omega) > 0$, il existe $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$K \subset L_\delta = \big\{z \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \delta\big\}.$$

Nous venons de dire que $\mathbb{C}\backslash L_\delta$ est connexe. Donc le Théorème 13.1 s'applique, et fournit, pour tout $\varepsilon > 0$, un polynôme $P(z)$ tel que :

$$\begin{aligned} \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| &\leqslant \max_{z\in L_\delta} \big|f(z) - P(z)\big| \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Ensuite, soit $\gamma \subset \Omega$, fermée, $\mathscr{C}^1_\pm$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma \subset L_\delta$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ où $n \geqslant 1$ est un entier quelconque, il existe une suite $\big\{P_n(\zeta)\big\}_{n=1}^\infty$ de polynômes satisfaisant :

$$\begin{aligned} \max_{\zeta\in\gamma} \big|f(\zeta) - P_n(\zeta)\big| &\leqslant \max_{\zeta\in L_\delta} \big|f(\zeta) - P_n(\zeta)\big| \\ &\leqslant \tfrac{1}{n}, \end{aligned}$$

d'où par intégration :

$$\bigg|\int_\gamma \big(f(\zeta) - P_n(\zeta)\big)\, d\zeta\bigg| \leqslant \frac{1}{n}\, \mathsf{longueur}(\gamma).$$

Mais comme les $P_n(\zeta) \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ sont holomorphes dans l'ouvert étoilé $\mathbb{C}$, le Théorème 4.5 de Cauchy étoilé donne :

$$0 \;=\; \int_\gamma P_n(\zeta)\, d\zeta \qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

et enfin :

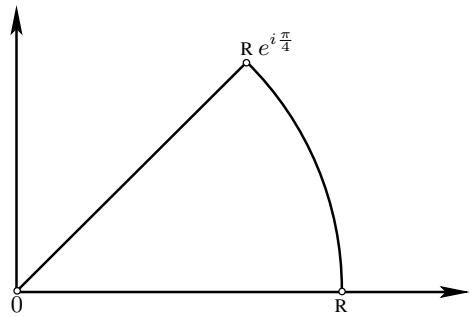
$$\begin{aligned} \Big|\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta\Big| &\leqslant \Big|\int_\gamma \big(f(\zeta) - P_n(\zeta)\big)\, d\zeta\Big| + \underline{\Big|\int_\gamma P_n(\zeta)\, d\zeta\Big|}_{\circ} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\,\mathsf{longueur}(\gamma) \;\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0. \end{aligned} \tag{14.8}$$

□

15. Exercices

Exercice 1. En interprétant $\int_0^\infty$ comme $\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^{\mathrm{R}}$, trouver la valeur des *intégrales de Fresnel :*

$$\int_0^\infty \sin\big(x^2\big)\, dx \;=\; \int_0^\infty \cos\big(x^2\big)\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$



Indication: Intégrer la fonction e^{-z^2} sur le contour représenté, en utilisant $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2. Montrer que $\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Indication: Écrire l'intégrale comme $\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}-1}{x}\, dx$ et effectuer une intégration complexe sur le bord d'un certain demi-disque édenté.

Exercice 3. Pour deux réels $a > 0$ et b, calculer les deux intégrales :

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx)\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx)\, dx.$$

Indication: Intégrer $e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}$ sur le bord d'un secteur angulaire approprié d'angle ω satisfaisant $\cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 4. Montrer qu'on a pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ (pas seulement pour ξ réel) la formule :

$$e^{-\pi\xi^2} \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\, e^{2i\pi\xi x}\, dx.$$

Exercice 5. Pour chacun des 5 ouverts suivants, déterminer s'il est étoilé (ou non) par rapport à l'un de ses points :

$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-, \qquad \mathbb{C}\backslash[2,5], \qquad \mathbb{C}\backslash\big(\mathbb{R}\cup\{-i\}\big), \qquad \mathbb{C}\backslash\big(\mathbb{R}_+ \cup i\,\mathbb{R}_+\big), \qquad \mathbb{C}\backslash\{|z| \leqslant 1\}.$$

Exercice 6. **(a)** Pour $r, s > 0$ réels, on considère le rectangle :

$$R \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\colon\; -r < x < r,\, -s < y < s\big\},$$

parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer les deux intégrales :

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z}, \qquad\qquad \int_{\partial R} \frac{dz}{z^2}.$$

(b) Pour confirmer que $\mathrm{Re}\, z$ n'est pas holomorphe, calculer, sur le bord du carré $\square$ de côtés $0, 1, 1+i, i$:

$$\int_{\partial\square} \mathrm{Re}\, z\, dz.$$

Exercice 7. Pour un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, montrer que l'ensemble :

$$E \,=\, \big\{z \in \Omega\colon\ \Omega \text{ est étoilé en } z\big\}$$

est convexe.

Exercice 8. Soit $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leqslant 1\}$ de bord le cercle unité $C = \{|z| = 1\}$, paramétré par $\theta \longmapsto e^{i\theta}$.

(a) Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, calculer les deux intégrales :

$$\int_C \Big(2 + z + \frac{1}{z}\Big)\, \frac{f(z)}{z}\, dz, \qquad\qquad \int_C \Big(2 - z - \frac{1}{z}\Big)\, \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

(b) En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tfrac{\theta}{2}\, f\big(e^{i\theta}\big)\, d\theta \,=\, 2\, f(0) + f'(0).$$

(c) De manière similaire, déterminer la valeur de :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \tfrac{\theta}{2}\, f\big(e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Exercice 9. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction holomorphe f qui est *continûment* différentiable, *i.e.* $(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues — ce qui n'est pas demandé dans la définition de l'holomorphie. Soit aussi $T = \overline{T} \subset \Omega$ un triangle fermé non aplati.

(a) Pour deux fonctions réelles $P, Q \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, montrer que l'intégrale suivante sur le bord du triangle est égale à une intégrale dans l'intérieur :

$$\int_{\partial T} \Big(P\, dx + Q\, dy\Big) \,=\, \int_T \Big(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)\, dxdy.$$

Indication: Étudier d'abord ce cas spécial du théorème général de Riemann-Green en supposant $Q \equiv 0$:

$$\int_{\partial G} \Big(P\, dx\Big) \,=\, \int_G \Big(-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy,$$

et en supposant le domaine G où l'on intègre de la forme « sandwich entre deux graphes » :

$$G \,:=\, \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ f_-(x) < y < f_+(x)\big\},$$

avec $-\infty < a < b < \infty$, avec deux fonctions f_-, f_+ continues $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ définies sur $[a, b]$ satisfaisant $f_- < f_+$ sur $]a, b[$.

(b) Ré-obtenir le théorème de Goursat :

$$0 \,=\, \int_{\partial T} f(z)\, dz,$$

avec cette hypothèse supplémentaire que $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Exercice 10. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide. Montrer que pour tout $z \in \Delta$, on a :

$$2i\pi \,=\, \int_{\partial\Delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Indication: Supposer $\Delta = \mathbb{D}_r(0)$ avec $r > 0$ centré à l'origine, puis, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ réel, étudier la fonction :

$$\Phi(t) \,:=\, \int_0^{2\pi} \frac{r\, i\, e^{i\theta}}{r\, e^{i\theta} - t\, z}\, d\theta.$$

Exercice 11. Soit $T = \overline{T} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ un triangle fermé contenu dans un ouvert du plan complexe, et soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui est $\mathbb{C}$-différentiable excepté en unique point $z_* \in T$. Montrer que si f est bornée au voisinage de z_*, alors le théorème de Goursat est encore vrai :

$$0 = \int_{\partial T} f(z)\, dz.$$

Exercice 12. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \Omega$, soit $r > 0$ avec $\overline{\Delta} := \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, soit $z \in \Delta$ à l'intérieur, et soit $f \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Avec $0 < \delta < \varepsilon \ll \mathsf{rayon}(\Delta)$, soit le contour « trou de serrure » $\Gamma_{\delta,\varepsilon} = \partial\Omega_{\delta,\varepsilon}$ évitant z qui a été utilisé dans la démonstration du Théorème 6.1.

(a) Montrer que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Indication: Vérifier que $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{z\}$ et continue dans $\mathbb{C}$, puis montrer qu'elle a une primitive dans $\mathbb{C}$.

(b) Soit le grand cercle $C := \partial\Delta$ et soit le petit cercle $c_\varepsilon := \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta - z| = \varepsilon\}$, tous deux orientés dans le sens trigonométrique. Montrer que :

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \bigg\{ \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{c_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \bigg\}.$$

(c) En utilisant le résultat de l'Exercice 10, démontrer la *formule de représentation intégrale de Cauchy :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (\forall\, z \in \Delta).$$

Exercice 13. Soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie dans le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

(a) Montrer que le diamètre de son image :

$$\mathsf{diam}\, f(\mathbb{D}) := \sup_{z,w \in \mathbb{D}} \big|f(z) - f(w)\big|$$

est minoré par :

$$2\,\big|f'(0)\big| \leqslant \mathsf{diam}\, f(\mathbb{D}).$$

Indication: Pour $0 < r < 1$ arbitrairement proche de 1, utiliser, après l'avoir justifiée, la formule :

$$2\, f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta) - f(-\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta.$$

(b) Montrer que l'inégalité est une égalité précisément lorsque $f(z) = az + b$ est affine.

Exercice 14. Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans la bande ouverte $\Omega := \big\{x + \sqrt{-1}\, y\colon\ -1 < y < 1\big\}$ qui satisfait, pour deux constantes $C \geqslant 0$ et $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\big|f(z)\big| \leqslant C\,\big(1 + |z|\big)^\kappa \qquad (\forall\, z \in \Omega),$$

montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe une constante $C_n \geqslant 0$ telle que :

$$\big|f^{(n)}(x)\big| \leqslant C_n\,\big(1 + |x|\big)^\kappa \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 15. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné, et soit $\varphi\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ une fonction holomorphe à valeurs dans Ω lui-même. S'il existe un point $z_0 \in \Omega$ en lequel :

$$\varphi(z_0) = z_0 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(z_0) = 1,$$

montrer que $\varphi(z) \equiv z$ est l'identité. Indication: Se ramener à $z_0 = 0$, écrire $\varphi(z) = z + a_n\, z^n + \mathrm{O}(z^{n+1})$, composer un nombre $k \geqslant 1$ arbitraire de fois :

$$\varphi^{\circ k} := \varphi \circ \cdots \circ \varphi,$$

vérifier que $\varphi^{\circ k}(z) = z + k\, a_n\, z^n + \mathrm{O}(z^{n+1})$, et appliquer les inégalités de Cauchy.

Exercice 16. Un théorème de Weierstrass énonce qu'une fonction continue sur $[0,1]$ peut être uniformément approximée à volonté par des polynômes réels. Montrer que les fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ ne sont pas toutes uniformément approximables par des polynômes holomorphes $P(z) \in \mathbb{C}[z]$.

Exercice 17. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}} = \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0)$ centré à l'origine de rayon $\mathrm{R} > 0$.

(a) Montrer que pour tout rayon intermédiaire $0 < r \leqslant \mathrm{R}$, pour tout $|z| < r$, on a la représentation intégrale :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(r\, e^{i\varphi}\big)\, \mathsf{Re}\left(\frac{r\, e^{i\varphi} + z}{r\, e^{i\varphi} - z}\right) d\varphi.$$

Indication: En prenant $w := \frac{\mathrm{R}^2}{\overline{z}}$, observer que l'intégrale de $\frac{f(\zeta)}{\zeta - w}$ sur le cercle de rayon R vaut 0, puis utiliser la formule de Cauchy.

(b) Vérifier, pour $0 < s < r$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, que :

$$\mathsf{Re}\left(\frac{r\, e^{i\varphi} + s}{r\, e^{i\varphi} - s}\right) \,=\, \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs\cos\varphi + s^2}.$$

Exercice 18. Soit $u \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$. On dit que u est *harmonique* si elle est annulée par l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u(x,y) \,:=\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \,=\, 0 \qquad (\forall\, (x,y) \in \mathbb{D}).$$

(a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$\mathsf{Re}\, f \,=\, u.$$

Indication: Si f existe, vérifier que l'on doit avoir $f'(z) = 2\,\frac{\partial u}{\partial z}$. Montrer alors que la fonction $g(z) := 2\,\frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe, puis en trouver une primitive $F'(z) = g(z)$, et enfin, montrer que $\mathsf{Re}\, F - u = \mathsf{constante}$.

(b) Montrer que la partie imaginaire de f est déterminée de manière unique, à l'addition près d'une constante (réelle).

(c) Dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, montrer que la fonction $\log|z|$ est harmonique, mais n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe.

(d) En utilisant l'Exercice 17, en déduire la *formule intégrale de Poisson*, qui s'énonce comme suit. Si une fonction $\mathscr{C}^2$ sur le disque unité fermé $u \in \mathsf{Harm}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}^2(\overline{\mathbb{D}})$ est harmonique dans le disque unité ouvert, alors sa valeur en un point intérieur quelconque $z = r\, e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ avec $0 \leqslant r < 1$ est donnée par l'intégrale de convolution :

$$u(z) \,=\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r\big(\theta - \varphi\big)\, u\big(e^{i\varphi}\big)\, d\varphi,$$

avec le *noyau de Poisson :*

$$P_r(\gamma) \,:=\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\gamma + r^2} \qquad (\gamma \in \mathbb{R}).$$

Exercice 19. Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière a la propriété qu'en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, son développement en série entière :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, \big(z - z_0\big)^n$$

possède au moins un coefficient nul $f^{(n_{z_0})}(z_0) = 0$, montrer que f est un polynôme. Indication: Employer un argument de dénombrabilité.

Exercice 20. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ une série entière à coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ dont le rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ est strictement positif. Son *étoile de Mittag-Leffler* est le plus grand ouvert $\Omega \ni 0$ étoilé en 0 tel qu'il existe une fonction holomorphe $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Déterminer l'étoile de Mittag-Leffler des trois séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^{3n}.$$

Exercice 21. Soit f une fonction continue sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et prend la valeur 0 en tout point du demi-cercle unité supérieur :

$$\partial^+\mathbb{D} := \big\{z \in \partial\mathbb{D} \colon |z| = 1,\ \mathsf{Im}\, z \geqslant 0\big\}.$$

Montrer que f est identiquement nulle dans $\overline{\mathbb{D}}$. Indication: Construire une fonction qui est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\{|z| = 1,\ \mathsf{Im}\, z > 0\}$.

Exercice 22. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_{\mathrm{R}})$ une fonction holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}} = \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)$. Pour $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, on introduit :

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} \big|f(z)\big|.$$

(a) Montrer que $r \longmapsto M_f(r)$ est une fonction continue et croissante sur $[0, \mathrm{R}[$.

(b) Montrer qu'elle est strictement croissante si et seulement si f n'est pas constante.

Exercice 23. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe entière telle qu'il existe des constantes réelles $\mathrm{A}, \mathrm{B}, a \geqslant 0$ avec :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{A} + \mathrm{B}\,|z|^a \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Montrer que f est un polynôme.

Exercice 24. **(a)** Montrer que l'application :

$$z \longmapsto \frac{z}{\sqrt{1 - |z|^2}}$$

établit un difféomorphisme $\mathscr{C}^\infty$ du disque unité $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}$.

(b) Montrer qu'il n'existe *pas* de *biholomorphisme* de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}$, à savoir un difféomorphisme holomorphe dont l'inverse est aussi holomorphe.

Exercice 25. Soit $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé, et soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Si $f(0) = 1$ tandis que $|f(z)| > 1$ pour tout $|z| = 1$, montrer que f s'annule en au moins un point de $\mathbb{D}$.

Exercice 26. Soit $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe entière *non* bornée. Montrer que son image $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{C}$. Indication: S'il existe un disque ouvert $\mathbb{D}_{s_0}(w_0)$ de rayon $s_0 > 0$ centré en un point $w_0 \in \mathbb{C}$ ne rencontrant pas $f(\mathbb{C})$, regarder la fonction $1\big/(f(z) - w_0)$.

Exercice 27. Soit $\Omega := \,]-1, 1[\, \times \,]-1, 1[\,$ le carré unité ouvert dans $\mathbb{C}$. On note ses 4 côtés orientés :

$$\gamma_1 := \{1\} \times [-1, 1], \qquad \gamma_2 := [1, -1] \times \{1\}, \qquad \gamma_3 := \{-1\} \times [1, -1], \qquad \gamma_4 := [-1, 1] \times \{-1\}.$$

On suppose que $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$ vérifie, pour des constantes $0 \leqslant c_i < \infty$:

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant c_i \qquad (\forall\, \zeta \in \gamma_i,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4).$$

Montrer que :

$$|f(0)| \leqslant \sqrt[4]{c_1\, c_2\, c_3\, c_4}.$$

Indication: Introduire $g(z) := f(z)\, f(iz)\, f(-z)\, f(-i\, z)$.

Exercice 28. Pour une fonction holomorphe entière $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, à savoir une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n$ de rayon de convergence infini, on introduit comme dans l'Exercice 22 :

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} \big|f(z)\big| \qquad (r \in \mathbb{R}_+).$$

(a) Montrer que $r \longmapsto M_f(r)$ est une fonction croissante.

(b) Soit $P = P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, et soit Q le *polynôme réciproque* défini par $Q(z) := z^n\, P\big(\frac{1}{z}\big)$. Montrer que :

$$M_Q(r) := r^n\, M_P\big(\tfrac{1}{r}\big) \qquad (\forall\, r \geqslant 0).$$

(c) Montrer que la fonction $r \longmapsto \frac{1}{r^n}\, M_P(r)$ est décroissante.

(d) Pour toute paire de rayons $0 < r < \mathrm{R}$, établir l'*inégalité de Bernstein-Walsh :*

$$\max_{|z|=\mathrm{R}} \big|P(z)\big| \leqslant \Big(\frac{\mathrm{R}}{r}\Big)^n \max_{|z|=\mathrm{R}} \big|Q(z)\big|.$$

Exercice 29. Une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$ est dite *prolongeable holomorphiquement* en un point $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ du cercle-bord unité s'il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)\big)$ définie dans un disque de rayon $\varepsilon > 0$ telle que :

$$g\big|_{\mathbb{D}\,\cap\,\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)} \,=\, f\big|_{\mathbb{D}\,\cap\,\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)}.$$

(a) Montrer que si une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, alors il existe au moins un point $\zeta_* \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)$ en lequel f n'est pas prolongeable holomorphiquement :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \nexists \quad g \,\in\, \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)\big) \quad g\big|_{\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)\cap\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)} \,=\, f\big|_{\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)\cap\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)}.$$

Indication: Raisonner par l'absurde, et utiliser la compacité de $\partial\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$.

(b) Vérifier que le rayon de convergence de la série lacunaire :

$$f(z) \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

vaut 1.

(c) Montrer que $f(z)$ n'est prolongeable holomorphiquement en aucun point du bord $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Indication: Pour des angles de la forme $\theta := \frac{2\pi\, p}{2^k}$ où $p \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ sont entiers, montrer que :

$$\infty \,=\, \lim_{\substack{r\to 1\\ <}} \Big|f\big(r\, e^{i\,\frac{2\pi p}{2^k}}\big)\Big|.$$

(d) Pour un paramètre réel quelconque $0 < \alpha < \infty$, montrer plus généralement que la fonction holomorphe :

$$f(z) \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}}\, z^{2^n} \qquad\qquad (|z| < 1),$$

n'est prolongeable holomorphiquement en aucun point $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Indication: Le cours d'Analyse de Fourier a fait voir que la fonction de variable réelle :

$$g(\theta) \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}}\, e^{i\,2^n\,\theta},$$

est continue, mais n'admet de dérivée en *aucun* point $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier $n \geqslant 1$. Soit la série entière :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, z^n.$$

(a) Vérifier que son rayon de convergence vaut 1.

(b) Montrer l'identité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z)\, z^n \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

(c) Montrer, pour $z = r$ réel avec $0 < r < 1$ proche de 1, qu'il y a une minoration :

$$\big|f(r)\big| \,\geqslant\, c\, \frac{1}{1-r}\, \log\Big(\frac{1}{1-r}\Big)$$

au moyen d'une certaine constante $0 < c < \infty$.

(d) Plus généralement, pour $z = r\, e^{i\,\frac{2\pi p}{q}}$ avec $0 < r < 1$ proche de 1 et avec $p, q \geqslant 1$ entiers, montrer qu'il y a une minoration :

$$\Big|f\big(r\, e^{i\,\frac{2\pi p}{q}}\big)\Big| \,\geqslant\, c_{p,q}\, \frac{1}{1-r}\, \log\Big(\frac{1}{1-r}\Big)$$

au moyen d'une certaine constante $0 < c_{p,q} < \infty$.

(e) Montrer que f n'est prolongeable holomorphiquement (*cf.* l'Exercice 29) en aucun point du bord $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ du disque unité.

Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

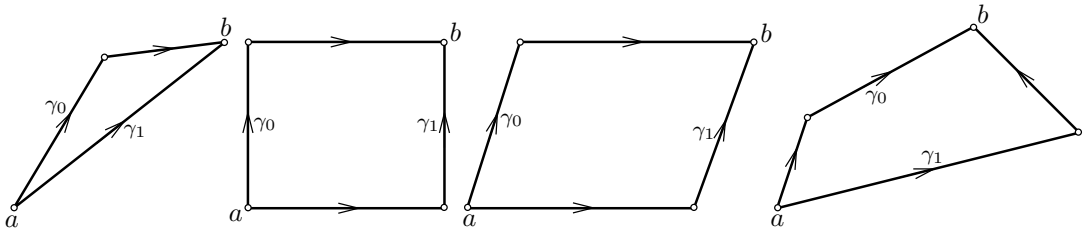
1. Introduction

2. Carré

Étant donné un triangle fermé $T = \overline{T} \subset \mathbb{C}$, si a et b sont deux de ses sommets, si γ_0 et si γ_1 sont les deux courbes allant de a à b dans ∂T, le théorème de Goursat donne :

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,dz,$$

pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \supset T$.



Grâce à une découpe en triangles, ceci reste vrai pour des carrés, pour des parallélogrammes, pour des quadrilatères, même croisés. L'objectif, maintenant, est de généraliser cela à des déformations quelconques d'un carré, afin d'obtenir des résultats d'indépendance vis-à-vis du chemin d'intégration, mais sans passer par l'existence de primitives, comme on l'a fait dans les ouverts étoilés.

Dans un plan euclidien auxiliaire $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées :

$$(s,t) \;\in\; \mathbb{R}^2,$$

soit le carré unité fermé :

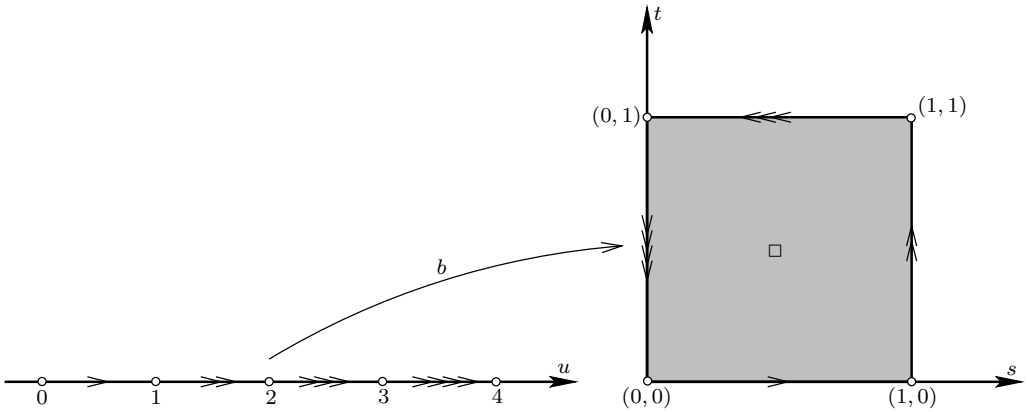
$$\square \;=\; \overline{\square} \;:=\; [0,1] \times [0,1] \;\subset\; \mathbb{R}^2,$$

dont le bord a 4 côtés. Ces 4 segments peuvent être parcourus l'un après l'autre par un chemin paramétré $\mathscr{C}^{\infty}_{\mathsf{pm}}$:

$$b\colon \quad [0,4] \;\longrightarrow\; \partial\square,$$

qui part de l'origine en tournant dans le sens trigonométrique :

$$b(u) := \begin{cases} (u,\, 0) & (0 \leqslant u \leqslant 1), \\ (1,\, u-1) & (1 \leqslant u \leqslant 2), \\ (3-u,\, 1) & (2 \leqslant u \leqslant 3), \\ (0,\, 4-u) & (3 \leqslant u \leqslant 4). \end{cases}$$

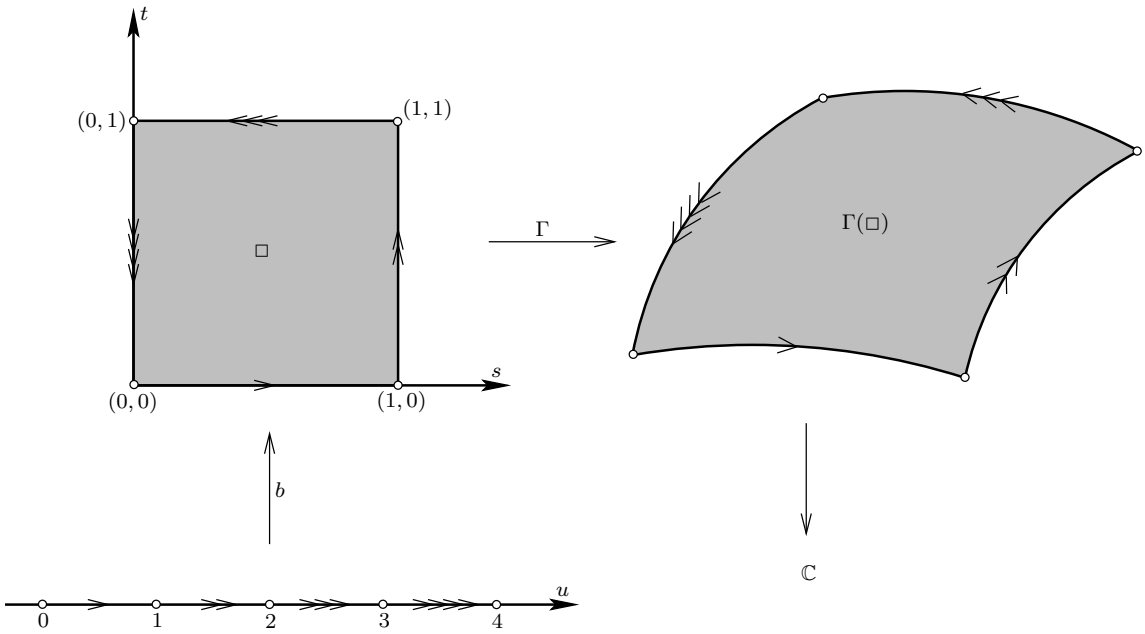


Supposons donnée une application de classe $\mathscr{C}^2$ à valeurs dans le plan complexe $\mathbb{C} \ni x + i\,y$:

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \quad [0,1]^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (s,t) &\longmapsto \Gamma(s,t), \end{aligned}$$

application qu'il faudra plus tard construire au cas par cas afin d'obtenir des conséquences intéressantes. Comme dans le théorème de Goursat, on considère des fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ définies dans un ouvert :

$$\Omega \supset \Gamma\big([0,1]^2\big).$$

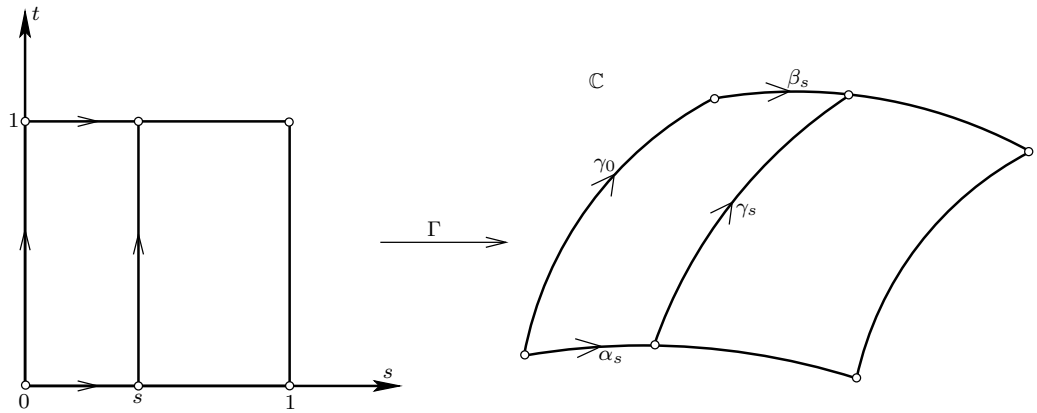


Après composition par Γ, la courbe $b\colon [0,4] \longrightarrow \square$ qui ceint le bord du carré unité devient une certaine courbe fermée $\mathscr{C}^2_{\mathsf{pm}}$ dans le plan complexe :

$$\begin{aligned} \Gamma \circ b\colon \quad [0,4] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \Gamma\big(b(u)\big). \end{aligned}$$

Contrairement à ce qu'illustre la figure, la courbe $\Gamma \circ b$ est autorisée à s'auto-intersecter plusieurs fois. Abrégeons alors :

$$\int_{b\Gamma} := \int_{\Gamma \circ b}.$$



Ensuite, pour tout $s \in [0,1]$ fixé, introduisons les deux courbes verticales de longueur 1 dans le carré composées avec Γ :

$$\begin{aligned} \gamma_0(u) &:= \Gamma(0,u)\colon \quad [0,1] \longrightarrow \Omega, \\ \gamma_s(u) &:= \Gamma(s,u)\colon \quad [0,1] \longrightarrow \Omega, \end{aligned}$$

ainsi que les deux courbes horizontales tronquées de longueur s :

$$\begin{aligned} \alpha_s(u) &:= \Gamma(u,0)\colon \quad [0,s] \longrightarrow \Omega, \\ \beta_s(u) &:= \Gamma(u,1)\colon \quad [0,s] \longrightarrow \Omega. \end{aligned}$$

L'énoncé suivant va s'avérer être un outil très puissant d'où découleront de nombreuses conséquences intéressantes.

Théorème 2.1. *Dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma(\square)$ de $\mathbb{C}$ qui contient l'image complète par Γ du carré unité fermé $\square \subset \mathbb{R}^2$, toutes les fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ satisfont l'annulation de Cauchy :*

$$0 = \int_{b\Gamma} f(z)\,dz.$$

Démonstration. Cherchons à faire voir que pour tout $s \in [0,1]$ fixé, on a égalité entre deux fonctions :

$$\boldsymbol{G}(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \overset{?}{=} \int_{\beta_s} f(z)\,dz - \int_{\alpha_s} f(z)\,dz =: \boldsymbol{B}(s),$$

puisque pour $s = 1$, cela donnera une identité à 4 termes :

$$\boldsymbol{G}(1) = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \overset{?}{=} \int_{\beta_1} f(z)\,dz - \int_{\alpha_1} f(z)\,dz = \boldsymbol{B}(1),$$

qui est une simple ré-écriture de $\int_{b\Gamma} f(z)\,dz = 0$, comme on s'en convainc visuellement.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(s) &= \int_{\gamma_s} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \\ &= \int_0^1 f\big(\Gamma(s,u)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,u)\,du - \int_0^1 f\big(\Gamma(0,u)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(0,u)\,du,\end{aligned}$$

et pareillement :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(s) &= \int_{\beta_s} f(z)\,dz - \int_{\alpha_s} f(z)\,dz \\ &= \int_0^s f\big(\Gamma(u,1)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(u,1)\,du - \int_0^s f\big(\Gamma(u,0)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(u,0)\,du.\end{aligned}$$

Notons que $\boldsymbol{G}(0) = \boldsymbol{B}(0) = 0$. Comme Γ est $\mathscr{C}^2$, tout ici est $\mathscr{C}^1$, donc nous pouvons dériver.

Premièrement, il est clair que :

$$\boldsymbol{B}'(s) = f\big(\Gamma(s,1)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,1) - f\big(\Gamma(s,0)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,0).$$

Deuxièmement, rappelons que l'hypothèse d'holomorphie $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ montre que dans le calcul d'une dérivée composée, le terme $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ disparaît, et qu'il ne reste que le terme $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(f\big(\Gamma(s,t)\big)\Big) = f'\big(\Gamma(s,t)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \qquad (\forall\, 0 \leqslant s,t \leqslant 1),$$

et par conséquent, nous pouvons calculer pour tout $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}'(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f\big(\Gamma(s,u)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,u)\right)du - 0 \\ &= \int_0^1 \left\{f'\big(\Gamma(s,u)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,u)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,u) + f\big(\Gamma(s,u)\big)\,\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(s,u)\right\}du \\ &\text{[}f\text{ est holomorphe !]} \quad = \int_0^1 \frac{d}{du}\left(f\big(\Gamma(s,u)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,u)\right)du \\ &\text{[Primitive !]} \quad = f\big(\Gamma(s,1)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,1) - f\big(\Gamma(s,0)\big)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,0) \\ &\text{[Reconnaître !]} \quad = \boldsymbol{B}'(s).\end{aligned}$$

Ainsi, les deux fonctions $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{B}$ de $s \in [0,1]$ qui s'annulent toutes deux à l'origine $\boldsymbol{G}(0) = \boldsymbol{B}(0) = 0$ et qui possèdent des dérivées égales doivent coïncider partout $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{B}(s)$, donc au final $\boldsymbol{G}(1) = \boldsymbol{B}(1)$ — exactement ce qu'il nous fallait démontrer. $\square$

Dans ce Théorème 2.1, l'hypothèse que *tout* le carré $\square$ soit envoyé par Γ dans l'ouvert $\Omega \supset \Gamma(\square)$ où les fonctions $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ sont holomorphes est essentielle, indispensable. L'Exercice 1 propose en effet l'exemple élémentaire du carré $\big\{|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\big\} = \Gamma(\square)$ image de $\square = \{0 \leqslant s,t, \leqslant 1\}$ par :

$$\Gamma(s,t) := 2s - 1 + i\,\big(2t-1\big) =: x + iy \qquad (s,t \in [0,1]),$$

et de la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ *non* holomorphe au centre 0 de $\Gamma(\square)$ pour laquelle :

$$0 \neq \int_{b\Gamma} \frac{1}{z}\, dz = 2\, i\, \pi.$$

La première application spectaculaire de ce théorème protéiforme est une invariance des intégrales de fonctions holomorphes le long de déformations de *lacets*, *i.e.* de courbes fermées.

Théorème 2.2. [Homotopies de lacets] *Soit une application* $\Gamma\colon [0,1]^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$ *d'image contenue dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$. *Si, pour tout* $s \in [0,1]$ *fixé, les chemins 'verticaux' :*

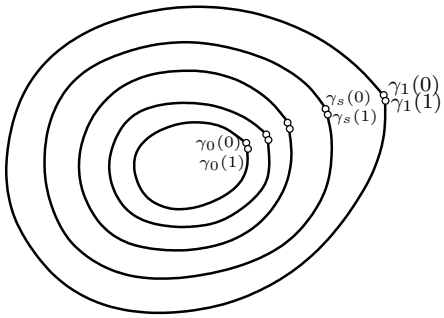
$$u \longmapsto \gamma_s(u) := \Gamma(s,u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

sont fermés :

$$\gamma_s(1) = \gamma_s(0) \qquad (\forall\, s \in [0,1]),$$

alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$



Intuitivement, les chemins le long desquels on intègre « *glissent* » dans la région où f est holomorphe, sans résistance, sans changer la valeur des intégrales.

Démonstration. Ainsi par hypothèse $\Gamma(s,1) \equiv \Gamma(s,0)$, donc en revenant à l'identité établie précédemment, nous avons bien annulation de :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_0} f(z)\, dz &= \int_{\beta_1} f(z)\, dz - \int_{\alpha_1} f(z)\, dz \\
&= \int_0^1 f\big(\Gamma(s,1)\big)\, \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,1)\, ds - \int_0^1 f\big(\Gamma(s,0)\big)\, \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,0)\, ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3. [Homotopies à extrémités fixées] *Soit comme ci-dessus une application* $\Gamma\colon [0,1]^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$. *Si, pour tout* $s \in [0,1]$ *fixé, les chemins 'verticaux' :*

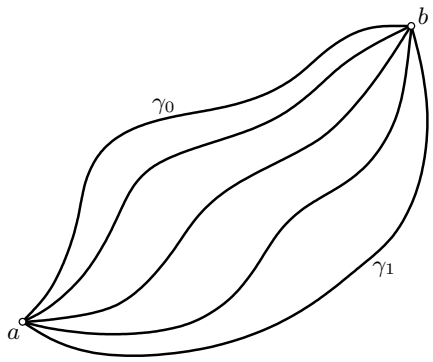
$$u \longmapsto \gamma_s(u) := \Gamma(s,u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

ont un point de départ commun et un point d'arrivée commun constants fixés :

$$a := \gamma_s(0) \qquad \textit{et} \qquad \gamma_s(1) =: b \qquad (\forall\, s \in [0,1]),$$

alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

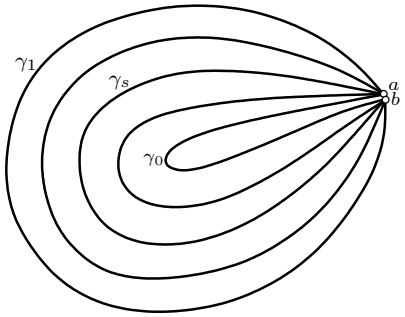


Démonstration. Par hypothèse, $\Gamma(s,0) \equiv a$ et $\Gamma(s,1) \equiv b$ sont des courbes constantes, donc le long desquelles toute intégrale est nulle :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz &= \underbrace{\int_{\beta_1} f(z)\,dz}_{\circ} - \underbrace{\int_{\alpha_1} f(z)\,dz}_{\circ} \\ &= 0 - 0.\end{aligned}$$

□

Les deux circonstances géométriques de ces deux théorèmes peuvent d'ailleurs se produire simultanément, quand on a affaire à des lacets dont les points-extrémités sont fixés $a = b$ et égaux.



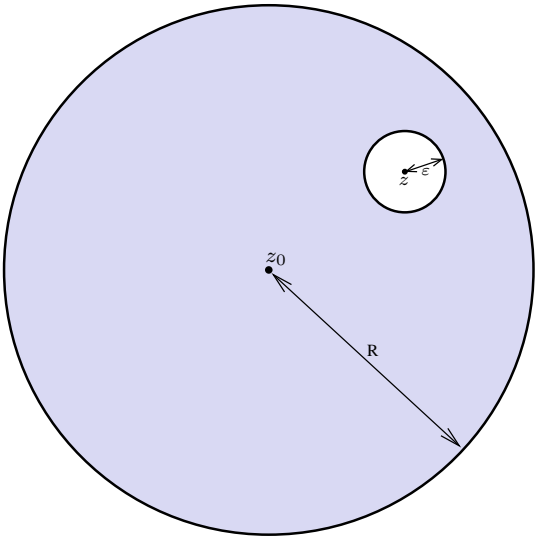
En outre, le Théorème 2.1 offre une autre, belle, démonstration du théorème de représentation intégrale de Cauchy dans un disque.

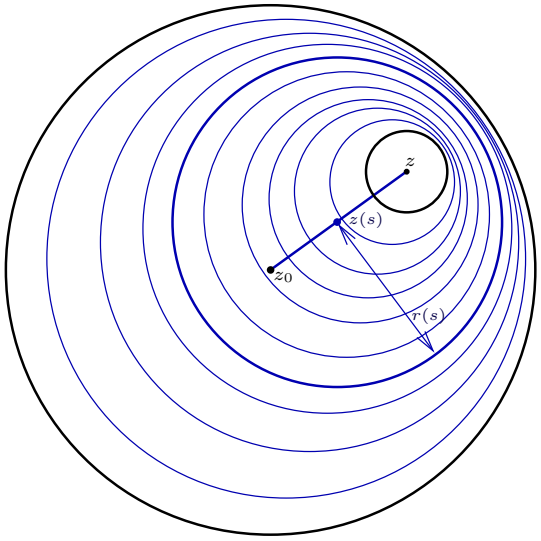
Corollaire 2.4. *Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \Omega$, soit un rayon $\mathrm{R} > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0) \subset \Omega$. Alors en tout point $z \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\mathrm{R}}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ petit avec $0 < \varepsilon < \mathrm{R} - |z - z_0|$ que nous ferons tendre plus tard vers 0, de telle sorte que :

$$\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon}(z) \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0).$$





Afin de « remplir » l'anneau fermé entre ces deux disques :

$$\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0) \setminus \mathbb{D}_{\varepsilon}(z),$$

prenons sur le segment $[z_0, z] \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0)$ des centres paramétrés :

$$z(s) \,:=\, (1-s)\, z_0 + s\, z \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1),$$

avec $z(0) = z_0$ jusqu'à $z(1) = z$, définissons des rayons décroissants :

$$r(s) \,:=\, (1-s)\, \mathrm{R} + s\, \varepsilon,$$

avec $r(0) = \mathrm{R}$ jusqu'à $r(1) = \varepsilon$, et introduisons les cercles correspondants au moyen d'une application $\mathscr{C}^2$ définie dans le carré unité fermé $\{0 \leqslant s, t \leqslant 1\}$ comme le firent les paragraphes qui précèdent par :

$$\Gamma(s,t) \,:=\, z(s) + r(s)\, e^{2i\pi t}.$$

Visuellement, ces cercles $C_{r(s)}(z(s))$ décroissent du grand $C_{\mathrm{R}}(z_0)$ vers le petit $C_{\varepsilon}(z)$ en remplissant tout l'anneau entre les deux.

Commençons en effet par vérifier que ces cercles sont tous contenus dans $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(z_0)$:

$$\begin{aligned}
\big|\Gamma(s,t) - z_0\big| \,&=\, \big|(1-s)\, z_0 + s\, z + r(s)\, e^{2i\pi t} - z_0\big| \\
&=\, \big|s\,(z - z_0) + r(s)\, e^{2i\pi t}\big| \\
&\leqslant\, s\,|z - z_0| + (1-s)\, \mathrm{R} + s\, \varepsilon \\
&\leqslant\, s\,|z - z_0| + (1-s)\, \mathrm{R} + s\, \big(\mathrm{R} - |z - z_0|\big) \\
&=\, \mathrm{R}.
\end{aligned}$$

Ensuite, vérifions qu'aucun de ces cercles n'entre dans le petit disque $\mathbb{D}_\varepsilon(z)$, ce qui est possible à grands coups de minorations :

$$\begin{aligned}
\big|\Gamma(s,t)-z\big| &= \big|r(s)\,e^{2i\pi t}+z(s)-z\big| \\
\text{[Remplacer } z(s)\text{]} \qquad &= \big|r(s)\,e^{2i\pi t}-(1-s)\,(z-z_0)\big| \\
[|\alpha-\beta| \geqslant \big||\alpha|-|\beta|\big|] \qquad &\geqslant \big|r(s)-(1-s)\,|z-z_0|\big| \\
\text{[Remplacer } r(s)\text{]} \qquad &= \big|(1-s)\,\mathrm{R}+s\,\varepsilon-(1-s)\,|z-z_0|\big| \\
\text{[Tout est positif]} \qquad &= (1-s)\,\big(\mathrm{R}-|z-z_0|\big)+s\,\varepsilon \\
&\geqslant (1-s)\,\varepsilon+s\,\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Grâce à cela, l'image de $\Gamma(s,t)$ évite toujours la singularité $\{z\}$ de la fonction $\zeta \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ holomorphe dans $\Omega\backslash\{z\}$, donc le Théorème 2.2 pour les homotopies entre lacets — ici des cercles ! — s'applique et donne une égalité dans laquelle il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}(z_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\varepsilon\,e^{i\theta})}{z+\varepsilon\,e^{i\theta}-z}\,i\,\varepsilon\,e^{i\theta}\,d\theta \\
[f \text{ est continue !}] \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(z+\varepsilon\,e^{i\theta}\big)\,d\theta \underset{\varepsilon\underset{>}{\to}0}{\longrightarrow} f(z). \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarquons qu'en appliquant la formule de Cauchy que nous venons de redémontrer à la fonction-produit $\zeta \longmapsto (\zeta-z)\,g(\zeta)$, avec $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ quelconque, qui s'annule au point $\zeta = z$, nous réobtenons :

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}(z_0)} g(\zeta)\,d\zeta \qquad (\forall\, g \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

3. Concept d'homotopie

Les résultats qui précèdent demandent de manière essentielle que $\Gamma(s,t) \in \mathscr{C}^2$, mais ils sont vrais avec des hypothèses légèrement plus faibles. Avec des déformations d'un carré, le point-clé est la possibilité de déformer les courbes continûment en demeurant dans l'ouvert. Comme l'intégration le long d'une courbe demande seulement une régularité $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$, et non $\mathscr{C}^2$, formulons une

Définition 3.1. Deux courbes $\gamma_0 \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_1 \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ partant et aboutissant aux mêmes points :

$$a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \qquad \text{et} \qquad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b,$$

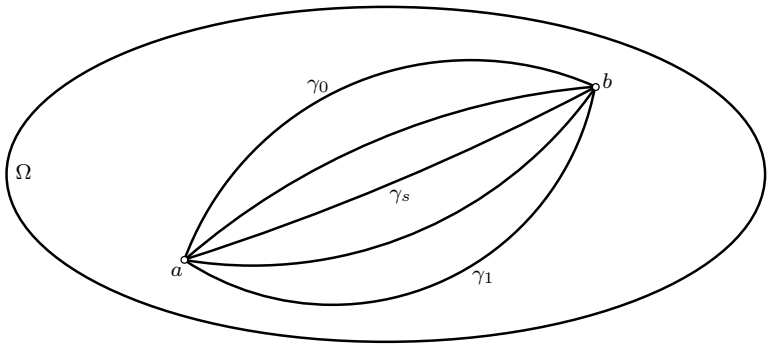
sont dites *homotopes dans* Ω s'il existe une famille $\gamma_s \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ à 1 paramètre $s \in [0,1]$ de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *toutes contenues dans l'ouvert* ayant mêmes extrémités fixées :

$$a = \gamma_s(0) \qquad \text{et} \qquad \gamma_s(1) = b,$$

telle que l'application totale soit *continue :*

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \longmapsto \gamma_s(t) \in \Omega.$$

Dans le contexte précédent, nous avions $(s,t) \longmapsto \Gamma(s,t)$ de classe $\mathscr{C}^2$. Intuitivement, deux courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ sont *homotopes* si elles peuvent être déformées continûment l'une dans l'autre sans sortir de Ω.



Redémontrons alors différemment, et en exigeant moins de régularité, le Théorème 2.3.

Théorème 3.2. *Si* $\big\{t \longmapsto \gamma_s(t)\big\}_{s\in[0,1]}$ *est une homotopie continue de courbes* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *contenues dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *à extrémités fixées constantes* $a = \gamma_s(0)$ *et* $\gamma_s(1) = b$*, alors pour toute fonction holomorphe* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$*, on a :*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma_s} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \qquad (\forall\, s \in [0,1]).$$

Démonstration. Le point important est d'établir que si deux courbes γ_{s_1} et γ_{s_2} sont suffisamment proches l'une de l'autre, alors $\int_{\gamma_{s_1}} f = \int_{\gamma_{s_2}} f$.

Comme $(s,t) \longmapsto \gamma_s(t) \equiv \gamma(s,t)$ est continue, son image :

$$\gamma\big([0,1]^2\big) \;=:\; K \;\subset\; \Omega,$$

est un compact, contenu dans Ω.

Assertion 3.3. *Il existe* $\varepsilon > 0$ *assez petit pour que :*

$$\bigcup_{z\in K} \mathbb{D}_{3\varepsilon}(z) \;\subset\; \Omega.$$

Démonstration. Un critère de compacité que nous avons déjà vu donne cela directement, mais redémontrons-le quand même.

Par l'absurde, supposons que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, il existe $z_\ell \in K$ et $w_\ell \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ avec :

$$\big|z_\ell - w_\ell\big| \;\leqslant\; \tfrac{1}{\ell}.$$

Comme K est compact, une certaine sous-suite $\big\{z_{\ell_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers un certain point $z \in K$, d'où :

$$z \;\in\; \Omega.$$

À cause de l'inégalité $\big|z_{\ell_k} - w_{\ell_k}\big| \leqslant \frac{1}{\ell_k}$, on doit alors avoir aussi :

$$w_{\ell_k} \;\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\; z.$$

Mais comme tous ces w_{ℓ_k} appartiennent au fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega$, leur limite reste dans ce fermé, d'où la contradiction :

$$z \;\in\; \mathbb{C}\backslash\Omega. \qquad \square$$

Ayant trouvé un $\varepsilon > 0$ satisfaisant cette assertion, sélectionnons un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ exprimant une propriété découlant de la continuité uniforme de γ sur $[0,1]^2$:

$$\big|s_1 - s_2\big| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{t\in[0,1]} \big|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)\big| \leqslant \varepsilon.$$

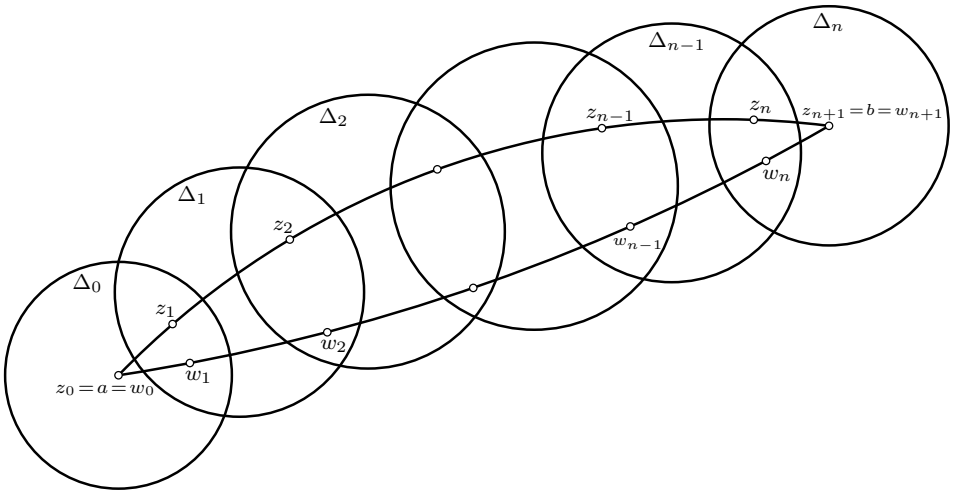
Assertion 3.4. *Pour tous $s_1, s_2 \in [0,1]$ avec $|s_1 - s_2| \leqslant \delta$, on a :*

$$\int_{\gamma_{s_1}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{s_2}} f(z)\,dz.$$

L'idée est d'utiliser des primitives locales le long des deux courbes.

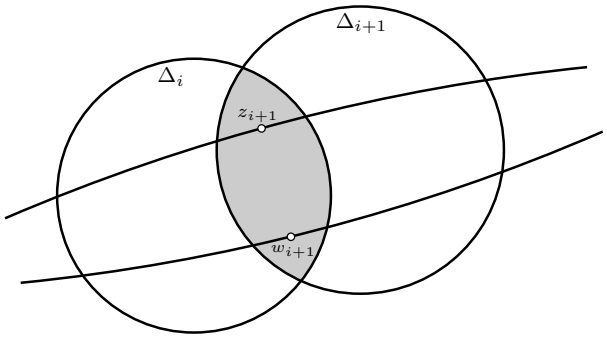
Démonstration. Choisissons un nombre $1+n \gg 1$ assez grand de disques $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ de rayons $2\,\varepsilon$, ainsi que $(n+2)$ points consécutifs $a = z_0, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1} = b$ sur γ_{s_1}, et aussi $(n+2)$ points consécutifs $a = w_0, w_1, \ldots, w_n, w_{n+1} = b$ sur γ_{s_2}, tels que la réunion de ces disques recouvre γ_{s_1} et γ_{s_2}, et tels que :

$$z_i,\ z_{i+1} \in \Delta_i \qquad \text{et} \qquad w_i,\ w_{i+1} \in \Delta_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$



Tous les disques $\Delta_i \subset \Omega$ étant convexes (donc étoilés), la fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y admet des primitives $F_i \in \mathscr{O}(\Delta_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Sur chaque intersection connexe $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$, puisque $F'_{i+1} - F'_i = f - f = 0$, il existe une constante $c_i \in \mathbb{C}$ telle que :

$$F_{i+1} - F_i = c_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$



Alors comme $z_{i+1} \in \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \ni w_{i+1}$, il vient :

$$F_{i+1}\big(z_{i+1}\big) - F_i\big(z_{i+1}\big) = c_i = F_{i+1}\big(w_{i+1}\big) - F_i\big(w_{i+1}\big),$$

c'est-à-dire de manière équivalente toujours pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$:

$$F_i\big(z_{i+1}\big) - F_i\big(w_{i+1}\big) \;=\; F_{i+1}\big(z_{i+1}\big) - F_{i+1}\big(w_{i+1}\big). \tag{3.5}$$

Ceci permet de calculer pour conclure l'assertion :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{s_1}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{s_2}} f(z)\,dz \;&=\; \sum_{i=0}^{n} \Big(F_i\big(z_{i+1}\big) - F_i\big(z_i\big)\Big) - \sum_{i=0}^{n} \Big(F_i\big(w_{i+1}\big) - F_i\big(w_i\big)\Big) \\
&=\; \sum_{i=0}^{n} \Big(F_i\big(z_{i+1}\big) - F_i\big(w_{i+1}\big)\Big) - \sum_{i=0}^{n} \Big(F_i\big(z_i\big) - F_i\big(w_i\big)\Big) \\
&=\; \big[F_n\big(z_{n+1}\big) - F_n\big(w_{n+1}\big)\big] + \sum_{i=0}^{n-1} \big[\underline{F_i\big(z_{i+1}\big) - F_i\big(w_{i+1}\big)}\big] - \sum_{i=0}^{n} \big[F_i\big(z_i\big) - F_i\big(w_i\big)\big] \\
\text{[Remplacer (3.5)]} \qquad &=\; 0 + \sum_{i=0}^{n-1} \big[F_{i+1}\big(z_{i+1}\big) - F_{i+1}\big(w_{i+1}\big)\big] - \sum_{i=0}^{n} \big[F_i\big(z_i\big) - F_i\big(w_i\big)\big] \\
\text{[Téléscopage]} \qquad &=\; 0 + 0 - \big[F_0\big(z_0\big) - F_0\big(w_0\big)\big] \\
&=\; 0 + 0 - 0.
\end{aligned}$$

□

Pour terminer le Théorème 3.2, il suffit de subdiviser $[0,1]$ en sous-intervalles du type précédent $[s_1, s_2]$ de longueurs $\leqslant \delta$, et d'appliquer un nombre fini de fois les égalités $\int_{\gamma_{s_1}} f = \int_{\gamma_{s_2}} f$. □

Observation 3.6. *Être homotope est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Si $\gamma_s(t)$ est une homotopie de $\gamma_0(t)$ vers $\gamma_1(t)$, alors $\gamma_{1-s}(t)$ est une homotopie de $\gamma_1(t)$ vers $\gamma_0(t)$.

Si $\mu_s(t)$ est une homotopie de $\gamma_0(t) = \mu_0(t)$ vers $\mu_1(t) = \gamma_1(t)$, et si $\nu_s(t)$ est une homotopie de $\gamma_1(t) = \nu_0(t)$ vers $\nu_1(t) = \gamma_2(t)$, alors :

$$\gamma_s(t) \;:=\; \begin{cases} \mu_{2s}(t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \nu_{2s-1}(t) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma_0(t)$ vers $\gamma_2(t)$. □

4. Zoologie singulière

Le théorème de Jordan-Cauchy :

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; 0,$$

pour $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ contenant un contour et son intérieur, est en fait de peu d'intérêt pour la compréhension des fonctions holomorphes, puisque le résultat net est nul !

Dans la théorie, il y a un principe général, datant de l'époque de Cauchy, Gauss, Dirichlet, Riemann, d'après lequel les fonctions holomorphes sont essentiellement déterminées par leurs *singularités*, c'est-à-dire les points où elles ne sont pas définies.

En général, ces singularités sont isolées — leur collection forme un ensemble fermé discret —, et pour se convaincre qu'elles existent, laissons défiler sous nos yeux quelques

créatures intégrales :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x+x^2}\,dx, \qquad \int_{|z|=\mathrm{R}} \frac{z}{\sqrt{(z-a)\,(z-b)}}\,dz, \qquad \int_{\partial T} \frac{e^{-z}}{(1-z^4)^2}\,dz,$$
$$\int_{r}^{\infty} \frac{\rho^{s-1}}{e^{-\rho e^{i\theta}}-1}\,d\theta, \qquad \int_{\Gamma} \frac{\log z}{1+z+z^2-z^4-z^5}\,dz, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{(\sin^2 t+1)^3}\,dt,$$
$$\int_{r}^{\mathrm{R}} \frac{\log t}{(te^{i\alpha}+1)^2(t^2e^{2i\alpha}+te^{i\alpha}+1)}\,dt, \qquad \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+t)^2}-\frac{1}{(z+a+t)^2}\right)dt,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-i)^a(t+i)^b}\,dt, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx,$$

sans chercher à les comprendre, où la variable $x \in \mathbb{R}$ pourrait être remplacée par $z \in \mathbb{C}$, et où les contours d'intégration pourraient être modifiés.

Puisqu'il semble pour l'instant trop difficile d'approcher ces intégrales élégantes, commençons par des exemples simples :

$$\frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{z^2}, \qquad \frac{1}{z^\kappa} \qquad (\text{sur } \mathbb{C}\backslash\{0\}),$$

ou encore :

$$\frac{1}{(z-a_1)\cdots(z-a_\mathrm{K})} \qquad (\text{sur } \mathbb{C}\backslash\{a_1,\ldots,a_\mathrm{K}\}).$$

Ici, les singularités proviennent des dénominateurs, circonstance la plus fréquente. Il faut donc conceptualiser la *division* d'une fonction holomorphe par une autre fonction holomorphe.

5. Fonctions méromorphes locales

Fréquemment, donc, on est amené à considérer des quotients :

$$\frac{f(z)}{Q(z)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(z)}{g(z)},$$

d'une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ par un polynôme $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, ou par une autre fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\Omega)$. Les singularités apparaissent quand $Q(z) = 0$, ou quand $g(z) = 0$.

Terminologie 5.1. Un *zéro* d'une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, c'est un point $z_0 \in \Omega$ en lequel elle s'annule :

$$f(z_0) \,=\, 0.$$

On note :

$$Z_f \,:=\, \big\{z_0 \in \Omega\colon\ f(z_0) = 0\big\}.$$

En étudiant les fonctions analytiques, nous avons déjà vu que dans un ouvert *connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble $Z_f \subset \Omega$ est toujours (fermé) discret dès que $f \not\equiv 0$. Autrement dit :

$$\forall\, z_0 \in Z_f \quad \exists\, \omega \ni z_0 \quad \text{ouvert tel que} \quad f(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \omega\backslash\{z_0\}.$$

Ceci provient d'une factorisation locale naturelle de la série entière de f en z_0, elle aussi déjà vue, et que nous rappelons ici.

Théorème 5.2. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe, soit $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $f \not\equiv 0$. Alors en tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un entier $\nu = \nu_f(z_0) \geqslant 0$, il existe un rayon $r > 0$ et il existe une fonction holomorphe unique $g \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$ telle que :*

$$f(z) \,=\, \big(z - z_0\big)^{\nu}\, g(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0)),$$

et telle que $g(z) \neq 0$ ne s'annule jamais.

Démonstration. En résumé, l'argument consiste à développer f en série entière convergente au point z_0, et à factoriser par la puissance maximale possible de $(z - z_0)$:

$$\begin{aligned} f(z) \,&=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n \qquad\qquad (a_n = f^{(n)}(z_0)/n\,!) \\ &=\, \big(z - z_0\big)^{\nu} \Big[a_\nu + a_{\nu+1}\,(z - z_0) + \cdots\Big] \\ &=:\, \big(z - z_0\big)^{\nu}\, g(z), \end{aligned}$$

où g est holomorphe près de z_0, où $\nu < \infty$ car $f \not\equiv 0$, et où $a_\nu = g(z_0) \neq 0$, d'où par continuité $g(z) \neq 0$ au voisinage de z_0. □

L'entier $\nu = \nu_f(z_0)$ dépend du point $z_0 \in \Omega$, et vaut la plupart du temps 0, puisque l'ensemble :

$$\Omega \big\backslash Z_f \,=\, \big\{z \in \Omega\colon\ f(z) \neq 0\big\}$$

est dense dans Ω.

Terminologie 5.3. L'entier $\nu_f(z_0)$ est appelé *ordre* (d'annulation) *de f en z_0*.

On dit aussi que $z_0 \in Z_f$ est un *zéro de f d'ordre $\nu_f(z_0)$*, ou encore que *f s'annule à l'ordre $\nu_f(z_0)$ en z_0*.

Quand $\nu_f(z_0) = 1$, on dit que f a un *zéro simple* en z_0.

Notation 5.4. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera le disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ épointé de son centre :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_r^*(z_0) \,&:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z - z_0| < r\big\} \\ &=\, \mathbb{D}_r(z_0) \big\backslash \{z_0\}. \end{aligned}$$

Quand une fonction holomorphe non identiquement nulle apparaît au dénominateur d'une fraction, un concept nouveau naît.

Définition 5.5. Une fonction $f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{z_0\}\big)$ non nulle définie dans un (petit) voisinage ouvert épointé connexe $\omega \backslash \{z_0\}$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dite *avoir un pôle en z_0* si, pour $r > 0$ assez petit, la fonction :

$$\frac{1}{f}(z) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & \text{lorsque } \ z \in \mathbb{D}_r^*(z_0), \\ 0 & \text{pour } \ z = z_0, \end{cases}$$

est *holomorphe* dans $\mathbb{D}_r(z_0)$.

Autrement dit, *avoir un pôle en un point*, c'est être localement l'inverse d'une fonction holomorphe qui s'annule en ce point.

Théorème 5.6. *Si $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ a un pôle en $z_0 \in \omega$, alors il existe $r > 0$ avec $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \omega$, il existe une fonction holomorphe unique $h \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$ jamais égale à 0, et il existe un entier $\nu \geqslant 1$ tels que :*

$$f(z) \,=\, \frac{1}{(z-z_0)^\nu}\, h(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0)).$$

Démonstration. D'après le précédent Théorème 5.2 appliqué à la fonction $\frac{1}{f}(z)$ holomorphe près de z qui s'annule en z_0, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{f(z)} \,=\, \big(z-z_0\big)^\nu\, g(z),$$

avec $\nu = \nu_{\frac{1}{f}}(z_0) \geqslant 1$, et comme g ne s'annule pas près de z_0, il suffit d'inverser cette équation et de prendre $h := \frac{1}{g}$. □

Terminologie 5.7. L'entier $\nu_f(z_0) \geqslant 1$ ci-dessus est appelé *ordre* ou *multiplicité* du pôle z_0 de f. Lorsque $\nu_f(z_0) = 1$, on dit que le pôle est *simple*

Clairement, $\nu_f(z_0)$ indique le degré de croissance de $f(z)$ quand $z \longrightarrow z_0$. Le prochain théorème exhibe un développement comportant un nombre *fini* de puissances négatives de $(z - z_0)$.

Théorème 5.8. *Si $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ a un pôle en $z_0 \in \omega$, et si $\nu \geqslant 1$ est l'ordre de ce pôle, alors il existe un disque $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \omega$ de rayon $r > 0$ dans lequel elle s'écrit :*

$$f(z) \,=\, \frac{a_{-\nu}}{(z-z_0)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + H(z),$$

où $0 \neq a_{-\nu}, \ldots, a_{-1} \in \mathbb{C}$ et où $H \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$ sont déterminées de manière unique.

Démonstration. Il suffit de développer en série entière la fonction $h \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$ du théorème qui précède :

$$h(z) \,=\, c_0 + c_1\,\big(z-z_0\big) + \cdots + c_{\nu-1}\,\big(z-z_0\big)^{\nu-1} + \big(z-z_0\big)^\nu\, H(z),$$

d'effectuer la division :

$$\begin{aligned} f(z) \,&=\, \big(z-z_0\big)^{-\nu}\, h(z) \\ &=\, \frac{c_0}{(z-z_0)^\nu} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}}{(z-z_0)^1} + H(z), \end{aligned}$$

et de renommer différemment les constantes, juste pour l'esthétique notationnelle ! □

Le développement complet :

$$f(z) \,=\, \frac{a_{-\nu}}{(z-z_0)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\big(z-z_0\big)^n,$$

va s'avérer être un cas spécial de développements en *séries de Laurent*, dans lesquels les puissances négatives de $(z - z_0)$ pourront aller jusqu'à $-\infty$.

6. Théorèmes de Laurent

Soient deux rayons $0 \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \leqslant \infty$, soit l'anneau ou couronne :

$$A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\big\}.$$

Par exemple, pour $\mathrm{R}_1 = 0$ et $\mathrm{R}_2 = \infty$, il s'agit de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour $\mathrm{R}_1 = 0$ et $\mathrm{R}_2 = r$, on trouve $A_{0,r} = \mathbb{D}_r^*(0)$, comme ci-dessus en $z_0 = 0$.

Soit aussi une suite $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ doublement infinie de nombres $a_n \in \mathbb{C}$, et soient deux séries entières :

$$f_-(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, w^n \qquad \text{et} \qquad f_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n.$$

Supposons que leurs rayons de convergence respectifs satisfassent :

$$\mathsf{RCV}\big(f_-\big) \geqslant \tfrac{1}{\mathrm{R}_1} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{RCV}\big(f_+\big) \geqslant \mathrm{R}_2,$$

de telle sorte que les deux séries ci-dessus convergent normalement sur les compacts de $\mathbb{D}_{\frac{1}{\mathrm{R}_1}}(0)$ et de $\mathbb{D}_{\mathrm{R}_2}(0)$, et y définissent des fonctions analytiques donc holomorphes.

Par conséquent, leur somme dans laquelle $w = \frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} f(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\tfrac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n \end{aligned}$$

est normalement convergente sur tout compact de l'anneau $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$, et y définit une fonction holomorphe.

Terminologie 6.1. Une série doublement infinie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ est appelée *série de Laurent*.

Elles apparaissent naturellement, comme le montre par exemple :

$$\frac{1}{z\,(1-z)} \ \in\ \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}\big),$$

que l'on peut développer, pour $0 < |z| < 1$:

$$\frac{1}{z\,(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

puis pour $1 < |z|$:

$$\frac{1}{z\,(1-z)} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

En utilisant et en développant la théorie de Cauchy, nous allons démontrer que toutes les fonctions holomorphes sur un anneau $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$ sont développables en série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ dont la partie négative $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ converge pour $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{\mathrm{R}_1}$, c'est-à-dire pour $|z| > \mathrm{R}_1$, et dont la partie positive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $|z| < \mathrm{R}_2$.

En notant $C_r = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| = r\}$, commençons par un :

Lemme 6.2. *Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}\big)$, l'intégrale :*

$$\int_{C_r} f(\zeta)\, d\zeta$$

est indépendante du rayon intermédiaire $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$.

Démonstration. En effet, pour tous $\mathrm{R}_1 < r_1 \leqslant r_2 < \mathrm{R}_2$, il existe clairement une homotopie reliant C_{r_1} à C_{r_2} à travers les cercles concentriques intermédiaires :

$$\Gamma(s,t) \,:=\, \big((1-s)\, r_1 + s\, r_2\big)\, e^{2i\pi t},$$

contenue dans $\overline{A_{r_1,r_2}} \subset A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$, donc le Théorème 2.2 s'applique. □

Maintenant, si une série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$, on peut retrouver ses coefficients par intégration :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \,&=\, \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{1}{z^{n+1}}\bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, z^k\bigg)\, dz \\
&=\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\,(-n-1+k)\,\theta}}{r^{n+1-k}}\, r\, i\, e^{i\,\theta}\, d\theta \\
[\textstyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\, d\theta = 0 \text{ pour } m \neq 0] \qquad &=\, a_n.
\end{aligned}$$

L'analogue de la série entière convergente d'une fonction holomorphe dans un disque devient, dans un anneau, une série doublement infinie avec des puissances négatives de z.

Théorème 6.3. [Développement en série de Laurent sur un anneau] *Toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}\big)$ sur un anneau $\{\mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\}$ avec $0 \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \leqslant \infty$ se développe en série de Laurent :*

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n,$$

normalement convergente sur les compacts de $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$, de coefficients donnés par :

$$a_n \,:=\, \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

ces valeurs étant indépendantes de $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$.

De plus, les parties négative et positive :

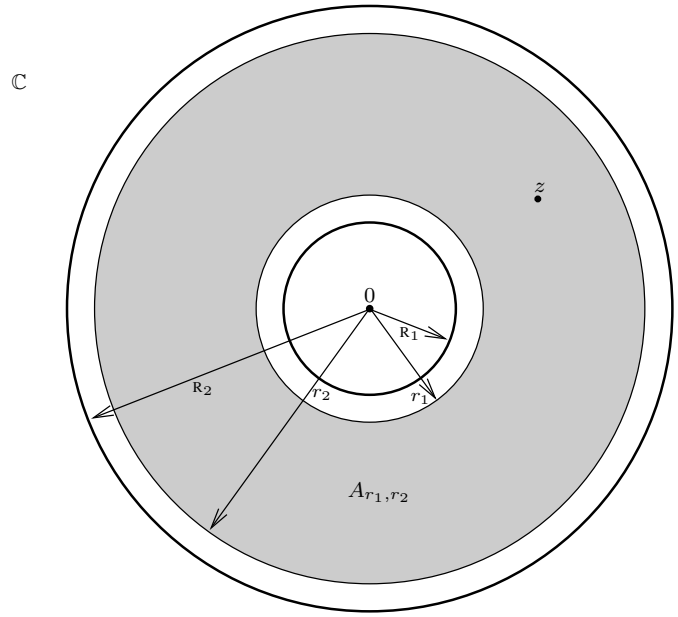
$$f_-\big(\tfrac{1}{z}\big) \,:=\, \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\, z^n \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, \big(\tfrac{1}{z}\big)^n \qquad \textit{et} \qquad f_+(z) \,:=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n,$$

convergent, respectivement, pour :

$$\big|\tfrac{1}{z}\big| \,<\, \tfrac{1}{\mathrm{R}_1} \iff \mathrm{R}_1 \,<\, |z| \qquad \textit{et} \qquad |z| \,<\, \mathrm{R}_2.$$

Le principe d'identité satisfait par les séries entières montre l'*unicité* du développement de $f \in \mathscr{O}\big(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}\big)$ en série de Laurent, *voir* aussi l'Exercice 2.

Démonstration. Pour obtenir cela, nous allons faire usage d'une formule intégrale due à Laurent qui joue, pour les couronnes, le rôle joué par la formule de représentation intégrale $g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ pour les fonctions holomorphes dans un disque $\Delta \supset C_r$.



Proposition 6.4. [Représentation intégrale de Laurent] *Quels que soient les rayons intermédiaires* $\mathrm{R}_1 < r_1 < r_2 < \mathrm{R}_2$*, en tout point :*

$$z \in A_{r_1,r_2} \subset A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2},$$

on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2})).$$

Observons qu'une fois $z \in A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$ fixé, l'indépendance de ces deux intégrales en les rayons r_2 et r_1 avec $\mathrm{R}_1 < r_1 < |z| < r_2 < \mathrm{R}_2$ découle du Lemme 6.2 appliqué aux deux fonctions holomorphes :

$$\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \text{ sur } A_{|z|,\mathrm{R}_2} \qquad \text{et} \qquad \zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \text{ sur } A_{\mathrm{R}_1,|z|}.$$

Démonstration. Introduisons la fonction :

$$g\colon A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} \longrightarrow \mathbb{C},$$

définie par :

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{lorsque } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{pour } \zeta = z. \end{cases}$$

Cette fonction est clairement holomorphe sur $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} \backslash \{z\}$. De plus, si nous développons f en série entière au voisinage de z :

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)\,\big(\zeta - z\big) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n\,!}\,\big(\zeta - z\big)^n,$$

nous voyons que la fonction g :

$$g(\zeta) = f'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)\,!}\,\big(\zeta - z\big)^n$$

est en fait holomorphe près de z, donc dans tout l'anneau $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$.

Par conséquent, le Lemme 6.2 s'applique pour donner $\int_{C_{r_2}} g = \int_{C_{r_1}} g$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

ce que l'on peut réorganiser comme :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \;=\; \frac{f(z)}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \underline{\frac{f(z)}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{\circ}\,.$$

Or le théorème standard de Cauchy donne :

$$1 \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} 1\cdot\frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad\qquad \text{car } z \in \mathbb{D}_{r_2},$$

$$0 \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad\qquad \text{car } z \notin \overline{\mathbb{D}}_{r_1} \text{ donc } \zeta \longmapsto \tfrac{1}{\zeta - z} \in \mathscr{O}(\overline{\mathbb{D}}_{r_1}),$$

donc on a bien :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; f(z). \qquad \square$$

Pour terminer la démonstration du théorème, il ne reste plus qu'à insérer, dans ces deux intégrales, les deux développements en séries normalement convergentes suivants — souvenons-nous que nous avions procédé de manière similaire pour établir que toute fonction holomorphe est analytique, avec, toutefois, seulement des puissances positives $z^{n\geqslant 0}$ — :

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \qquad (\forall\,\zeta\in C_{r_1}),$$

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \qquad (\forall\,\zeta\in C_{r_2}),$$

les convergences normales provenant de $\frac{r_1}{|z|} < 1$ et de $\frac{|z|}{r_2} < 1$.

Enfin, intégration et sommation commutent puis concluent :

$$\begin{aligned}
f(z) \;&=\; -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\
&=\; -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} f(\zeta)\Big(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}\Big)\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} f(\zeta)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\Big)\,d\zeta \\
[m := -n-1] \qquad &=\; \sum_{m=-\infty}^{-1} z^m\,\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}}\,d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \\
[\textstyle\int_{C_{r_1}} = \int_{C_r} = \int_{C_{r_2}}] \qquad &=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,z^n. \qquad \square
\end{aligned}$$

Évidemment, pour des anneaux centrés en des points $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}(z_0) \;:=\; \big\{z\in\mathbb{C}\colon\ \mathrm{R}_1 < |z - z_0| < \mathrm{R}_2\big\},$$

des développements de Laurent similaires de fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}\big(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}(z_0)\big)$ existent :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n \qquad (z \in A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}(z_0)),$$

avec :

$$a_n \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2).$$

7. Singularités illusoires, polaires, essentielles

Dans un (petit) ouvert connexe $\omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction $f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{z_0\}\big)$ holomorphe en-dehors d'un certain point 'central' $z_0 \in \omega$, envisagé comme une singularité isolée de f. Prenons un rayon $0 < \mathrm{R}$ avec :

$$\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0) \,\subset\, \omega.$$

La fonction f étant alors définie dans le disque épointé $\mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(z_0)$ centré en z_0, que l'on peut voir comme un *anneau* de rayons $\mathrm{R}_1 := 0$ et $\mathrm{R}_2 := \mathrm{R}$:

$$A_{0,\mathrm{R}} \,=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z - z_0| < \mathrm{R}\big\} \,=\, \mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(z_0),$$

les résultats de la Section **6** qui précède, notamment le Théorème 6.3, développent la fonction f en série de Laurent normalement convergente sur les compacts de $A_{0,\mathrm{R}}(z_0)$:

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n,$$

avec des coefficients donnés, indépendamment du choix de $0 < r < \mathrm{R}$, par :

$$a_n \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

En fait, rappelons que la partie négative, que nous noterons dorénavant :

$$h(z) \,:=\, \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \big(z - z_0\big)^n \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n},$$

converge pour :

$$\frac{1}{|z - z_0|} \,<\, \frac{1}{\mathrm{R}_1} \,=\, \frac{1}{0} \,=\, \infty,$$

c'est-à-dire pour :

$$|z - z_0| \,>\, \frac{1}{\infty} \,=\, 0,$$

donc pour *tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, ce qui est absolument remarquable ! Ainsi :

$$h \,\in\, \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\backslash\{z_0\}\big).$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(z_0)$, après soustraction de la partie négative :

$$f(z) - h(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z - z_0\big)^n,$$

nous voyons que la fonction $f - h$, *a priori* définie et holomorphe seulement dans $\omega\backslash\{z_0\}$, se prolonge comme fonction holomorphe au voisinage de z_0, donc est holomorphe partout dans ω.

Terminologie 7.1. La partie négative $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\,(z-z_0)^n$ est aussi appelée *partie singulière* de f en z_0 ; elle est holomorphe dans *tout* le plan complexe épointé $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.

Examinons pour commencer la circonstance spéciale où cette partie négative est inexistante.

Théorème 7.2. [de Riemann, singularité illusoire] *Pour $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$, où $\omega \ni z_0$ est un (petit) ouvert connexe, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est bornée sur un voisinage épointé de z_0, c'est-à-dire il existe un rayon $0 < r$ assez petit et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}_r^*(z_0)} \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}.$$

(ii) *$a_n = 0$ pour tout entier $n \leqslant -1$.*

(iii) *f se prolonge, de manière unique, en une fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\omega)$:*

$$\widetilde{f}\big|_{\omega\backslash\{z_0\}} = f.$$

Terminologie 7.3. Dans ce cas, on dit que f possédait une *singularité illusoire* en z_0, ou que sa 'singularité' en z_0 est *éliminable*.

En effet, f était *en fait* holomorphe près de z_0 !

Démonstration. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** Pour tout rayon $0 < s \leqslant r$, nous savons que chaque coefficient a_n avec $n \leqslant -1$ est donné par une formule intégrale que nous pouvons alors aisément majorer :

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_s(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+s\,e^{i\theta})}{(z_0+s\,e^{i\theta}-z_0)^{n+1}}\,i\,s\,e^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\big|f(z_0+s\,e^{i\theta})\big|\;s^{-n}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta \\
&\leqslant \mathrm{M}\,s^{-n} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

par une quantité évanouissante lorsque $s \overset{>}{\longrightarrow} 0$, grâce à $-n \geqslant 1$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) En effet, tous les $a_n = 0$ avec $n \leqslant -1$ étant nuls, la partie singulière $h(z) \equiv 0$ est identiquement nulle, et nous avons déjà observé que $f(z) - h(z) = f(z) - 0 \in \mathscr{O}(\omega)$ se prolonge holomorphiquement à ω. L'unicité est conséquence ... du principe d'unicité !

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Mais oui, bien sûr ! □

Ensuite, réinterprétons le concept de *pôle* déjà présenté par la Section **5**, mais dans le contexte de la théorie de Laurent, où nous supposons seulement, en généralité $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$.

Théorème 7.4. [Singularités polaires] *Pour $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ de développement de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\big(z-z_0\big)^n$ près de z_0, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\big|f(z)\big| \longrightarrow \infty$ quand $z \in \omega\backslash\{z_0\}$ tend vers z_0.*

(ii) *Il existe un entier* $-\nu \leqslant -1$ *avec* $a_{-\nu} \neq 0$ *tel que :*

$$0 = a_{-n} \qquad (\forall -n \leqslant -\nu-1).$$

(iii) *Il existe un polynôme non constant* $P \in \mathbb{C}[z]$ *tel que :*

$$f(z) - P\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans ω *tout entier.*

Lorsque ces conditions sont réalisées, l'entier $-\nu \leqslant -1$ est alors déterminé de manière unique, et on dit que f possède un *pôle d'ordre* ν en z_0. Le lecteur-étudiant vérifiera que ceci est cohérent avec la première Définition 5.5.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Si donc $|f(z)| \longrightarrow \infty$ quand $z \longrightarrow z_0$, la fonction-inverse :

$$g := \frac{1}{f},$$

définie et holomorphe dans un disque épointé $\mathbb{D}_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ de rayon $r > 0$ assez petit, tend vers 0 quand $z \longrightarrow z_0$. Par conséquent, le précédent Théorème 7.2 offre un prolongement holomorphe $\widetilde{g} \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$, non constant, avec $\widetilde{g}(z_0) = 0$.

Si $\nu \geqslant 1$ désigne alors l'ordre d'annulation de $\widetilde{g}$ en z_0, on peut écrire, quitte à réduire $r > 0$:

$$\widetilde{g}(z) = (z-z_0)^\nu\, h(z),$$

avec une fonction holomorphe $h \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$ qui ne s'annule jamais dans $\mathbb{D}_r(z_0)$.

Développons l'inverse de cette fonction en série entière dans $\mathbb{D}_r(z_0)$:

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \big(z-z_0\big)^n,$$

avec bien sûr $b_0 \neq 0$. Ainsi, en revenant à notre fonction, nous obtenons pour $z \in \mathbb{D}_r^*(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^\nu}\,\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^\nu}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \big(z-z_0\big)^n.$$

Enfin, l'unicité du développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ force à atteindre **(ii)** :

$$0 = a_{-n} \text{ pour } -n \leqslant -\nu-1 \qquad \text{et} \qquad a_n = b_{\nu+n} \text{ pour } n \geqslant -\nu.$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Puisque la partie singulière du développement de Laurent est tronquée, elle s'écrit effectivement sous une forme polynomiale non constante :

$$\frac{a_{-\nu}}{(z-z_0)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} = P\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big).$$

(iii) $\Longrightarrow$ **(i)** Puisque $P\big(\frac{1}{z-z_0}\big)$ est non constant, il contient un terme de plus haut degré $\frac{a_{-\nu}}{(z-z_0)^\nu}$, qui tend vers ∞ en module quand $z \longrightarrow z_0$, et domine tous les autres. $\square$

Définition 7.5. Une fonction $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ holomorphe dans un voisinage ouvert épointé $\omega \ni z_0$ est dite *méromorphe en* z_0 si z_0 est une singularité illusoire, ou un pôle de f.

Ainsi, les fonctions holomorphes en z_0 *sont* méromorphes. Tout ce qui n'est ni holomorphe, ni méromorphe en z_0, est alors mis dans un grand sac.

Définition 7.6. Une fonction $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ holomorphe dans un voisinage ouvert épointé $\omega \ni z_0$ est dite avoir une *singularité essentielle en* z_0 si z_0 n'est ni une singularité illusoire, ni un pôle de f.

Comme toute $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ possède un développement en série de Laurent :

$$f(z) \,=\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \,\big(z - z_0\big)^n,$$

convergeant dans un disque épointé $\mathbb{D}_r^*(z_0) \subset \omega\backslash\{z_0\}$ de rayon $r > 0$, ce qui précède permet de *lire* sur ce développement les trois types de singularités possibles en z_0.

Définition 7.7. La *valuation* en z_0 de $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{z_0\}\big)$ est l'entier, éventuellement égal à $-\infty$ ou à $+\infty$:

$$\begin{aligned} \nu_f(z_0) \,&:=\, \inf\big\{n \in \mathbb{Z}\colon\, a_n \neq 0\big\} \\ &\in\, \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Le cas dégénéré inintéressant où $\nu_f(z_0) = +\infty$ ne se produit que lorsque $f \equiv 0$ dans un voisinage épointé de z_0.

Proposition-Définition 7.8. [Classification des singularités isolées] *Pour $f \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_r^*(z_0)\big)$ développée en série de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\,(z - z_0)^n$, on a les trois caractérisations suivantes en termes de valuation :*

$$\begin{aligned} f \text{ a une singularité illusoire en } z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \,\leqslant\, \nu_f(z_0), \\ f \text{ a un pôle d'ordre } \nu \geqslant 1 \text{ en } z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\nu \,=\, \nu_f(z_0), \\ f \text{ a une singularité essentielle en } z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\infty \,=\, \nu_f(z_0). \end{aligned}$$

□

Il y a donc **3** catégories de singularités isolées, la première étant virtuelle. L'intérêt du concept de *fonction méromorphe* en z_0, c'est qu'il est invariant par rapport aux quatre opérations analytiques élémentaires $+$, $-$, $\times$, $\div$. En effet, le fait que toute fonction méromorphe en z_0 non identiquement nulle s'écrive $(z - z_0)^\nu\, g(z)$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$ et g holomorphe près de z_0 ne s'annulant pas permet de se convaincre de l'énoncé suivant, *voir* l'Exercice 3.

Lemme 7.9. *La collection des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ est un anneau commutatif, celle des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}_r^*(z_0)$ et méromorphes en z_0, un corps commutatif.* □

La troisième catégorie de singularités isolées, celles qu'on appelle *essentielles*, telles que par exemple en $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} e^{1/z} \,&=\, \cdots + \frac{1}{n\,!}\,\frac{1}{z^n} + \cdots + \frac{1}{z} + 1, \\ e^{-1/z^2} \,&=\, \cdots + \frac{1}{n\,!}\,\frac{(-1)^n}{z^{2n}} + \cdots - \frac{1}{z^2} + 1, \end{aligned}$$

dont les développements de Laurent comportent une infinité de puissances négatives, sont beaucoup plus délicates à étudier, et nécessitent des outils mathématiques sophistiqués, notamment parce que le comportement de $f(z) \in \mathbb{C}$ quand $z \longrightarrow z_0$ est plus « erratique », voire « sauvage », que celui des fonctions holomorphes ou méromorphes.

En tout cas, au point où nous en sommes, nous pouvons établir le

Théorème 7.10. [Casorati-Weierstrass] *Si $f \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(z_0)\big)$ a une singularité essentielle en z_0, alors pour tout $0 < r \leqslant \mathrm{R}$, l'image par f du sous-disque épointé $\mathbb{D}^*_r(z_0)$ est dense :*

$$\overline{f\big(\mathbb{D}^*_r(z_0)\big)} \,=\, \mathbb{C}.$$

La réciproque est vraie, car nous savons déjà que $f(z) \longrightarrow f(z_0)$ quand f a une singularité illusoire en z_0, et que $|f(z)| \longrightarrow \infty$ quand f a un pôle en z_0, deux circonstances vraiment *très* éloignées de la *densité* de l'image.

Démonstration. Supposons par l'absurde que l'image $f\big(\mathbb{D}^*_r(z_0)\big)$ ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$. Il existe alors un point $w \in \mathbb{C}$ dont un voisinage ouvert $\mathbb{D}_\delta(w)$ avec $\delta > 0$ assez petit évite $f\big(\mathbb{D}^*_r(z_0)\big)$:

$$\big|f(z) - w\big| \,\geqslant\, \delta \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}^*_r(z_0)).$$

Nous pouvons donc définir dans $\mathbb{D}^*_r(z_0)$ une nouvelle fonction holomorphe :

$$g(z) \,:=\, \frac{1}{f(z) - w}$$

qui satisfait $|g(z)| \leqslant \frac{1}{\delta}$, c'est-à-dire est bornée ! Par conséquent, le Théorème 7.2 de Riemann s'applique et offre un prolongement holomorphe en z_0, toujours noté $g(z)$.

Évidemment, $g \not\equiv 0$, sinon $0 \cdot \big(f(z) - w\big) \equiv 1$. Alors il existe $\nu \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_s(z_0)\big)$ holomorphe jamais nulle dans un sous-disque de rayon $0 < s \leqslant r$ tels que :

$$g(z) \,=\, \big(z - z_0\big)^\nu\, h(z) \,=\, \frac{1}{f(z) - w},$$

d'où une représentation :

$$f(z) \,=\, w + \frac{1}{(z - z_0)^\nu}\, \big[h(z)\big]^{-1},$$

montrant que f possède un pôle d'ordre ν en z_0 (ou une singularité illusoire lorsque $\nu = 0$) — contradiction ! $\square$

8. Fonctions méromorphes globales : Théorème de Mittag-Leffler

Après cette étude locale, nous pouvons globaliser les concepts.

Définition 8.1. On appelle *fonction méromorphe* dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega \backslash P)$ dans le complémentaire d'un sous-ensemble fermé discret $P \subset \Omega$ telle que :

$$\forall\, z_0 \in P \qquad f \text{ est méromorphe en } z_0,$$

c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert :

$$z_0 \,\in\, \omega \,\subset\, \Omega,$$

avec $P \cap \omega = \{z_0\}$ telle que $f\big|_\omega$ est méromorphe en z_0, au sens de la Définition 7.5.

Autrement dit, les singularités de f aux points de P sont ou bien illusoires, ou bien polaires, de croissance $\mathrm{O}\big(\frac{1}{|z - z_0|^\nu}\big)$ avec $\nu \,\geqslant\, 1$ entier. Ainsi, *les singularités essentielles sont exclues du monde méromorphe*.

Notation 8.2. L'ensemble des fonctions méromorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sera noté $\mathscr{M}(\Omega)$.

C'est une algèbre contenant les fonctions holomorphes :

$$\mathscr{M}(\Omega) \supset \mathscr{O}(\Omega).$$

Lemme 8.3. *Dans un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'algèbre $\mathscr{M}(\Omega)$ est un corps.*

Démonstration. En effet, le principe d'identité garantit (exercice) qu'il n'y a pas de diviseur de zéro, et que $\frac{1}{f} \in \mathscr{M}(\Omega)$ pour toute fonction $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ avec $f \not\equiv 0$. □

Ainsi, pour deux fonctions holomorphes quelconques $f_1, f_2 \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans Ω connexe avec $f_2 \not\equiv 0$, le quotient :

$$\frac{f_1}{f_2} \in \mathscr{M}(\Omega)$$

est toujours méromorphe.

Maintenant, que signifie la convergence d'une suite de fonctions méromorphes ? Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit donc une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions méromorphes $u_n \in \mathscr{M}(\Omega)$.

Définition 8.4. La suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ est dite *normalement convergente* sur tout compact de Ω si :

$$\begin{aligned} \forall\, K \subset \Omega \text{ compact} \quad & \exists\, K \subset \omega \subset \Omega \quad \text{voisinage ouvert} \\ & \exists\, \mathrm{N}_K \geqslant 1 \quad \text{tels que} \\ & u_n \in \mathscr{O}(\omega) \quad \forall\, n \geqslant \mathrm{N}_K, \end{aligned}$$

et si la série de fonctions *holomorphes* dans ω :

$$\sum_{n=\mathrm{N}_K}^{\infty} u_n$$

converge normalement sur K.

Autrement dit, sur tout compact, à partir d'un certain rang, les u_n n'ont plus aucun pôle. Lorsque cette condition est satisfaite, la réunion :

$$P := \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{\text{pôles de } u_n\big\}$$

est alors un sous-ensemble *fermé discret* de Ω.

Il est pratique d'introduire la suite classique $\{K_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ de sous-ensembles compacts de Ω :

$$\begin{aligned} K_\ell &:= \big\{z \in \Omega\colon\ |z| \leqslant \ell \text{ et } \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}, \\ \mathsf{Int}\, K_\ell &= \big\{z \in \Omega\colon\ |z| < \ell \text{ et } \mathsf{dist}\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}, \end{aligned}$$

satisfaisant, d'après un théorème démontré dans le premier chapitre :

$$K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1} \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell.$$

Alors un (autre) théorème vu dans le chapitre qui précède garantit que sur chaque K_ℓ, la série tronquée de fonctions holomorphes converge vers une fonction holomorphe dans l'intérieur :

$$\sum_{n=\mathrm{N}_{K_\ell}}^{\infty} u_n \in \mathscr{O}\big(\mathsf{Int}\, K_\ell\big),$$

tandis que la première partie, finie, de la somme complète, à savoir :

$$\sum_{n=1}^{N_{K_\ell}-1} u_n \ \in \ \mathscr{M}\big(\mathsf{Int}\, K_\ell\big),$$

définit une fonction évidemment méromorphe. Une conséquence directe du théorème connu pour les suites de fonctions holomorphes qui convergent normalement nous donne la

Proposition 8.5. *Si une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions méromorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ converge normalement sur tout compact de Ω, alors sa limite :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ =: \ u \ \in \ \mathscr{M}(\Omega)$$

constitue une fonction méromorphe dans Ω.

De plus, pour tout entier $\kappa \geqslant 0$, la série dérivée terme à terme est aussi normalement convergente sur tout compact de Ω vers :

$$u^{(\kappa)}(z) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(\kappa)}(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega \backslash \text{pôles de } u). \qquad \square$$

Maintenant, soit une fonction méromorphe $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle $f \not\equiv 0$, et soit son ensemble polaire :

$$P \ := \ \big\{a \in \mathbb{C}\colon\ a \text{ est un pôle de } f\big\}.$$

Par définition, c'est un sous-ensemble discret fermé de $\mathbb{C}$. En chaque point $a \in P$, la partie singulière de f — partie négative de son développement de Laurent en a — est un certain polynôme complexe non nul sans terme constant :

$$P_a\Big(\frac{1}{z-a}\Big).$$

Heuristiquement, on s'imagine que f s'identifie à la somme de ces parties singulières :

$$f(z) \ \overset{?}{=} \ \sum_{a \in P} P_a\Big(\frac{1}{z-a}\Big) + \mathsf{reste\ holomorphe},$$

mais cela n'est malheureusement pas le cas, parce que la somme à droite n'est pas convergente en général. Toutefois, lorsque :

$$\mathsf{Card}\, P \ < \ \infty,$$

c'est (trivialement) vrai. Donc seul le cas où P est infini pose question. Dans ce cas, on peut supposer, puisque P ne peut avoir aucun point d'accumulation à distance finie, que :

$$P \ = \ \big\{a_n\big\}_{n=1}^{\infty}, \qquad |a_n| \ \leqslant \ |a_{n+1}|, \qquad a_{n_1} \ \neq \ a_{n_2} \text{ pour } n_1 \ \neq \ n_2,$$

et on peut écrire :

$$P_{a_n}\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) \ := \ P_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) \ =: \ \frac{c_{n,\nu_n}}{(z-a_n)^{\nu_n}} + \cdots + \frac{c_{n,1}}{(z-a_n)^1},$$

avec $\nu_n \geqslant 1$ et avec $c_{n,\nu_n} \neq 0$.

Inversement, étant donné une telle suite quelconque de parties singulières $P_n\big(\frac{1}{z-a_n}\big)$ en des points d'une telle suite quelconque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, on peut se demander s'il existe une fonction méromorphe :

$$f \in \mathscr{M}(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\big\backslash\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\big),$$

ayant pour parties singulières exactement ces $P_n\big(\frac{1}{z-a_n}\big)$ en les a_n.

À nouveau, le problème serait trivial avec une famille *finie* $\{a_n\}_{n=1}^{\mathrm{N}}$. Dans le cas infini, la réponse est aussi positive, à condition d'ajouter des termes correctifs.

Théorème 8.6. [Mittag-Leffler] *Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$ mutuellement distincts avec $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$, avec $|a_n| \longrightarrow \infty$, et pour toute famille arbitraire de polynômes $P_n\big(\frac{1}{z-a_n}\big)$ non nuls sans termes constants, il existe une suite $\big\{Q_n(z)\big\}_{n=1}^{\infty}$ de polynômes correctifs $Q_n \in \mathbb{C}[z]$ tels que la série de fonctions méromorphes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigg(P_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - Q_n(z)\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$$

converge, uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, vers une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier qui admet exactement $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ comme ensemble de pôles en lesquels elle a ces $P_n\big(\frac{1}{z-a_n}\big)$ comme parties singulières.

Si une autre fonction :

$$g \in \mathscr{M}(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\big\backslash\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\big)$$

est solution du même problème, alors dans la soustraction $f - g$, toutes les parties singulières disparaissent, donc $f - g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, ce qui veut dire que la solution générale s'obtient en additionnant une fonction quelconque $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

Démonstration. La fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D}_{|a_n|}$:

$$p_n(z) := P_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_n^{(i)}(0)}{n\,!}\, z^i,$$

est développable en série entière qui converge normalement sur le sous-disque compact :

$$\overline{\mathbb{D}}_{|a_n|-1} \subset \mathbb{D}_{|a_n|}.$$

Par conséquent, il existe un ordre de troncature $\mathrm{I}_n \gg 1$ assez grand pour que le polynôme :

$$Q_n(z) := \sum_{i=0}^{\mathrm{I}_n} \frac{p_n^{(i)}(0)}{n\,!}\, z^i$$

satisfasse :

$$\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}_{|a_n|-1}} \bigg|P_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - Q_n(z)\bigg| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Maintenant, soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact arbitraire. Puisque $|a_n| \longrightarrow \infty$, il existe $\mathrm{N}_K \gg 1$ assez grand pour que :

$$K \subset \overline{\mathbb{D}}_{|a_n|-1} \qquad (\forall\, n \geqslant \mathrm{N}_K).$$

et l'inégalité ci-dessus montre la convergence normale, au sens de la Définition 8.4, de la série :

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \bigg(P_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big) - Q_n(z)\bigg). \qquad \square$$

9. Ouverts simplement connexes

Le concept d'homotopie vu dans la Définition 3.1 permet d'introduire une nouvelle notion qui exprime mathématiquement l'idée intuitive qu'un ouvert n'a pas de « trous ».

Définition 9.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *simplement connexe* si toute paire (γ_0, γ_1) de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de mêmes extrémités quelconques :

$$a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \qquad \text{et} \qquad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b,$$

est homotope dans Ω par une famille $\big\{\gamma_s\big\}_{s\in[0,1]}$ de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ d'extrémités constantes $a = \gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1) = b$, courbes γ_s toutes contenues dans Ω.

Notons que Ω n'est *pas* supposé ici connexe. Ainsi :

$$\text{simplement connexe} \quad \not\Leftarrow \quad \not\Rightarrow \quad \text{connexe.}$$

Toutefois, Ω est simplement connexe si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont (exercice).

Exemple 9.2. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ convexe — donc connexe et étoilé en chacun de ses points — est simplement connexe, car l'homotopie évidente :

$$\gamma_s(t) := (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t) \qquad {\scriptstyle (s\in[0,1])}$$

est à valeur dans Ω.

Exemple 9.3. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ étoilé en un point $z_0 \in \Omega$ est simplement connexe, car toute courbe γ est homotope, via :

$$(s,t) \longmapsto \gamma_s(t) := (1-s)\,\gamma(t) + s\,z_0$$

à la courbe constante égale à z_0, et comme être homotope est une relation d'équivalence d'après l'Observation 3.6, cela conclut.

Exemple 9.4. Le plan coupé $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est aussi simplement connexe, bien qu'il ne soit pas convexe. En effet, écrivons :

$$\gamma_0(t) = r_0(t)\,e^{i\theta_0(t)} \qquad \text{et} \qquad \gamma_1(t) = r_1(t)\,e^{i\theta_1(t)},$$

avec $r_0, r_1 \colon [0,1] \longrightarrow]0,\infty[$, et $\theta_0, \theta_1 \colon [0,1] \longrightarrow]-\pi,\pi[$. Par convexité de ces deux intervalles d'arrivée $]0,\infty[$ et $]-\pi,\pi[$, il est clair que la famille paramétrée par $s \in [0,1]$:

$$\gamma_s(t) := \big((1-s)\,r_0(t) + s\,r_1(t)\big)\,e^{i[(1-s)\,\theta_0(t)+s\,\theta_1(t)]}$$

est constamment à valeurs dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

Par contraste avec ces deux exemples, le plan complexe épointé $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est *pas* simplement connexe : intuitivement, deux courbes allant de $a = -1$ à $b = +1$ en-dessous et au-dessus de l'origine ne peuvent pas être homotopes, à moins que l'homotopie « passe par 0 », ce qui est interdit — mais cela n'est pas un argument rigoureux.

Dans un instant, nous établirons mathématiquement que $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est pas simplement connexe grâce au célèbre

Théorème 9.5. [de la monodromie] *Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ possède une primitive $F \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $F' = f$.*

Démonstration. En raisonnant composante connexe par composante connexe, nous pouvons supposer Ω connexe, donc connexe par arcs $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$, puisque tous les ouverts connexes de $\mathbb{R}^2$ sont en fait connexes par arcs $\mathscr{C}^0$, d'après le cours de Topologie générale, et même connexes par arcs $\mathscr{C}^\infty$, et puisque tous les arcs $\mathscr{C}^0$ peuvent être régularisés par convolution pour devenir $\mathscr{C}^\infty$ tout en demeurant dans Ω, d'après le cours d'Analyse de Fourier.

Fixons un point $z_0 \in \Omega$ et définissons :

$$F_\gamma(z) \,:=\, \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta,$$

où l'intégrale est prise le long d'une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ quelconque allant de z_0 à z.

Mais pourquoi la valeur $F(z)$ est-elle indépendante du choix de la courbe ? Parce toute autre courbe μ allant de z_0 à z est par hypothèse homotope à γ, et parce que le Théorème 3.2 a déjà démontré la coïncidence :

$$\begin{aligned} F_\mu(z) - F_\gamma(z) \,&=\, \int_\mu f(\zeta)\, d\zeta - \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \\ &=\, 0. \end{aligned}$$

Grâce à cette indépendance, avec $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$, pour tout $h \in \mathbb{C}$ petit avec $z + h \in \mathbb{D}_r(z)$, nous avons :

$$F(z+h) - F(z) \,=\, \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

et alors le même argument que dans la démonstration du Théorème de Goursat vue dans un chapitre précédent utilisant $f(\zeta) = f(z) + \mathrm{O}(h)$ conclut :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \,=\, f(z). \qquad \square$$

Sans effort, nous obtenons une version très générale du théorème de Cauchy.

Théorème 9.6. *Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :*

$$0 \,=\, \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Démonstration. Avec $\gamma(0) = \gamma(1)$, l'existence d'une primitive donne bien $F\big(\gamma(1)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = 0$. $\square$

Observation 9.7. *Le plan complexe épointé $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. Sinon, la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ conduirait à la contradiction :

$$0 \,=\, \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{z}\, dz \,=\, \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta \,=\, 2i\pi \,\neq\, 0. \qquad \square$$

10. Exponentielle complexe et logarithme complexe

Rappelons pour commencer quelques propriétés de l'exponentielle réelle $x \longmapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$.

Théorème 10.1. [Admis] *L'exponentielle réelle $x \longmapsto e^x$ est égale à sa propre dérivée $\big(e^x\big)' = e^x$, est strictement croissante, et satisfait :*

$$0 = \lim_{-\infty \leftarrow x} e^x \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty. \qquad \square$$

En remplaçant formellement x par $ix = \sqrt{-1}\,x$ et aussi par $-ix$ dans la série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = e^x$, on définit la fonction sinus par une série entière :

$$\begin{aligned} \sin x \;:=\; \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i} &= \frac{1}{2i}\bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n\,!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n\,!}\bigg) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\, \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \end{aligned}$$

dont le rayon de convergence est toujours infini.

Définition 10.2. [Admise] Le nombre $\pi > 0$ est le premier zéro strictement positif de $x \longmapsto \sin x$.

On démontre que ce zéro existe, et que la fonction réelle $x \longmapsto \sin x$ est périodique de période 2π. De plus :

$$e^{i\pi/2} = i,$$

et pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle complexe $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n$ que nous avons déjà définie satisfait :

$$e^z = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in 2i\pi\,\mathbb{Z}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, en introduisant la fonction cosinus :

$$\cos x \;:=\; \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2\,m)\,!},$$

on a la formule :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

d'où découle :

$$\big|e^{ix}\big| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Rappelons qu'une différentiation terme à terme de la fonction analytique sur $\mathbb{C}$ donc holomorphe :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\,!},$$

donne aussitôt :

$$\big(e^z\big)' = e^z.$$

Ensuite, la convergence normale justifie le calcul :

$$\begin{aligned} \bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\,!}\bigg)\bigg(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m\,!}\bigg) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell\,!}\bigg(\sum_{n+m=\ell} \frac{\ell\,!}{m\,!\,n\,!}\, z^n\, w^m\bigg) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell\,!}\,\big(z+w\big)^{\ell}, \end{aligned}$$

montrant que :

$$e^z\, e^w \;=\; e^{z+w} \qquad (\forall\, z, w \in \mathbb{C}).$$

Évidemment :

$$e^0 \;=\; 1,$$

et avec $w := -z$, il vient :

$$e^z\, e^{-z} \;=\; 1 \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

En écrivant $z = x + iy$, on a :

$$e^z \;=\; e^{x+iy} \;=\; e^x\, e^{iy},$$

et comme $\left|e^{iy}\right| = 1$:

$$\left|e^z\right| \;=\; e^x \;=\; e^{\mathsf{Re}\, z}.$$

L'équation $e^z = e^w$ équivaut à $e^{z-w} = 1$, d'où $e^{\mathsf{Re}\, z - \mathsf{Re}\, w} = 1$, donc $\mathsf{Re}\,(z - w) = 0$ et ce qui précède a déjà donné la solution générale :

$$z - w \;=\; 2i\, k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

De plus, le Théorème 10.1 implique la surjectivité de $e^x \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, laquelle implique à son tour la surjectivité de :

$$\mathbb{C} \ni w \longmapsto e^w \in \mathbb{C}^*,$$

puisque résoudre $e^w = z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est possible, si on décompose : $w = u + iv$:

$$e^w \;=\; e^u\, e^{iv} \;=\; r\, e^{i\theta},$$

en prenant simplement $u := \log r$ et $v := \theta$, la solution générale s'écrivant :

$$u \;=\; \log r \qquad \text{et} \qquad v \;=\; \theta + 2i\, k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Tout ceci démontre le

Théorème 10.3. *L'application $z \longmapsto e^z$ de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\} =: \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ de noyau :*

$$\mathsf{Ker}\, e^z \;=\; 2i\pi\, \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Maintenant, supposons que nous souhaitions définir le *logarithme* d'un nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$, à savoir un nombre $w \equiv \log z$ tel que $e^w = z$. En écrivant $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $\theta \in \mathbb{R}$, il est naturel d'assigner :

$$\log z \;:=\; \log r + i\, \theta,$$

où $\log r \in \mathbb{R}$ est la valeur sur $r > 0$ du logarithme népérien standard lorsque $z \in \Omega$ est sur l'axe réel, proche de 1.

Mais le problème avec cette définition, c'est que l'argument θ de z n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près. Heureusement, pour z fixé donné, on peut faire un choix de $\theta = \theta_z$, et si z varie seulement quelque peu, on peut déterminer $\theta = \theta(z)$ comme fonction continue de z.

Ainsi localement, il existe des *déterminations* inambiguës de $\log z$, mais elles ne peuvent pas fonctionner de manière globale, puisque si $z \in \mathbb{C}^*$ effectue un tour complet autour de $0 \in \mathbb{C}$, son argument varie de $\pm 2\pi$, donc $\log z$ varie de $\pm 2i\pi$. Afin de pallier ce défaut, une option consiste à introduire le concept de *fonction multivaluée*, mais nous ne pourrons pas le faire dans ce cours. Plutôt, nous allons restreindre les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ afin que $\log z$ y soit bien définie, comme vraie fonction, univaluée !

Théorème 10.4. *Dans tout ouvert connexe et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ avec $0 \notin \Omega$ et $1 \in \Omega$, il existe une détermination inambiguë et unique du logarithme :*

$$F(z) \,=\, \mathsf{log}_\Omega(z),$$

satisfaisant :

(1) *F est holomorphe dans Ω de dérivée $F'(z) = \frac{1}{z}$;*

(2) *$e^{F(z)} \equiv z$ pour tout $z \in \Omega$;*

(3) *$F(r) = \mathsf{log}\, r$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ au voisinage de 1.*

Ainsi, cette fonction $z \longmapsto \mathsf{log}_\Omega(z)$ est satisfaisante, puisqu'elle s'accorde avec le logarithme népérien standard.

Démonstration. Nous allons construire F comme une primitive de $\frac{1}{z}$, de manière analogue à $\mathsf{log}\, r = \int_1^r \frac{dx}{x}$.

Comme $0 \notin \Omega$, la fonction $\frac{1}{z}$ est holomorphe dans Ω. Définissons :

$$\mathsf{log}_\Omega(z) \,:=\, \int_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta,$$

où γ est n'importe quelle courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ allant de $1 \in \Omega$ jusqu'à $z \in \Omega$. Grâce à l'hypothèse de simple connexité et au Théorème 3.2, la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de γ.

Évidemment, avec $z + h$ proche de z :

$$\mathsf{log}_\Omega(z+h) - \mathsf{log}_\Omega(z) \,=\, \int_{[z,z+h]} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta,$$

et en raisonnant comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, nous obtenons la $\mathbb{C}$-différentiabilité **(1)** :

$$\big(\mathsf{log}_\Omega(z)\big)' \,=\, \frac{1}{z}.$$

Pour avoir **(2)**, qui équivaut à :

$$z\, e^{-F(z)} \overset{?}{\equiv} 1,$$

il suffit de différentier :

$$\begin{aligned}\big(z\, e^{-F(z)}\big)' \,&=\, e^{-F(z)} - z\, F'(z)\, e^{-F(z)}\\ &=\, e^{-F(z)} \big[1 - z\, \tfrac{1}{z}\big]\\ &\equiv\, 0,\end{aligned}$$

pour voir, eu égard à la connexité de Ω, que :

$$z\, e^{-F(z)} \,\equiv\, \mathsf{constante} \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Mais cette constante vaut 1, car en $z = 1$, on a $F(1) = 0$.

Enfin pour vérifier **(3)**, en $z = r \in \mathbb{R}$ près de 1, rien ne peut nous retenir de choisir le segment $[1, r] =: \gamma \subset \Omega$ pour constater que :

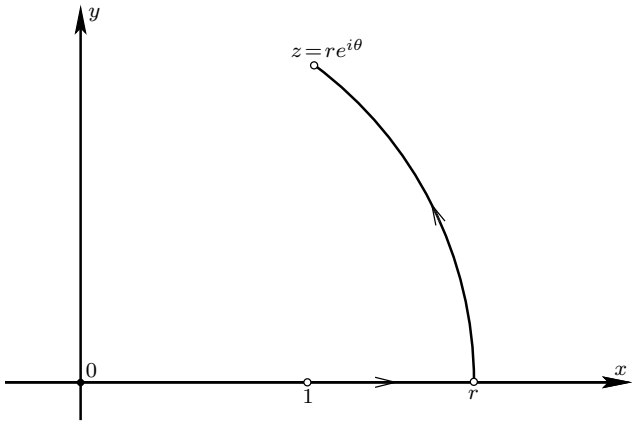
$$\mathsf{log}_\Omega(r) \,=\, \int_1^r \frac{dx}{x} \,=\, \mathsf{log}\, r. \qquad \square$$

Le plus fréquemment, on choisit comme ouvert $\Omega \,:=\, \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ qui est simplement connexe ; on pourrait aussi choisir $\Omega := \mathbb{C}\backslash e^{i\varphi}\, \mathbb{R}_-$, avec $\varphi \in \mathbb{R}$ fixé.

Théorème 10.5. *Dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, la fonction logarithme du théorème précédent vaut, sur tout $z = r\,e^{i\theta}$ avec $0 < r$ et avec $-\pi < \theta < \pi$:*

$$\log z \;=\; \log r + i\,\theta.$$

Terminologie 10.6. Sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on appelle cette fonction *détermination principale du logarithme*, car toutes les autres fonctions $z \longmapsto \log z$ satisfaisant $e^{\log z} \equiv z$ dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ s'en déduisent par addition d'une constante $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (exercice).



Démonstration. Puisque nous pouvons choisir le chemin d'intégration γ allant de 1 à z dans l'ouvert connexe et simplement connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, prenons celui, représenté sur la figure, qui consiste en le segment réel $[1, r]$ suivi de l'arc de cercle centré en 0 allant de r à $r\,e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}\log z \;&=\; \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\theta \frac{i\,r\,e^{it}}{r\,e^{it}}\,dt \\ &=\; \log r + i\,\theta.\end{aligned}$$

□

Une mise en garde importante est qu'on n'a pas en général :

$$\log\big(z_1\,z_2\big) \overset{\text{faux}}{=} \log z_1 + \log z_2,$$

simplement parce que les arguments θ dans $\log z$ appartiennent toujours par définition à l'intervalle $]-\pi, \pi[$, qui n'est pas stable par addition ! Par (contre-)exemple, avec $z_1 = e^{2i\pi/3} = z_2$, d'où :

$$\log z_1 \;=\; \frac{2i\pi}{3} \;=\; \log z_2,$$

on doit récrire :

$$z_1\,z_2 \;=\; e^{2i\pi/3+2i\pi/3} \;=\; e^{4i\pi/3} \;=\; e^{-2i\pi/3},$$

pour assigner :

$$\log\big(z_1\,z_2\big) \;=\; -\frac{2i\pi}{3} \;\neq\; \frac{2i\pi}{3} + \frac{2i\pi}{3}.$$

Théorème 10.7. *La détermination principale du logarithme complexe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est développable en série entière convergente pour $|z| < 1$:*

$$\log\big(1+z\big) \;=\; z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{z^n}{n}.$$

Démonstration. En effet, la dérivée du membre de gauche, égale à $\frac{1}{1+z}$, coïncide avec celle de la série à droite (dont le rayon de convergence vaut 1) :

$$1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \;=\; \frac{1}{1+z},$$

donc leur différence est constante dans le disque connexe $\{|z| < 1\}$, mais cette constante vaut 0, car en $z = 0$, les deux côtés valent $\log(1+0) = 0$ et 0. $\square$

Grâce à ce travail de construction du logarithme, nous sommes en mesure de définir les fonctions-puissances :

$$z \longmapsto z^\alpha,$$

pour un nombre complexe arbitraire $\alpha \in \mathbb{C}$.

Définition 10.8. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe et simplement connexe avec $0 \notin \Omega$ et $1 \in \Omega$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque, on définit :

$$z^\alpha \;:=\; e^{\alpha \log z},$$

où $z \longmapsto \log z$ est construite par le Théorème 10.4.

Observons que $1^\alpha = 1$, et pour $\alpha = \frac{1}{n}$ inverse d'un entier $n \geqslant 1$, que :

$$\big(z^{1/n}\big)^n \;=\; e^{\log z/n} \cdots e^{\log z/n} \;=\; e^{n \log z/n} \;=\; e^{\log z} \;=\; z,$$

ce qui montre que $z^{1/n}$ est effectivement une racine n-ième de z. Par exemple avec $n = 2$, une fonction $\sqrt{z} = z^{1/2}$ est ainsi définie de manière rigoureuse dans Ω.

Nous savons que tout $w \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $w = e^z$ avec $z \in \mathbb{C}$. L'énoncé suivant généralise cela en définissant $\log f(z)$ pour une fonction holomorphe ne s'annulant jamais.

Théorème 10.9. *Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe jamais nulle dans un ouvert connexe et* simplement connexe*, alors il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ telle que :*

$$f(z) \;=\; e^{g(z)} \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Ainsi, il est légitime d'écrire $g(z) = \log f(z)$. On vérifie (exercice) que toute autre $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $f(z) = e^{h(z)}$ s'en déduit $h(z) \equiv g(z) + 2ik\pi$ par addition d'une constante, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Fixons $z_0 \in \Omega$, prenons $c_0 \in \mathbb{C}$ avec $e^{c_0} = f(z_0)$, et définissons :

$$g(z) \;:=\; \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + c_0,$$

où $\gamma \subset \Omega$ est une courbe quelconque $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ allant de z_0 à z. Comme d'habitude, le résultat ne dépend pas de γ, et on a :

$$g'(z) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} \int_{[z, z+h]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta \;=\; \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Un calcul simple :

$$\big(f(z)\, e^{-g(z)}\big)' \;=\; \big[\underline{f'(z) - f(z)\, g'(z)}_{\circ}\big]\, e^{-g(z)} \;\equiv\; 0,$$

montre que la fonction $f(z)\, e^{-g(z)}$ est constante, et comme en $z = z_0$, elle vaut $f(z_0)\, e^{-c_0} = 1$, la connexité de Ω conclut que $f(z) \equiv e^{g(z)}$ partout. $\square$

11. Ouverts holomorphiquement simplement connexes

La Définition 9.1 a déclaré qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est *simplement connexe* si toute paire de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans Ω ayant mêmes points de départ et d'arrivée peut être 'interpolée' par une famille continue de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans Ω à extrémités constantes. Ceci implique alors immédiatement l'existence de primitives pour toutes les fonctions $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, et aussi, la propriété fondamentale de Cauchy :

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta,$$

pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée* $\gamma \subset \Omega$, *cf.* le Théorème 9.6.

Un examen attentif du Théorème 9.5 de monodromie, et un re-parcours mental des Théorèmes 10.4 et 10.9 d'existence d'une fonction logarithme (composée), convainquent que c'est seulement cette propriété d'annulation $0 = \int_\gamma f$, offrant l'existence de primitives, qui a été utilisée comme argument principal dans les démonstrations. Ceci justifie l'introduction d'un nouveau concept.

Définition 11.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *holomorphiquement simplement connexe* si, pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Ceci nous conduit en définitive à énoncer le

Théorème 11.2. *Dans un ouvert holomorphiquement simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, primitives, logarithmes, et racines existent :*

(a) $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)$, $\exists\, F \in \mathscr{O}(\Omega)$ *telle que* $F' = f$ *;*

(b) $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *ne s'annulant jamais,* $\exists\, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ *telle que* $f = e^g$ *;*

(c) $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *ne s'annulant jamais,* $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\exists\, h \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *telle que* $f = h^\alpha$.

Démonstration. Ainsi, les arguments nécessaires à l'obtention de **(a)** et de **(b)** ont déjà été exprimés. Quant à **(c)**, il est clair, grâce à **(b)** qui donne $f = e^g$, que la fonction suivante convient :

$$h := e^{\frac{1}{\alpha} g}, \qquad \text{car alors} \qquad h^\alpha = e^{\frac{\alpha}{\alpha} g} = f. \qquad \square$$

En fait, nous verrons dans un chapitre prochain que ce concept n'a rien de nouveau.

Théorème 11.3. *Pour un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, on a équivalence entre :*

(i) Ω *est simplement connexe ;*

(ii) Ω *est holomorphiquement simplement connexe.* $\triangle$

Le cas $\Omega = \mathbb{C}$ étant trivial, on peut supposer que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Bien que l'implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** découle instantanément du Théorème 9.5 de la monodromie, la réciproque **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**, plus profonde, ne pourra être établie que dans un chapitre ultérieur, qui sera consacré au célèbre

Théorème 11.4. [de Riemann conforme] *Tout ouvert $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$,* i.e. *avec $\mathbb{C}\backslash\Omega \neq \emptyset$, qui est connexe et holomorphiquement simplement connexe, est* holomorphiquement équivalent *au disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, au sens où il existe une fonction holomorphe*

$F \in \mathscr{O}(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{D}$ qui établit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme :

$$F: \qquad \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D},$$

dont le difféomorphisme inverse :

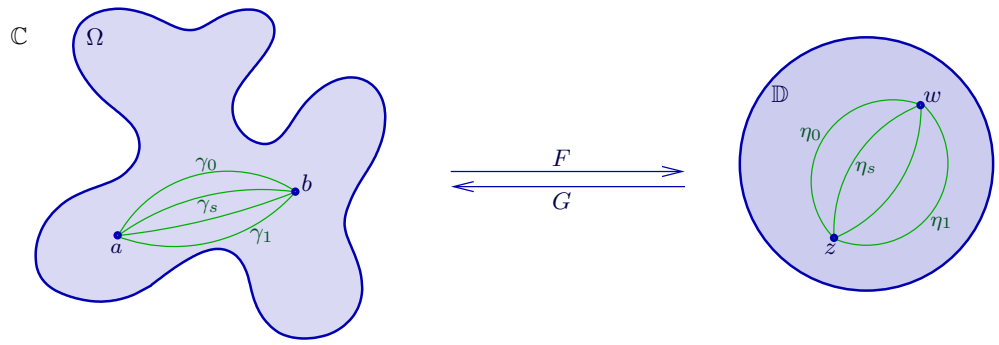
$$\Omega \xleftarrow{\sim} \mathbb{D} \qquad : G,$$

est aussi une fonction holomorphe (dans $\mathbb{D}$). Δ

En admettant temporairement ce résultat, l'implication **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** devient élémentaire. Supposons en effet que Ω et $\mathbb{D}$ soient $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphes :

$$\Omega \underset{G}{\overset{F}{\longleftrightarrow}} \mathbb{D}.$$

Puisque le disque unité $\mathbb{D}$ est convexe, il est simplement connexe. Cette qualité se transmet alors à Ω par contagion, *via* le difféomorphisme (inverse) G.



Pour être précis, soient deux points quelconques $a, b \in \Omega$, et soient deux courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ quelconques γ_0 et γ_1, allant de a à b, définies pour $t \in [0,1]$. Comme F est $\mathscr{C}^\infty$, les deux courbes composées contenues dans $\mathbb{D}$:

$$\eta_0(t) := F\big(\gamma_0(t)\big) \qquad \text{et} \qquad \eta_1(t) := F\big(\gamma_1(t)\big)$$

sont aussi $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$. Comme $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il existe une famille $\big\{\eta_s(t)\big\}_{s\in[0,1]}$ de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans $\mathbb{D}$ allant de $z := F(a)$ vers $F(b) =: w$, qui est paramétrée continûment par $s \in [0,1]$. Alors la famille de courbes ramenées dans Ω par le difféomorphisme inverse :

$$\gamma_s(t) := G\big(\eta_s(t)\big),$$

est $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ par rapport à $t \in [0,1]$, puisque G est $\mathscr{C}^\infty$, est continue par rapport $(s,t) \in [0,1]^2$, et interpole γ_0 et γ_1. Δ

Le Théorème de Riemann conforme ouvrira une perspective conceptuelle absolument nouvelle, qui nous fera contempler les fonctions holomorphes comme des êtres purement géométriques, vivants, mobiles, fluides.

Holbein connaît Erasme ; il l'a si bien connu et si bien étudié qu'il le crée de nouveau et qu'il l'évoque, visible, immortel, superlatif.
Charles Baudelaire, Curiosités esthétiques, Salon de 1859

12. Exercices

Exercice 1. Montrer que l'intégrale de la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ sur le bord orienté du carré $\big\{|x| \leqslant 1,\, |y| \leqslant 1\big\}$ ne vaut pas 0. Indication: Trouver puis simplifier :

$$\int_{b\Gamma} \frac{1}{z}\, dz \,=\, \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-i} + \int_{-1}^{1} \frac{i\, dy}{1+i\, y} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+i} - \int_{-1}^{1} \frac{i\, dy}{-1+i\, y},$$

et utiliser la valeur $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.

Exercice 2. Pour deux rayons $0 \leqslant \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \leqslant \infty$, soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}\big)$ dans l'anneau $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\big\}$.

(a) Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes :

$$f_- \,\in\, \mathscr{O}\big(\{|z| > \mathrm{R}_1\}\big) \qquad \text{et} \qquad f_+ \,\in\, \mathscr{O}\big(\{|z| < \mathrm{R}_2\}\big)$$

telles que $f = f_- + f_+$.

(b) Montrer qu'une telle décomposition est unique en requérant $f_-(z) \longrightarrow 0$ lorsque $|z| \longrightarrow \infty$.

(c) Montrer que l'application qui à $f \in \mathscr{O}\big(A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}\big)$ associe sa série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ normalement convergente sur les compacts de $A_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$ est bijective.

Exercice 3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $r > 0$, et soit le disque épointé $\mathbb{D}_r^*(z_0)$. On note $\mathscr{M}_{z_0}$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}_r^*(z_0)$ qui sont méromorphes en z_0.

(a) Pour $f \in \mathscr{M}_{z_0}$ non identiquement nulle, montrer que :

$$\nu_{\frac{1}{f}}(z_0) \,=\, -\,\nu_f(z_0).$$

(b) Pour $f_1, f_2 \in \mathscr{M}_{z_0}$, montrer que :

$$\nu_{f_1 f_2}(z_0) \,=\, \nu_{f_1}(z_0) + \nu_{f_2}(z_0).$$

(c) Pour $f_1, f_2 \in \mathscr{M}_{z_0}$, montrer que :

$$\nu_{f_1+f_2}(z_0) \,\geqslant\, \min\big(\nu_{f_1}(z_0),\, \nu_{f_2}(z_0)\big).$$

(d) Montrer que $\mathscr{M}_{z_0}$ est un corps.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f(z) := e^{1/z}$ holomorphe dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ qui a une singularité isolée essentielle en $z = 0$ satisfait le Théorème de Casorati-Weierstrass 7.10, et même mieux :

$$\forall\, s \,>\, 0 \quad f\big(\mathbb{D}_s^*\big) \,=\, \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Indication: En cherchant à résoudre $e^{1/z} = w \in \mathbb{C}^*$, montrer que :

$$\big\{\tfrac{x}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}\colon\, x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 < s^2\big\} \,=\, \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $\mathrm{R} > 0$, et soit le disque épointé $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}^*(z_0)$. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}^*(z_0)\big)$ avec $f \not\equiv 0$ et pour tout rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$, on introduit :

$$M_f(r) \,:=\, \max_{z \in C_r(z_0)} \big|f(z)\big|.$$

(a) Quand $-\infty < \nu_f(z_0)$, montrer que :

$$\nu_f(z_0) \,=\, \lim_{\substack{r \to 0 \\ >}} \frac{\log M_f(r)}{\log r}.$$

(b) Généralement, quelle que soit la valeur de $\nu_f(z_0) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\nu_f(z_0) \,=\, \liminf_{\substack{r \to 0 \\ >}} \frac{\log M_f(r)}{\log r}.$$

Exercice 6. Si un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient un cercle de rayon $r > 0$:

$$C_r(z_0) \,=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, |z - z_0| = r\big\},$$

centré en l'un de ses points $z_0 \in \Omega$, montrer qu'alors $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ contient aussi tout le disque intérieur.

Exercice 7. Soit $f \in \mathscr{O}\big(\Omega \backslash \{z_*\}\big)$ une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \big\{|z| \leqslant 1\big\}$ qui contient le disque unité fermé, excepté en un point du bord $z_* \in \partial\mathbb{D}$, où elle possède un pôle. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ désigne son développement en série entière à l'origine — lequel converge dans $\mathbb{D}$ —, montrer que :

$$z_* \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Exercice 8. EE

Exercice 9. EE

Théorème des résidus et applications

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Raison d'être des résidus

Soit $f \in \mathscr{M}\big(\omega\backslash\{w\}\big)$ une fonction méromorphe dans un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$ qui a un pôle unique en un point $w \in \omega$, d'ordre $\nu \geqslant 1$ quelconque. Dans un disque $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w)$ de rayon $\mathrm{R} > 0$ assez petit, son développement de Laurent s'écrit :

$$f(z) \;=\; \frac{a_{-\nu}}{(z-w)^{\nu}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-w)^{2}} + \frac{a_{-1}}{(z-w)^{1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z-w\big)^n,$$

la convergence étant normale sur les compacts de $\mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(w)$.

Fait absolument remarquable : Toutes les intégrales sur les cercles $C_r(w) \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w)$ de rayon $0 < r < \mathrm{R}$, s'annulent sauf une !

Pour voir cela, écrivons :

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \big(z-w\big)^n \qquad (z \in \mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(w)),$$

et intégrons sur $z = w + r\,e^{i\theta}$ avec $dz = r\,i\,e^{i\theta}\,d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int_{C_r(w)} f(z)\,dz \;&=\; \int_{C_r(w)} \Bigg(\sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \big(z-w\big)^n \Bigg)\,dz \\
&=\; \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \int_{C_r(w)} \big(z-w\big)^n\,dz \\
&=\; \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} r^n\,e^{in\theta}\,i\,r\,e^{i\theta}\,d\theta \\
[\textstyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\,d\theta = 0 \text{ si } m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}] \qquad &=\; a_{-1}\,2\pi\,i.
\end{aligned}$$

Bien entendu, ce calcul — surprenant ! — est vrai non seulement pour les fonctions méromorphes en w, mais aussi pour les fonctions holomorphes quelconques $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{w\}\big)$, puisqu'elles admettent un développement en série de Laurent centré au point w.

Observation 2.1. [Fondamentale !] *Dans un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction holomorphe :*

$$f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{w\}\big)$$

a une singularité isolée $w \in \omega$, alors pour tout rayon $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w) \subset \omega$, on a pour tout rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} f(z)\, dz \,=\, a_{-1},$$

où a_{-1} est le coefficient pour $n = -1$ du développement en série de Laurent :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \big(z - w\big)^n.$$

Démonstration. Donnons une deuxième explication de ce phénomène. Sachant que la paramétrisation $z = w + r\, e^{i\theta}$ donne pour le terme $n = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{a_{-1}}{z - w}\, dz \,&=\, \frac{1}{2i\pi}\, a_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{i\, r\, e^{i\theta}}{r\, e^{i\theta}}\, d\theta \\ &=\, a_{-1}, \end{aligned}$$

soustrayons-le :

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{a_{-1}}{z - w} \,&=\, \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n \big(z - w\big)^n \\ &=:\, g(z), \end{aligned}$$

et observons que cette nouvelle fonction $g \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{w\}\big)$ possède la primitive 'évidente' dans $\mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(w)$:

$$G(z) \,:=\, \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n \frac{1}{n+1} \big(z - w\big)^{n+1},$$

avec $G'(z) \,=\, g(z)$. Enfin, souvenons-nous qu'en présence d'une primitive, pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(w)$ — par exemple $\gamma := C_r(w)$ —, on a :

$$0 \,=\, \int_\gamma G(z)\, dz. \qquad \square$$

Ainsi, on ne conserve que le coefficient de Laurent a_{-1}, tous les autres $\big\{a_n\big\}_{n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}}$ disparaissent.

Le terme « *résidu* » désigne un reste, ce qui subsiste, un reliquat après une opération (al)chimique. On parle de *résidu* de cannes à sucre après extraction de leur jus (bagasse), ou de *résidus* d'une calcination.

Définition 2.2. Le *résidu* en une singularité isolée $w \in \omega$ d'une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{w\}\big)$ ayant pour développement de Laurent :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \big(z - w\big)^n,$$

dans un disque épointé $\mathbb{D}^*_{\mathrm{R}}(w) \subset \omega$ est le coefficient pour $n = -1$, noté :

$$\mathsf{Res}_f(w) \,:=\, a_{-1}.$$

Parce que c'est l'objet principal, il faut savoir le déterminer dans la pratique.

3. Calculs pratiques de résidus : recettes diverses

Tout d'abord, quand $f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{w\}\big)$ a une singularité illusoire en $z = w$:

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\big(z-w\big)^n \qquad\qquad {\scriptstyle (z \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w))},$$

il est clair que :

$$\mathsf{Res}_f(w) \,=\, 0,$$

mais la réciproque est fausse, comme le montre, avec $a_{-1} = 0$, la fonction :

$$\frac{a_{-2}}{(z-w)^2} + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\big(z-w\big)^n \qquad\qquad {\scriptstyle (a_{-2} \neq 0)}.$$

Proposition 3.1. *Quand $f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{w\}\big)$ est méromorphe en $w \in \omega$ avec un pôle simple,* i.e. *d'ordre $\nu = 1$, en w, on a :*

$$\mathsf{Res}_f(w) \,=\, \lim_{z \to w} (z-w)\, f(z).$$

Démonstration. En effet, multiplions :

$$f(z) \,=\, \frac{a_{-1}}{z-w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\big(z-w\big)^n$$

par $(z-w)$:

$$(z-w)\, f(z) \,=\, a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\big(z-w\big)^{n+1}.$$

La série à droite est convergente dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w)$, et elle admet 0 comme limite lorsque $z \longrightarrow w$. □

Proposition 3.2. *Quand $f \in \mathscr{O}\big(\omega \backslash \{w\}\big)$ est méromorphe en $w \in \omega$ avec un pôle d'ordre $\nu \geqslant 1$ quelconque en w, on a :*

$$\mathsf{Res}_f(w) \,=\, \lim_{z \to w} \frac{1}{(\nu-1)!} \Big(\frac{d}{dz}\Big)^{\nu-1} \Big[\big(z-w\big)^{\nu} f(z)\Big].$$

Observons que la multiplication par $(z-w)^{\nu}$ 'tue' le pôle d'ordre ν de f en w et produit ainsi une fonction holomorphe au voisinage de w, que l'on peut dériver indéfiniment.

Observons aussi que pour $\nu = 1$, on retrouve la formule précédente.

Démonstration. Effectivement, en partant de :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \,\big(z-w\big)^n,$$

multiplions :

$$\big(z-w\big)^{\nu} f(z) \,=\, a_{-\nu} + a_{-\nu+1}\,(z-w) + \cdots + a_{-1}\,\big(z-w\big)^{\nu-1} + \sum_{n=\nu}^{\infty} a_{n-\nu}\,\big(z-w\big)^n,$$

dérivons $(\nu-1)$ fois :

$$\begin{aligned}\Big(\big(z-w\big)^{\nu} f(z)\Big)^{(\nu-1)} &= 0+\cdots+0+(\nu-1)\,!\,a_{-1}+\sum_{n=\nu}^{\infty} n\cdots(n-\nu+2)\,a_{n-\nu}\,\big(z-w\big)^{n-\nu+1}\\ &= (\nu-1)!\,a_{-1}+\mathrm{O}\big(z-w\big),\end{aligned}$$

et prenons la limite quand $z\longrightarrow w$. □

Rappelons que la *valuation* $-\infty<\nu_f(w)\leqslant\infty$ d'une fonction $f\in\mathscr{O}\big(\omega\backslash\{w\}\big)$ méromorphe non nulle en un point $w\in\omega$ est l'entier unique dans la factorisation naturelle :

$$f(z)\,=\,\big(z-w\big)^{\nu_f(w)}\,g(z),$$

avec g holomorphe au voisinage de w satisfaisant $g(w)\neq 0$.

Proposition 3.3. *Dans un ouvert connexe $\Omega\subset\mathbb{C}$, soit une fonction méromorphe globale $f\in\mathscr{M}(\Omega)$ non identiquement nulle. Alors le quotient :*

$$\frac{f'}{f}\,\in\,\mathscr{M}(\Omega)$$

est aussi méromorphe dans Ω, avec des pôles simples (d'ordre 1) qui sont situés exactement aux zéros et aux pôles de f, et ce quotient $\frac{f'}{f}$ y a pour résidus :

$$\mathsf{Res}_{\frac{f'}{f}}(w)\,=\,\nu_f(w)\qquad\qquad (\forall\, w\in\Omega).$$

Cette formule est en effet vérifiée *aussi* aux points $w\in\Omega$ où f est holomorphe avec $f(w)\neq 0$, puisque $\frac{f'}{f}$ y est holomorphe, d'où :

$$\mathsf{Res}_{\frac{f'}{f}}(w)\,=\,0\,=\,\nu_f(w)\qquad\qquad (w\text{ ni zéro ni pôle}).$$

De plus, observons que l'hypothèse $f\not\equiv 0$ dans Ω connexe garantit, grâce au principe d'identité, que l'on a en *tout* point $w\in\Omega$:

$$-\infty\,<\,\nu_f(w)\,<\,\infty.$$

Démonstration. En effet, une factorisation locale avec $\nu=\nu_f(w)$:

$$f(z)\,=\,\big(z-w\big)^{\nu}\,g(z),$$

où la fonction $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,(z-w)^n$ est holomorphe près de w et satisfait $b_0=g(w)\neq 0$, que l'on dérive :

$$\begin{aligned}f'(z)\,&=\,\nu\,\big(z-w\big)^{\nu-1}\,g(z)+\big(z-w\big)^{\nu}\,g'(z)\\ &=\,\big(z-w\big)^{\nu-1}\,\big[\nu\,g(z)+(z-w)\,g'(z)\big],\end{aligned}$$

permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f}(z)\,&=\,\frac{(z-w)^{\nu-1}\,\big[\nu\,g(z)+(z-w)\,g'(z)\big]}{(z-w)^{\nu}\,\big[g(z)\big]}\\ &=\,\frac{\nu}{z-w}+\frac{g'(z)}{g(z)},\end{aligned}$$

la fonction-reste $\frac{g'(z)}{g(z)}$ étant holomorphe au voisinage de w, puisque $g(w)\neq 0$.

Clairement, dès que $\nu\neq 0$, ce quotient $\frac{f'}{f}$ possède un pôle simple en $z=w$ de résidu égal à ν, le coefficient de $\big(z-w\big)^{-1}$ ci-dessus. □

4. Théorème des résidus pour les contours de Jordan

Le théorème des résidus est le point culminant de toute la théorie des fonctions holomorphes, le sommet d'où la vue sur la Mer est la plus belle. Il « capture » les singularités isolées de fonctions holomorphes (méromorphes), créatures marines phosphorescentes.

En voici la première version prototypique.

Théorème 4.1. *Soit C un cercle de rayon > 0 bordant un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, et soit $\Omega \supset C \cup \Delta$ un ouvert. Si une fonction holomorphe :*

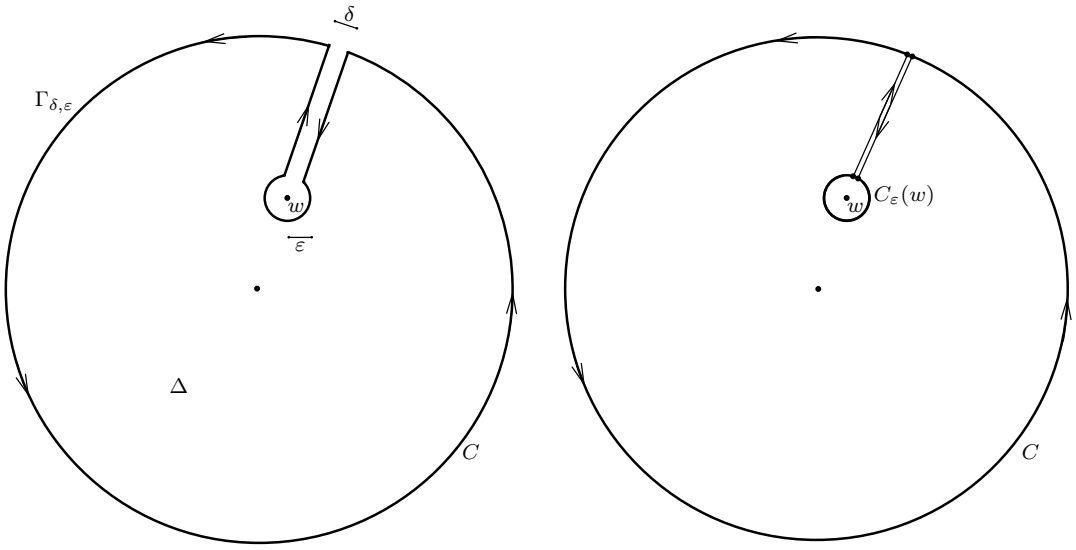
$$f \in \mathscr{O}\big(\Omega \backslash \{w\}\big)$$

a une unique singularité isolée $w \in \Delta$, alors :

$$\int_C f(z)\, dz = 2i\pi\, \mathsf{Res}_f(w).$$

En fait, lorsque w est illusoire, f est holomorphe près de w, donc $\mathsf{Res}_f(w) = 0$, ce qui redonne le théorème de Cauchy basique.

Démonstration. Pour $0 < \delta < \varepsilon$, introduisons un contour « trou de serrure » $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ comme dans la démonstration de la formule de représentation intégrale de Cauchy.



Grâce à cet évitement de w, la fonction f est holomorphe dans un voisinage ouvert :

$$\omega \supset \Gamma_{\delta,\varepsilon} \cup \big(\Gamma_{\delta,\varepsilon}\big)_{\mathsf{int}},$$

donc elle satisfait l'annulation de Cauchy :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z)\, dz \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \int_C f(z)\, dz - \int_{c_\varepsilon(w)} f(z)\, dz \\ = \int_C f(z)\, dz - 2i\pi\, \mathsf{Res}_f(w), \end{aligned}$$

en nous souvenant que le résidu, le coefficient a_{-1} dans le développement de Laurent de f en w, se capture par intégration le long de cercles centrés en w de rayons non nuls quelconques assez petits. $\square$

Pourquoi, alors, la formule de représentation de Cauchy :

$$f(w) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad (f \in \mathscr{O}(\Omega \supset C \cup \Delta))$$

est-elle vraie ? Ici, la fonction :

$$g\colon \quad z \longmapsto \frac{f(z)}{z-w}$$

n'est *pas* holomorphe dans un voisinage ouvert de $C \cup \Delta$, puisqu'elle a une singularité isolée en $z = w \in \Delta$, donc on n'a pas en général :

$$0 \overset{\text{faux}}{=} \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz.$$

Toutefois, le résidu en le pôle simple (d'ordre $\nu = 1$) de cette fonction méromorphe vaut, d'après la Proposition 3.1 :

$$\begin{aligned}\mathsf{Res}_g(w) \;&=\; \lim_{z\to w}(z-w)\,\frac{f(z)}{z-w}\\ &=\; f(w),\end{aligned}$$

et donc le Théorème 4.1 donne :

$$\int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz \;=\; 2i\pi\, f(w),$$

ce qui coïncide — cohérence agréable ! — avec la formule de Cauchy !

En présence de plusieurs singularités isolées, voici l'énoncé général.

Théorème 4.2. *Soit un ouvert $\Omega \supset C \cup \Delta$ contenant un cercle et son intérieur Δ. Si une fonction holomorphe :*

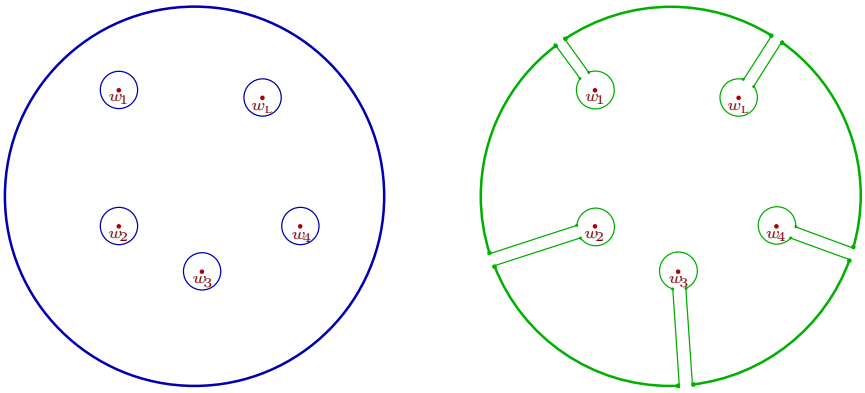
$$f \;\in\; \mathscr{O}\big(\Omega \backslash \{w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}}\}\big)$$

a un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ de singularités isolées $w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}} \in \Delta$, alors :

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 2i\pi\,\big(\mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}})\big).$$

Démonstration. Esquissons des arguments qui généralisent ce qui précède, sans exposer *tous* les détails géométriques.

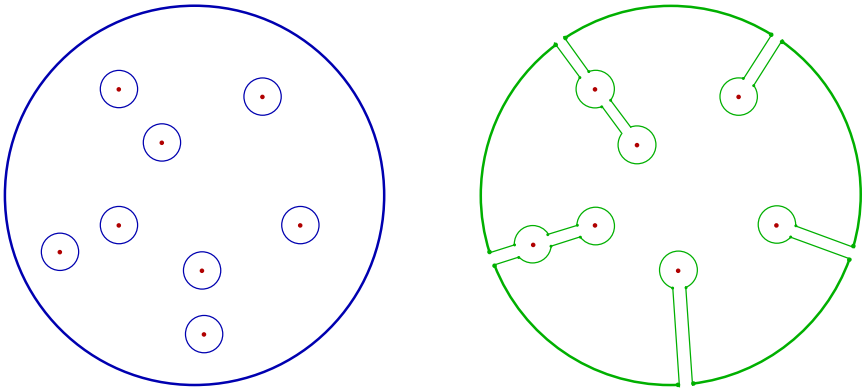
L'idée est de créer des trous de serrure multiples qui entourent les singularités $w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}}$, et de faire tendre à nouveau la largeur des tunnels d'accès vers 0.



Soit donc $0 < \delta < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les L disques :

$$\mathbb{D}_\varepsilon(w_1), \ \ldots\ldots, \ \mathbb{D}_\varepsilon(w_{\mathrm{L}})$$

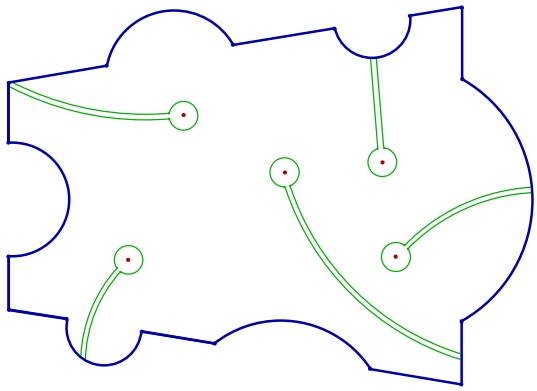
soient mutuellement disjoints. Perçons des tunnels droits de largeur $\delta > 0$ issus orthogonalement du cercle-bord C jusqu'aux singularités w_ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}$, et contournons ces singularités, le long des cercles $C_\varepsilon(w_\ell)$, orientés négativement. Quand plusieurs singularités sont situées sur un même rayon, on enfile les perles.



À nouveau, faisons $\delta \longrightarrow 0$ en partant de l'annulation de Cauchy appliquée au contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$, dont l'intérieur de Jordan $\big(\Gamma_{\delta,\varepsilon}\big)_{\mathsf{int}}$ ne contient aucune singularité, et souvenons-nous des résidus :

$$\begin{aligned} 0 \ = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z)\,dz \ &\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \ \int_C f(z)\,dz - \int_{C_\varepsilon(w_1)} f(z)\,dz - \cdots - \int_{C_\varepsilon(w_{\mathrm{L}})} f(z)\,dz \\ &= \int_C f(z)\,dz - 2i\pi\,\mathsf{Res}_f(w_1) - \cdots - 2i\pi\,\mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}}). \qquad \square \end{aligned}$$

Le cas général d'un contour de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — une courbe (continue) $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée simple — quelconque, avec intérieur Γ_{int}, est plus délicat : construire des tunnels ne s'intersectant pas demande un certain travail géométrique que nous nous dispenserons de présenter au lecteur.



Théorème 4.3. [des résidus le plus utile] *Soit un ouvert* $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ *contenant un contour de Jordan et son intérieur. Si une fonction holomorphe :*

$$f \in \mathscr{O}\big(\Omega \big\backslash \{w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}}\}\big)$$

a un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ *de singularités isolées* $w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}} \in \Gamma_{\mathsf{int}}$*, alors :*

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz \;=\; 2i\pi \big(\mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}})\big).$$

Démonstration. Dans tous les exemples explicites que nous traiterons plus tard, la forme concrète visible de Γ permettra de deviner aisément comment placer les tunnels sans qu'ils s'intersectent. Dans le cas où Γ est quelconque, si nous admettons que cela soit possible, la démonstration est quasiment identique à celle pour $\Gamma = C$:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z)\, dz \;\underset{\delta \to 0}{\longrightarrow}\; & \int_{\Gamma} f(z)\, dz - \int_{C_\varepsilon(w_1)} f(z)\, dz - \cdots - \int_{C_\varepsilon(w_{\mathrm{L}})} f(z)\, dz \\ = \; & \int_{\Gamma} f(z)\, dz - 2i\pi\, \mathsf{Res}_f(w_1) - \cdots - 2i\pi\, \mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}}). \end{aligned}$$

□

5. Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus

Le calcul des résidus s'avère être un outil très puissant pour déterminer les valeurs d'un grand nombre d'intégrales, notamment les intégrales de Riemann impropres de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

L'idée principale, et protéiforme, est d'étendre $f = f(z)$ au domaine complexe $z \in \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, puis de sélectionner une famille appropriée de contours de Jordan γ_{R} paramétrés par $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$ de manière à ce que :

$$\lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{\gamma_{\mathrm{R}}} f(z)\, dz \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Et grâce à un simple calcul ponctuel des résidus de f en ses singularités isolées dans l'intérieur du contour γ_{R}, le Théorème 4.3 donne la valeur de $\int_{\gamma_{\mathrm{R}}} f(z)\, dz$, souvent égale à une constante intéressante suivie d'une quantité qui tend vers 0 lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Seule l'intuition géométrique permet de deviner quels contours γ_{R} choisir afin de récupérer ainsi la valeur désirée de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$. Ce sont les propriétés de décroissance de f à l'infini qui doivent servir de guide.

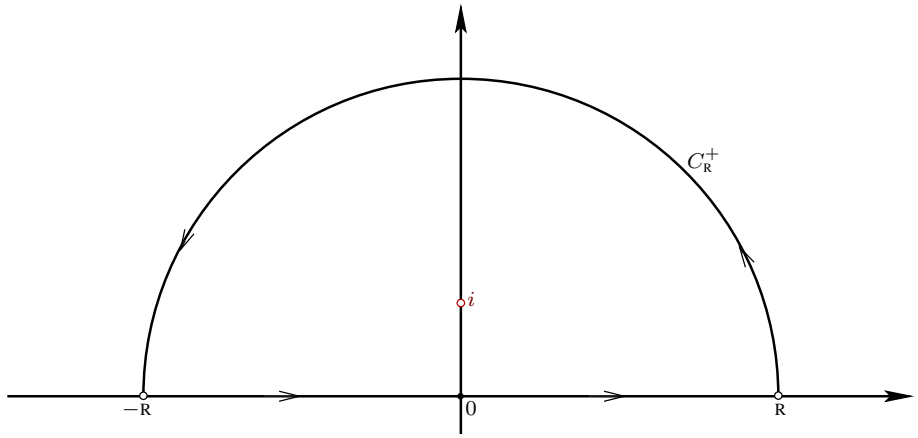
Exemple 5.1. Sans utiliser $\big(\mathsf{arctan}\, x\big)' = \frac{1}{1+x^2}$, mais en appliquant le théorème des résidus, démontrons que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \pi.$$

À cette fin, introduisons la fonction :

$$f(z) \;:=\; \frac{1}{1+z^2} \;=\; \frac{1}{(z-i)\,(z+i)},$$

qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \big\backslash \{-i, i\}$, avec deux pôles simples en $-i$ et en i.



Intégrons-la sur le contour consistant en le segment réel $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle C_{R}^{+} de rayon $\mathrm{R} > 1$ situé au-dessus de l'axe réel. Seule la singularité $z = i$ se trouve à l'intérieur de ce contour.

Comme le résidu de f en $z = i$ vaut :

$$\lim_{z \to i} (z - i)\, f(z) \;=\; \frac{1}{i + i} \;=\; \frac{1}{2\, i},$$

le Théorème 4.3 donne :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{1}{1 + x^2}\, dx + \int_{C_{\mathrm{R}}^{+}} \frac{dz}{1 + z^2} \;=\; 2i\pi \left(\frac{1}{2\, i}\right).$$

Mais en utilisant, pour $z \in C_{\mathrm{R}}^{+}$ quelconque :

$$\left|z^2 + 1\right| \;\geqslant\; |z|^2 - 1 \;=\; \mathrm{R}^2 - 1,$$

nous pouvons majorer la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_{\mathrm{R}}^{+}} \frac{dz}{1 + z^2} \right| &\leqslant \int_{C_{\mathrm{R}}^{+}} \frac{1}{|z^2 + 1|}\, |dz| \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{R}^2 - 1} \int_0^{\pi} \mathrm{R}\, d\theta \\
&= \frac{\pi\, \mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - 1} \;\underset{\mathrm{R} \to \infty}{\longrightarrow}\; 0,
\end{aligned}$$

par une quantité disparaissante, d'où la conclusion :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} + 0 \;=\; \pi. \qquad \square$$

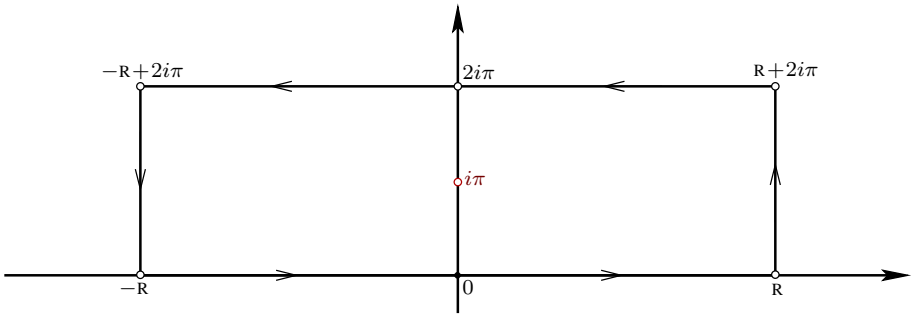
Exemple 5.2. Il s'agit d'une intégrale qui jouera un rôle important ultérieurement, avec $0 < a < 1$ réel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx \;\overset{?}{=}\; \frac{\pi}{\sin \pi\, a}.$$

Pour établir cette formule, introduisons :

$$f(z) \;:=\; \frac{e^{az}}{1 + e^z},$$

et prenons comme contour un rectangle situé au-dessus de l'axe réel et de sommets $-\mathrm{R}$, R, $\mathrm{R} + 2i\pi$, $-\mathrm{R} + 2i\pi$.



Le seul point à l'intérieur de ce rectangle en lequel le dénominateur $1+e^z$ de $f(z)$ s'annule est $z = i\,\pi$. Pour calculer le résidu de f en ce point $i\,\pi$, écrivons :

$$\big(z - i\,\pi\big)\, f(z) \;=\; e^{az}\,\frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}},$$

et reconnaissons un quotient différentiel *inversé* de $e^z = \big(e^z\big)'$ en $z = i\pi$:

$$\lim_{z\to i\pi} e^{az}\,\frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi} \;=\; e^{ai\pi}\,e^{i\pi},$$

d'où :

$$\mathsf{Res}_f(i\pi) \;=\; -\,e^{ai\pi}.$$

Ainsi, le théorème des résidus offre :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\,dx + \int_0^{2\pi} f\big(\mathrm{R}+i\,y\big)\,i\,dy - \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f\big(x+2i\pi\big)\,dx - \int_0^{2\pi} f\big(-\mathrm{R}+i\,y\big)\,i\,dy \;=\; 2i\pi\,\big(-\,e^{ai\pi}\big).$$

Nous affirmons maintenant que les deux intégrales numéros 2 et 4 tendent vers 0 quand $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$. En effet, pour l'intégrale 2, dès que $\mathrm{R} > 1$, majorons :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f\big(\mathrm{R}+i\,y\big)\,i\,dy\right| &\leqslant \int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{a(\mathrm{R}+iy)}}{e^{\mathrm{R}+iy}+1}\right| dy\\ &\leqslant \frac{e^{a\mathrm{R}}}{e^{\mathrm{R}}-1}\int_0^{2\pi} dy\\ &\sim\; 2\pi\,e^{-(1-a)\mathrm{R}} \;\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\; 0,\end{aligned}$$

puisque $0 < a < 1$. L'intégrale 4 se pulvérise de la même manière.

Enfin, par un « miracle » bien calculé à l'avance, l'intégrale 3 se ré-exprime comme un multiple de l'intégrale qui nous intéresse :

$$-\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}\,dx \;=\; -\,e^{2ai\pi}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,$$

et en faisant $\mathrm{R}\to\infty$ dans le club des quatre :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx + 0 - e^{2ai\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - 0 \;=\; -\,2i\pi\,e^{ai\pi},$$

nous concluons que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx &= -2i\pi\,\frac{e^{ai\pi}}{1-e^{2ai\pi}}\\ &= \frac{2i\pi}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}\\ &= \frac{\pi}{\sin a\pi}.\end{aligned}$$

□

Exemple 5.3. Le cours d'*Analyse de Fourier* utilise de manière intensive le fait (connu) que la fonction $e^{-\pi x^2}$ coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2i\pi\xi x}\,dx.$$

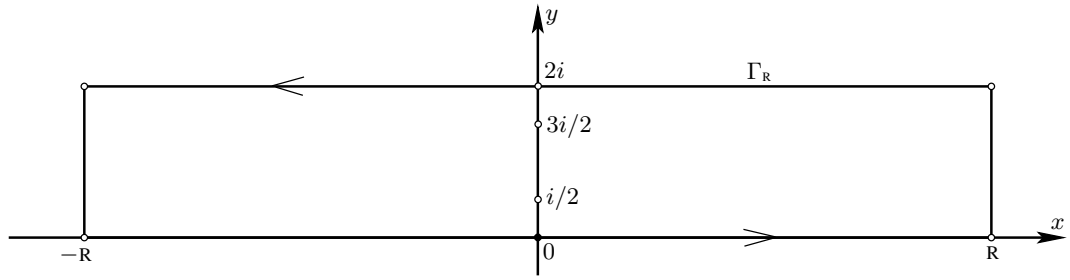
Une démonstration de cette formule basée sur l'Analyse Complexe a déjà été donnée dans le chapitre consacré à la théorie de Cauchy.

Or cette fonction $e^{-\pi x^2}$ n'est *pas* la seule qui soit un « point fixe » pour la transformation de Fourier. En effet, nous affirmons qu'avec :

$$\cosh w := \frac{e^w+e^{-w}}{2},$$

la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\cosh \pi x}$ est aussi sa propre transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh \pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}\,dx = \frac{1}{\cosh \pi\xi}.$$



Pour établir cette formule, avec $\mathrm{R} > 0$ qui tendra vers l'infini, soit Γ_{R} le contour rectangulaire allongé, posé sur l'axe réel, de hauteur constante égale à 2, et dont les quatre sommets sont $-\mathrm{R}$, R, $\mathrm{R}+2i$, $-\mathrm{R}+2i$.

Avec un réel $\xi \in \mathbb{R}$ quelconque fixé, introduisons :

$$f(z) := \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{\cosh \pi z}.$$

Le dénominateur s'annule précisément lorsque $e^{\pi z} = -e^{-\pi z}$, c'est-à-dire quand $e^{2\pi z} = -1$. Autrement dit, $2\pi z = i\pi + 2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ quelconque, d'où $z = \frac{i}{2} + i\,k$. Donc f possède exactement deux pôles dans l'intérieur $\Gamma_{\mathrm{R},\mathrm{int}}$ du contour :

$$\alpha := \tfrac{i}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta := \tfrac{3i}{2}.$$

En faisant astucieusement apparaître l'*inverse* du quotient différentiel de la fonction $z \longmapsto e^{2\pi z}$ — dont la dérivée vaut $2\pi\, e^{2\pi z}$ — au point $z = \alpha$, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}_f(\alpha) \;=\; \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha)\, f(z) \;&=\; \lim_{z\to\alpha} e^{-2i\pi\xi z}\, \frac{(z-\alpha)\,2}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \\
&=\; \lim_{z\to\alpha} 2\, e^{-2i\pi\xi z}\, \frac{1}{e^{-\pi z}}\, \frac{z-\alpha}{e^{2\pi z}+1} \\
[\alpha = \tfrac{i}{2}] \qquad\qquad &=\; 2\, e^{-2i\pi\xi\alpha}\, \frac{1}{e^{-\pi\alpha}} \lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{e^{2\pi z}-e^{2\pi\alpha}} \\
&=\; 2\, e^{\pi\xi}\, \frac{1}{e^{-\pi\frac{i}{2}}}\, \frac{1}{2\pi\, e^{2\pi\frac{i}{2}}} \\
&=\; \frac{e^{\pi\xi}}{i\pi}.
\end{aligned}$$

En procédant de manière similaire, le lecteur trouvera :

$$\mathsf{Res}_f(\beta) \;=\; -\,\frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi}.$$

Maintenant, le Théorème 4.3 magique des résidus nous offre :

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{\cosh \pi z}\, dz \;=\; 2i\pi\big(\mathsf{Res}_f(\alpha) + \mathsf{Res}_f(\beta)\big),$$

c'est-à-dire, sachant que notre rectangle Γ_{R} orienté positivement possède quatre côtés :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x}\, dx + \int_0^2 \frac{e^{-2i\pi\xi(\mathrm{R}+iy)}}{\cosh \pi(\mathrm{R}+iy)}\, i\, dy - \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{-2i\pi\xi(x+2i)}}{\cosh \pi(x+2i)}\, dx - \int_0^2 \frac{e^{-2i\pi\xi(-\mathrm{R}+iy)}}{\cosh \pi(-\mathrm{R}+iy)}\, i\, dy \;=\; 2i\pi\left(\frac{e^{\pi\xi}}{i\pi} - \frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi}\right).$$

Or ensuite, nous affirmons que les intégrales numéros I_2 et I_4 tendent vers 0 quand $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$. En effet, pour ce qui est par exemple de l'intégrale I_2, sachant que pour $0 \leqslant y \leqslant 2$:

$$\left|e^{-2i\pi\xi(\mathrm{R}+iy)}\right| \;=\; \left|e^{-2i\pi\xi\mathrm{R}+2\pi\xi y}\right| \;\leqslant\; e^{\,4\pi|\xi|},$$

et grâce à la minoration :

$$\begin{aligned}
\big|\cosh \pi(\mathrm{R}+iy)\big| \;=\; \left|\frac{e^{\pi(\mathrm{R}+iy)} + e^{-\pi(\mathrm{R}+iy)}}{2}\right| \;&\geqslant\; \frac{1}{2}\left|\left|e^{\pi(\mathrm{R}+iy)}\right| - \left|e^{-\pi(\mathrm{R}+iy)}\right|\right| \\
&=\; \frac{1}{2}\left(e^{\pi\,\mathrm{R}} - e^{-\pi\,\mathrm{R}}\right),
\end{aligned}$$

nous voyons que :

$$\left|\int_0^2 \frac{e^{-2i\pi\xi(\mathrm{R}+iy)}}{\cosh \pi(\mathrm{R}+iy)}\, i\, dy\right| \;\leqslant\; \frac{e^{4\pi|\xi|}\,2}{e^{\pi\mathrm{R}} - e^{-\pi\mathrm{R}}} \int_0^2 1\, dy \;\xrightarrow{\mathrm{R}\to\infty}\; 0.$$

L'annihiliation de I_4 lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$ se traite d'une manière analogue.

Pour terminer, grâce au fait que :

$$\cosh \pi(x+2i) \;=\; \cosh \pi x,$$

nous constatons que *l'intégrale I_3 est multiple de l'intégrale I_1*, et alors en prenant $\lim\limits_{\mathrm{R}\to\infty}(\bullet)$ dans l'identité ci-dessus, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x}\, dx + 0 - e^{4\pi\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x}\, dx - 0 \;=\; 2\left(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}\right),$$

et donc enfin comme annoncé :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x}\, dx \;=\; \frac{(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi})\, 2}{1 - e^{4\pi\xi}} \;&=\; \frac{e^{2\pi\xi}\,(e^{-\pi\xi} - e^{\pi\xi})\, 2}{e^{2\pi\xi}\,(e^{-\pi\xi} - e^{\pi\xi})\,(e^{-\pi\xi} + e^{\pi\xi})} \\ &=\; \frac{2}{e^{-\pi\xi} + e^{\pi\xi}} \\ &=\; \frac{1}{\cosh \pi\xi}. \qquad \Delta\end{aligned}$$

Des arguments similaires permettent (exercice) d'établir, pour tout $0 < a < 1$ réel, la formule :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi a}{\cosh \pi x + \cos \pi a}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \;=\; \frac{2 \sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi},$$

où $\sinh z := (e^z - e^{-z})/2$. Le cas $a = \frac{1}{2}$ s'identifie à ce que nous venons de démontrer.

6. Indices de courbes par rapport à un point

Étant donné une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs dans le plan complexe, on identifie toujours son image $\gamma \equiv \gamma\big([0,1]\big)$ à sa paramétrisation.

Définition 6.1. L'*indice* d'un point quelconque $w \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ par rapport à une courbe $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma(0) = \gamma(1)$ est le nombre :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \;:=\; \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - w}.$$

Proposition 6.2. *Cet indice est toujours entier :*

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \;\in\; \mathbb{Z} \qquad (\forall\, w \notin \gamma).$$

Démonstration. Rédigeons les arguments en supposant la courbe $\mathscr{C}^1$, au lieu de $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$, afin d'alléger l'écriture. Introduisons pour $t \in [0,1]$, la fonction :

$$\Phi(t) \;:=\; \exp\bigg(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w}\, ds\bigg),$$

satisfaisant :

$$\Phi(0) \;=\; 1,$$

et qui a pour dérivée :

$$\Phi'(t) \;=\; \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \exp\bigg(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w}\, ds\bigg),$$

ce qui se récrit comme l'équation :

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \;=\; \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}.$$

De manière équivalente, la fonction $\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}$ a une dérivée identiquement nulle :

$$\Big(\frac{\Phi(t)}{\gamma(t) - w}\Big)' \;=\; \frac{\Phi'(t)\,\big[\gamma(t) - w\big] - \Phi(t)\,\gamma'(t)}{\big[\gamma(t) - w\big]^2} \;\equiv\; 0,$$

et par conséquent, elle est constante ! Ainsi, elle vaut sa valeur initiale :

$$\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w} \equiv \frac{\Phi(0)}{\gamma(0)-w} = \frac{1}{\gamma(0)-w},$$

ce qui permet miraculeusement de résoudre :

$$\Phi(t) = \frac{\gamma(t)-w}{\gamma(0)-w} \qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

Mais comme $\gamma(1) = \gamma(0)$, on a :

$$1 = \frac{\gamma(1)-w}{\gamma(0)-w} = \Phi(1) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\,dt\right),$$

ce qui signifie bien, puisque $e^{\varphi} = 1$ si et seulement si $\varphi \in 2i\pi\mathbb{Z}$, que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\,dt \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Ainsi, l'entier $\mathsf{Ind}_\gamma(w)$ est bien défini pour tout point $w \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ dans le complémentaire de la courbe γ. En fait, sa valeur ne peut changer que lorsque w « traverse » γ, d'après la prochaine

Proposition 6.3. *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\backslash\gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ w &\longmapsto \mathsf{Ind}_\gamma(w) \end{aligned}$$

est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\gamma$.

Preuve. En effet, l'application complète avant intégration :

$$\begin{aligned} \big(\mathbb{C}\backslash\gamma\big) \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (w,t) &\longmapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} \end{aligned}$$

est continue, donc le théorème des intégrales à paramètre(s) assure que l'application en question, envisagée comme étant à valeurs complexes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\backslash\gamma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\,dt = \mathsf{Ind}_\gamma(w) \end{aligned}$$

est *continue*. Mais comme elle est à valeurs dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ qui est *discret*, cette application doit être localement constante, donc constante dans chaque composante connexe (ouverte) de $\mathbb{C}\backslash\gamma$. $\square$

Comme $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, son image $\gamma\big([0,1]\big) \equiv \gamma$ est un compact de $\mathbb{C}$, que l'on peut inclure $\gamma \subset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ dans un disque de rayon $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand.

Proposition 6.4. *Le complémentaire* $\mathbb{C}\backslash K$ *d'un compact quelconque* $K \subset \mathbb{C}$ *possède une unique composante connexe non bornée.*

Naturellement, un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *non borné* s'il contient des points de modules arbitrairement grands.

Démonstration. De même, on inclut $K \subset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, quitte à augmenter $\mathrm{R} \gg 1$, et comme l'anneau $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ va à l'infini, pour toute composante connexe ω non bornée de $\mathbb{C}\backslash K$, on a :

$$\omega \cap \big(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}\big) \neq \emptyset.$$

Mais un résultat élémentaire de topologie dit que si ω est une composante connexe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et si $\varpi \subset \Omega$ est un ouvert connexe tel que $\varpi \cap \omega \neq \emptyset$, alors $\varpi \subset \omega$. Ici avec $\Omega := \mathbb{C}\backslash K$ et avec $\varpi := \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, nous obtenons donc :

$$\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}} \subset \omega.$$

Grâce à cela, l'unicité de ω provient alors d'un autre lemme élémentaire de topologie, disant que si deux composantes connexes ω_1, ω_2 d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contiennent $\omega_1 \supset \varpi$ et $\omega_2 \supset \varpi$ un ouvert non vide $\varpi \neq \emptyset$, alors $\omega_1 = \omega_2$. □

Proposition 6.5. *En tout point $w \in D_\infty$ de l'unique composante connexe non bornée D_∞ de $\mathbb{C}\backslash\gamma$, on a :*

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) = 0.$$

Preuve. Comme nous savons que ce nombre entier est constant, il suffit de faire $|w| \longrightarrow \infty$ dans :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\,dt \underset{|w|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$ □

Réinterprétons les théorèmes classiques de Cauchy pour un disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, dont le cercle-bord est paramétré par :

$$\gamma(t) = z_0 + r\,e^{i2\pi t} \qquad (t \in [0,1]).$$

Ici :

$$\begin{aligned}\mathsf{Ind}_\gamma(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\,dt \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{z-w}.\end{aligned}$$

Le premier théorème de Cauchy dit que pour tout $w \notin \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$, comme la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z-w}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{z-w} = 0 = \mathsf{Ind}_\gamma(w),$$

ce qui confirme la constante de l'indice !

Lorsque $w \in \mathbb{D}_r(z_0)$, Cauchy appliqué à la fonction holomorphe constante $z \longmapsto 1$ dit :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(w)} \frac{1}{z-w}\,dz = 1 = \mathsf{Ind}_\gamma(w).$$

Ainsi, dans le cas d'un cercle, nous ne faisons que tourner en rond dans cette théorie ! Heureusement, d'autres cieux nous attendent.

Théorème 6.6. *Étant donné une homotopie continue de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$:*

$$\big\{t \longmapsto \gamma_s(t)\big\}_{s\in[0,1]},$$

si elles évitent toutes un certain point $w \in \mathbb{C}$:

$$\gamma_s(t) \neq w \qquad (\forall\, s \in [0,1],\ \forall\, t \in [0,1]),$$

alors leurs indices demeurent constants :

$$\mathsf{Ind}_{\gamma_0}(w) \,=\, \mathsf{Ind}_{\gamma_s}(w) \,=\, \mathsf{Ind}_{\gamma_1}(w) \qquad (\forall\, s \in [0,1]).$$

Démonstration. Soit en effet l'intégrale à paramètre $s \in [0,1]$:

$$\mathsf{Ind}_{\gamma_s}(w) \,=\, \int_0^1 \frac{\gamma_s'(t)}{\gamma_s(t)-w}\,dt,$$

et soit le compact :

$$K \,:=\, \big\{\gamma_s(t) \in \mathbb{C}\colon\ s \in [0,1],\, t \in [0,1]\big\}.$$

Comme $w \notin K$, un exercice classique de topologie donne $\mathsf{dist}\,(w,K) > 0$, ce qui assure la continuité de l'application :

$$[0,1]^2 \,\ni\, (s,t) \,\longmapsto\, \frac{\gamma_s'(t)}{\gamma_s(t)-w} \,\in\, \mathbb{C},$$

donc le théorème des intégrales à paramètre offre la *continuité* de l'application :

$$[0,1] \,\ni\, s \,\longmapsto\, \int_0^1 \frac{\gamma_s'(t)}{\gamma_s(t)-w}\,dt \,\in\, \mathbb{C},$$

et enfin, la discrétion de $2i\pi\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ force cette application à être constante. □

7. Théorème des résidus homologique

Maintenant, considérons des courbes fermées quelconques $\gamma \subset \Omega$, pas forcément simples, et qui peuvent s'enrouler plusieurs fois autour d'un point $w \in \mathbb{C}$.

Par exemple, soit la courbe :

$$\gamma(t) \,:=\, e^{4i\pi t} \qquad (t \in [0,1]),$$

qui parcourt pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ une première fois le cercle unité $C = \{|\zeta| = 1\}$, puis une seconde fois pour $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$, et soit $f(z) := \frac{1}{z}$ que l'on intègre :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \,&=\, \int_0^1 \frac{1}{\underline{e^{4i\pi t}}_{\circ}}\,4i\pi\,\underline{e^{4i\pi t}}_{\circ}\,dt\\ &=\, 4i\pi\\ &=\, 2\,\big(2i\pi\big),\end{aligned}$$

résultat double de l'intégration sur le cercle unité C :

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz \,=\, 2i\pi.$$

Dans la Section **6** qui précède, si $\gamma(t) \neq w$ pour tout $t \in [0,1]$, nous avons déjà introduit :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

Pour le point $w := 0$, toujours avec $f(z) = \frac{1}{z}$, et avec la courbe :

$$\gamma(t) \,:=\, e^{k\,2i\pi t} \qquad (t \in [0,1]),$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est un entier, il est visible que la courbe tourne k fois autour de l'origine, ce qui est confirmé par le calcul suivant :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(0) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z} \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{k\,2i\pi\,\underline{e^{k\,2i\pi t}}_{\circ}}{\underline{e^{k\,2i\pi t}}_{\circ}}\,dt \,=\, k.$$

En fait, pour se convaincre encore mieux que $\mathsf{Ind}_\gamma(w)$ compte effectivement le nombre (orienté) de tours que la courbe γ effectue autour de w, rien ne vaut une bonne homotopie des familles paramétrée par $s \in [0,1]$:

$$\gamma_s(t) \,:=\, (1-s)\,\gamma(t) + s\,\Big(w + \frac{\gamma(t)-w}{|\gamma(t)-w|}\Big),$$

partant de $\gamma = \gamma_0$, et aboutissant à une courbe $\gamma_1(t)$ située sur le cercle de rayon 1 centré en w :

$$\big|\gamma_1(t) - w\big| \,=\, \Big|\frac{\gamma(t)-w}{|\gamma(t)-w|}\Big| \,=\, 1 \qquad\qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

Lemme 7.1. *On a $\gamma_s(t) \neq w$ pour tous $(s,t) \in [0,1]^2$.*

Preuve. En effet, soustrayons et factorisons :

$$\begin{aligned}\gamma_s(t) - w \,&=\, (1-s)\,\big(\gamma(t)-w\big) + s\,\frac{\gamma(t)-w}{|\gamma(t)-w|}\\ &=\, \big(\gamma(t)-w\big)\,\Big[(1-s) + \frac{s}{|\gamma(t)-w|}\Big],\end{aligned}$$

pour constater que le deuxième facteur est toujours > 0, quel que soit $s \in [0,1]$. □

Grâce à l'invariance de l'indice par homotopie que le Théorème 6.6 a établi récemment, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-w} \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-w}.$$

Comme $\big|\gamma_1(t) - w\big| \,\equiv\, 1$, on s'imagine visuellement que la courbe $\gamma_1(t)$ se déplace sur un cercle fixé centré en w, en allant parfois dans le sens trigonométrique, parfois dans le sens des aiguilles d'une montre, et qu'entre le temps de départ $t = 0$ au point $\gamma_1(0)$ et le temps d'arrivée $t = 1$ au même point $\gamma_1(1) = \gamma_1(0)$, l'indice de γ_1 par rapport à w compte effectivement le nombre de fois que γ_1 a tourné autour de w.

Au final, grâce à l'homotopie qui précède, on a bien compté le nombre de fois que γ a tourné autour de w.

Au moyen de ce concept mathématique de « *nombre de tours* », voici une version homologique prototypique du théorème de représentation intégrale de Cauchy.

Théorème 7.2. *Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit un point-singularité $w \in \Omega$, et soit une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée :*

$$\gamma \,\subset\, \Omega\backslash\{w\}.$$

Alors toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ satisfait :

$$f(w)\cdot \mathsf{Ind}_\gamma(w) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz.$$

Ainsi, la courbe γ est autorisée à s'éparpiller comme un très long serpent dans Ω, et il faut affecter la valeur $f(w)$ de la multiplicité entière $\mathsf{Ind}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$ pour en tenir compte. Jusqu'à présent, pour un cercle $\gamma = C$, ou plus généralement pour un contour de Jordan $\gamma = \Gamma$ avec $w \in \Gamma_{\mathsf{int}}$, on avait :

$$f(w)\cdot 1 \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz,$$

c'est-à-dire implicitement, on avait un indice valant :

$$1 \,=\, \mathsf{Ind}_\Gamma(w).$$

Démonstration. La fonction :

$$g(z) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{lorsque } z \neq w, \\ f'(w) & \text{pour } z = w, \end{cases}$$

est holomorphe dans $\Omega\backslash\{w\}$, et aussi au voisinage de w, grâce au développement auxiliaire :

$$f(z) \,=\, f(w) + f'(w)\,\big(z-w\big) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n\,!}\,\big(z-w\big)^n,$$

qui fait voir son analyticité pour z proche de w :

$$g(z) \,=\, f'(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)\,!}\,\big(z-w\big)^n.$$

Comme Ω est simplement connexe, g admet une primitive $G \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $G' = g$, donc puisque γ est fermée, on a :

$$0 \,=\, G\big(\gamma(1)\big) - G\big(\gamma(0)\big) \,=\, \int_\gamma g(z)\,dz,$$

ce qui offre la conclusion :

$$\begin{aligned} 0 \,&=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\,dz \\ &=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w)\,\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-w} \\ &=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w)\,\mathsf{Ind}_\gamma(w). \end{aligned}$$

□

Après ce préliminaire dans lequel il faut comprendre que :

$$\mathsf{Res}_{\frac{f(z)}{z-w}}\big(w\big) \,=\, f(w),$$

nous parvenons enfin au

Théorème 7.3. [des résidus homologique] *Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ de points-singularités mutuellement distincts $w_1, \ldots, w_\mathrm{L} \in \Omega$, et soit une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée :*

$$\gamma \,\subset\, \Omega\backslash\big\{w_1, \ldots, w_\mathrm{L}\big\}.$$

Alors pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\Omega\backslash\{w_1, \ldots, w_\mathrm{L}\}\big)$ en-dehors de ces points, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz \,=\, \mathsf{Ind}_\gamma(w_1)\cdot\mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Ind}_\gamma(w_\mathrm{L})\cdot\mathsf{Res}_f(w_\mathrm{L}).$$

Démonstration. Il existe un rayon $r > 0$ assez petit pour que les disques $\mathbb{D}_r(w_1), \dots, \mathbb{D}_r(w_{\mathrm{L}})$ soient deux à deux disjoints et tel que chaque restriction $f\big|_{\mathbb{D}_r^*(w_\ell)}$ aux disques épointés $\mathbb{D}_r^*(w_\ell) = \mathbb{D}_r(w_\ell)\backslash\{w_\ell\}$ admette un développement de Laurent normalement convergent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\ell,n}\big(z-w_\ell\big)^n \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L},\ z \in \mathbb{D}_r^*(w_\ell)).$$

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que chaque partie singulière :

$$\begin{aligned} h_\ell(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n}\big(z-w_\ell\big)^n \\ &\in \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\backslash\{w_\ell\}\big) \end{aligned}$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier épointé de w_ℓ.

Ensuite, sachant que pour tout $n \leqslant -2$, la fonction $(z-w_\ell)^n$ admet dans $\mathbb{C}\backslash\{w_\ell\}$ la primitive holomorphe $\frac{1}{n+1}\,(z-w_\ell)^{n+1}$, la convergence normale justifie de calculer aisément :

$$\begin{aligned} \int_\gamma h_\ell(z)\,dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} \int_\gamma \big(z-w_\ell\big)^n\,dz \\ &= a_{\ell,-1}\,2i\pi\,\mathsf{Ind}_\gamma\big(w_\ell\big) \\ &= \mathsf{Res}_f\big(w_\ell\big)\,2i\pi\,\mathsf{Ind}_\gamma\big(w_\ell\big) \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}). \end{aligned}$$

Lorsqu'on soustrait toutes ces parties singulières :

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - h_1(z) - \cdots - h_{\mathrm{L}}(z) \\ &\in \mathscr{O}(\Omega), \end{aligned}$$

on obtient une vraie fonction partout holomorphe, et comme elle admet une primitive $G \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $G' = g$ dans l'ouvert simplement connexe Ω, il vient puisque γ est fermée :

$$\int_\gamma g(z)\,dz = G\big(\gamma(1)\big) - G\big(\gamma(0)\big) = 0,$$

ce qui nous permet d'atterrir en douceur à bon port :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma h_1(z)\,dz - \cdots - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma h_{\mathrm{L}}(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \mathsf{Ind}_\gamma(w_1)\,\mathsf{Res}_f(w_1) - \cdots - \mathsf{Ind}_\gamma(w_{\mathrm{L}})\,\mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}}). \end{aligned}$$ □

8. Théorème des résidus sans connexité simple

Maintenant, si nous souhaitons supprimer l'hypothèse de simple connexité de Ω, il est nécessaire d'imposer une condition topologique.

Théorème 8.1. [de Cauchy, sans simple connexité] *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire et soit $\gamma \subset \Omega$ une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ n'entourant aucun « trou » de Ω, au sens où :*

$$0 \,=\, \mathsf{Ind}_\gamma(a) \qquad (\forall\, a \in \mathbb{C}\backslash\Omega).$$

Alors toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ satisfait l'annulation de Cauchy :

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,=\, 0.$$

De plus, en tout point $w \in \Omega\backslash\gamma$ hors de la courbe :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \cdot f(w) \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz.$$

Démonstration. La première formule découle sans effort de la seconde, appliquée à la fonction $\widetilde{f}(z) := (z-w)\, f(z)$ en choisissant un point fixé quelconque $w \in \Omega\backslash\gamma$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ind}_\gamma(w) \cdot \widetilde{f}(w) \,=\, \mathsf{Ind}_\gamma(w) \cdot 0 \,=\, 0 \,&=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cancel{(z-w)}\, f(z)}{\cancel{(z-w)}}\, dz \\
&=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Afin d'établir cette seconde formule, introduisons la fonction de deux variables complexes $z, w \in \Omega$:

$$H(z,w) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{lorsque } z \neq w, \\ f'(w) & \text{pour } z = w, \end{cases}$$

qui est $\mathscr{C}^0$ et même $\mathscr{C}^\infty$ dans $\Omega \times \Omega$ grâce à une formule valable pour $z \sim w$ proche de w que nous avons déjà utilisée :

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} \,=\, f'(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)\,!}\, \big(z-w\big)^n.$$

Ensuite, définissons :

$$h(w) \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma H(z,w)\, dz \qquad (w \in \Omega).$$

Assertion 8.2. *Cette fonction $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans Ω.*

Preuve. La continuité de H et le théorème de continuité des intégrales à paramètre(s) assure tout d'abord que $h \in \mathscr{C}^0(\Omega)$.

Pour vérifier l'holomorphie, il suffit de tester le critère de Morera sur tout triangle fermé $T = \overline{T} \subset \Omega$:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} h(w)\, dw \,&=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial T} \bigg(\int_\gamma H(z,w)\, dz \bigg)\, dw \\
\text{[Fubini]} \qquad &=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \bigg(\underline{\int_{\partial T} H(z,w)\, dw} \bigg)\, dz \\
&=\, 0,
\end{aligned}$$

l'annulation du terme souligné étant justifiée par le fait que la fonction $w \longmapsto H(z,w)$ est holomorphe dans Ω, c'est-à-dire a une singularité illusoire en $w = z$, comme le fait voir le développement symétrique de celui qui précède :

$$H(z,w) \,=\, \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \,=\, f'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)\,!}\,\big(w-z\big)^n. \qquad \square$$

À présent, introduisons :

$$\begin{aligned} \Upsilon \,&:=\, \big\{a \in \mathbb{C}\backslash\gamma\colon\ \mathsf{Ind}_\gamma(a) = 0\big\} \\ &\supset\, \mathbb{C}\backslash\Omega, \end{aligned} \qquad \text{[Hypothèse]}$$

et pour $w \in \Upsilon$, définissons :

$$g(w) \,:=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz.$$

Assertion 8.3. *Dans $\Upsilon \cap \Omega$, les deux fonctions $g \equiv h$ coïncident.*

Preuve. En effet, pour tout $w \in \Upsilon \cap \Omega$, d'où $w \notin \gamma$, reconnaissons l'indice $\mathsf{Ind}_\gamma(w) = 0$, qui disparaît :

$$\begin{aligned} h(w) \,&=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz \\ &=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w)\,\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-w}}_{\circ} \\ &=\, g(w) - 0. \end{aligned} \qquad \square$$

Comme $\Upsilon \supset \mathbb{C}\backslash\Omega$, la fonction :

$$F(w) \,:=\, \begin{cases} h(w) & \text{lorsque } \ w \,\in\, \Omega, \\ g(w) & \text{lorsque } \ w \,\in\, \Upsilon, \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, et holomorphe, c'est-à-dire :

$$F \,\in\, \mathscr{O}(\mathbb{C}).$$

Mais comme l'indice $\mathsf{Ind}_\gamma(\cdot)$ est constant dans les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\gamma$, et vaut 0 dans l'unique composante connexe non bornée D_∞ de $\mathbb{C}\backslash\gamma$, d'après la Proposition 6.5, on a aussi :

$$\Upsilon \,\supset\, D_\infty.$$

Par conséquent, les valeurs de la fonction F sont données par la seconde formule pour tout $w \in D_\infty$:

$$F(w) \,=\, g(w) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad (\forall\, w \in D_\infty),$$

et comme D_∞ contient le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ d'un disque fermé de rayon $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand centré à l'origine, il vient :

$$F(w) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad (\forall\, |w| > \mathrm{R}),$$

d'où en prenant R assez grand pour que $\gamma \subset \overline{\mathbb{D}}_{\frac{\mathrm{R}}{2}}$, toujours pour $|w| > \mathrm{R}$:

$$\begin{aligned}
\big|F(w)\big| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-w|}\,|dz| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \max_\gamma |f| \,\frac{2}{\mathrm{R}} \int_\gamma |dz| \\
&= \frac{1}{\pi\,\mathrm{R}} \Big(\max_\gamma |f| \cdot \mathsf{longueur}\,(\gamma)\Big) \quad \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,
\end{aligned}$$

donc $F \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe bornée avec $|F(w)| \longrightarrow 0$ à l'infini, ce qui la force, à cause du théorème de Liouville, non seulement à être constante, mais aussi à être égale à la constante nulle !

Tout ceci signifie, en restriction à $\Omega \backslash \gamma \ni w$, que nous atteignons la formule annoncée :

$$\begin{aligned}
0 \,=\, F(w) \,&=\, h(w) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w)\,\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \mathsf{Ind}_\gamma(w) \cdot f(w). \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 8.4. [des résidus, sans simple connexité] *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire, et soit $\gamma \subset \Omega$ une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ n'entourant aucun « trou » de Ω :*

$$0 \,=\, \mathsf{Ind}_\gamma(a) \qquad {\scriptstyle (\forall\, a \in \mathbb{C}\backslash\Omega)}.$$

Soit un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ de points-singularités distincts $w_1, \ldots, w_\mathrm{L} \in \Omega$, et soit une fonction holomorphe en-dehors de ces points :

$$f \,\in\, \mathscr{O}\big(\Omega \backslash \{w_1, \ldots, w_\mathrm{L}\}\big).$$

Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,dz \,=\, \mathsf{Ind}_\gamma(w_1)\,\mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Ind}_\gamma(w_\mathrm{L})\,\mathsf{Res}_f(w_\mathrm{L}).$$

Démonstration. Les arguments sont presque identiques à ceux de la démonstration du précédent Théorème 7.3, en soustrayant les L parties singulières pour avoir une fonction partout holomorphe :

$$\begin{aligned}
g(z) \,&:=\, f(z) - h_1(z) - \cdots - h_\mathrm{L}(z) \\
&\in\, \mathscr{O}(\Omega),
\end{aligned}$$

le fait que $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ ne provenant plus d'une hypothèse de simple connexité sur Ω, mais directement de la première partie du Théorème 8.1 qui vient d'être démontré. $\square$

9. Dénombrement de zéros et de pôles

Grâce à notre présentation de la fonction logarithme complexe, si une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ ne s'annule pas en tous les points $z \in \Omega$, on peut définir :

$$\mathsf{log}\, f(z) \,=\, \mathsf{log}\,\big|f(z)\big| + i\,\mathsf{arg}\, f(z) + 2i\pi\,\mathbb{Z},$$

mais cette « fonction » est multivaluée. Puisque $\big(\log z\big)' = \frac{1}{z}$, la formule de dérivation composée montre que la dérivée de cette fonction multivaluée :

$$\big(\log f(z)\big)' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

est une vraie fonction holomorphe univaluée. Alors le long d'une courbe γ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ qui ne rencontre aucun zéro de f, l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta &= \Big[\log f(\zeta)\Big]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \\ &= \underline{\log|f(\gamma(1))| - \log|f(\gamma(0))|}_{\circ} + i\Big(\arg f\big(\gamma(1)\big) - \arg f\big(\gamma(0)\big)\Big) \\ &= i\Big(\arg f\big(\gamma(1)\big) - \arg f\big(\gamma(0)\big)\Big)\end{aligned}$$

s'interprète comme la variation de l'argument de $f(z)$, supposé variant continûment, lorsqu'on parcourt γ. Nous allons voir que ce différentiel d'argument est entièrement déterminé par les zéros et les pôles de f qui sont situés « à l'intérieur » de γ.

Terminologie 9.1. La *dérivée logarithmique* d'une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ en un point $z \in \Omega$ où $f(z) \neq 0$ est :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

En guise de préliminaire, commençons par observer que bien qu'on n'ait pas en général de formule d'additivité :

$$\log\big(f_1\,f_2\big) \overset{\mathsf{faux}}{=} \log f_1 + \log f_2,$$

une vraie additivité existe quand même au niveau des dérivées logarithmiques, comme le montre un petit calcul :

$$\frac{(f_1\,f_2)'}{f_1\,f_2} = \frac{f_1'f_2 + f_1f_2'}{f_1\,f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2},$$

qui se généralise aisément :

$$\frac{\big(f_1\cdots f_{\mathrm{M}}\big)'}{f_1\cdots f_{\mathrm{M}}} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_{\mathrm{M}}'}{f_{\mathrm{M}}}.$$

Maintenant, rappelons que si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $f \not\equiv 0$ a un zéro d'ordre $n \geqslant 1$ en un point $z_0 \in \Omega$, elle se factorise comme :

$$f(z) = \big(z - z_0\big)^n\,g(z),$$

avec $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ satisfaisant $g(z_0) \neq 0$, d'où pour la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

le reste $\frac{g'(z)}{g(z)}$ étant holomorphe près de z_0. De manière similaire, si f a un pôle d'ordre $m \geqslant 1$ en un point $w_0 \in \Omega$, puisqu'elle se factorise aussi comme :

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - w_0)^m},$$

il vient :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-w_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Nous retrouvons ainsi — *cf.* la Proposition 3.3 — que $\frac{f'}{f}$ a des pôles simples aux zéros et aux pôles de f, avec :

$$\mathsf{Res}_{\frac{f'}{f}}\big(z_0\big) = n \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Res}_{\frac{f'}{f}}\big(w_0\big) = -m.$$

Ce sont ces zéros et ces pôles qui gouvernent la variation de l'argument.

Théorème 9.2. [Principe de l'argument] *Soit un ouvert* $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ *contenant un contour de Jordan et son intérieur, et soit une fonction* $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ méromorphe *dans* Ω. *Si* f *est holomorphe et* jamais nulle *au voisinage de* Γ *:*

$$f \in \mathscr{M}(\Omega) \cap \mathscr{O}^*\big(\mathsf{voisinage}(\Gamma)\big),$$

et si elle possède à l'intérieur un nombre fini $\mathrm{K} \geqslant 0$ *de zéros* $z_1, \ldots, z_{\mathrm{K}} \in \Gamma_{\mathsf{int}}$ *d'ordres* $n_1, \ldots, n_{\mathrm{K}} \geqslant 1$ *ainsi qu'un nombre fini* $\mathrm{L} \geqslant 0$ *de pôles* $w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}} \in \Gamma_{\mathsf{int}}$ *d'ordres* $m_1, \ldots, m_{\mathrm{L}} \geqslant 1$, *alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = n_1 + \cdots + n_{\mathrm{K}} - m_1 - \cdots - m_{\mathrm{L}}.$$

De manière abrégée :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \#\,\mathsf{zéros}(f) - \#\,\mathsf{pôles}(f),$$

comptés avec multiplicité, en supposant donc que Γ ne contient ni zéro ni pôle. En particulier, quand $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, c'est-à-dire quand $\mathrm{L} = 0$, cette formule permet de comptabiliser le nombre total de zéros de f à l'intérieur depuis le bord de la piscine, en montrant ses biscoteaux.

Démonstration. Grâce au rappel des valeurs n_k, $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}$, des résidus de $\frac{f'}{f}$ en les zéros z_k de f, ainsi que des valeurs $-m_\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}$, de ceux en les pôles w_ℓ, cette formule est un corollaire direct du Théorème 4.3. □

Voici deux variations de ce *Principe de l'argument*, qui sont inspirées du Théorème 7.3 et du Théorème 8.4, et en sont corollaires directs.

Théorème 9.3. *Dans un ouvert simplement connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *si une fonction méromorphe :*

$$f \in \mathscr{M}(\Omega)$$

possède dans Ω *un nombre fini* $\mathrm{K} \geqslant 0$ *de zéros* $z_1, \ldots, z_{\mathrm{K}} \in \Omega$ *d'ordres* $n_1, \ldots, n_{\mathrm{K}} \geqslant 1$ *ainsi qu'un nombre fini* $\mathrm{L} \geqslant 0$ *de pôles* $w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}} \in \Omega$ *d'ordres* $m_1, \ldots, m_{\mathrm{L}} \geqslant 1$, *et si* $\gamma \subset \Omega$ *est une courbe fermée* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *ne les rencontrant pas :*

$$\gamma \subset \Omega \backslash \big\{z_1, \ldots, z_{\mathrm{K}},\, w_1, \ldots, w_{\mathrm{L}}\big\},$$

alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathsf{Ind}_\gamma\big(z_k\big)\, n_k - \sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \mathsf{Ind}_\gamma\big(w_\ell\big)\, m_\ell.$$

Le même résultat vaut dans un ouvert arbitraire $\Omega \subset \mathbb{C}$ *en supposant que* γ *n'entoure aucun « trou » de* Ω *:*

$$\mathsf{Ind}_\gamma(a) = 0 \qquad (\forall\, a \in \mathbb{C} \backslash \Omega). \qquad \square$$

Terminons ce chapitre par une dernière application théorique du théorème des résidus pour les contours de Jordan.

Théorème 9.4. [de Rouché] *Soient deux fonctions $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphes dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ contenant un contour de Jordan Γ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ ainsi que son intérieur. Si :*

$$\big|f(z) - g(z)\big| \,<\, \big|g(z)\big| \qquad (\forall\, z \in \Gamma),$$

alors f et g ont le même nombre de zéros dans Γ_{int}, comptés avec multiplicité.

Démonstration. L'hypothèse-inégalité garantit (exercice visuel) que ni f ni g ne s'annulent sur Γ, d'où $f \not\equiv 0$ et $g \not\equiv 0$ dans l'ouvert connexe Γ_{int}, et comme $\Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ est compact, f et g ont alors, grâce au principe des zéros isolés, un nombre *fini* de zéros dans Γ_{int} — heureusement !

La fonction-quotient :

$$h(z) \,:=\, \frac{f(z)}{g(z)}$$

est méromorphe dans un certain sous-voisinage ouvert connexe :

$$\omega \,\supset\, \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}} \qquad \text{avec} \qquad \omega \,\subset\, \Omega,$$

et elle est holomorphe dans un certain voisinage ouvert :

$$\varpi \,\supset\, \Gamma,$$

assez rétréci pour que $g \neq 0$ ne s'y annule jamais, ce qui est possible par continuité puisque $g \neq 0$ sur Γ.

Alors une division par $g(z)$ dans l'inégalité-hypothèse donne, quitte à rétrécir ϖ si nécessaire :

$$\big|h(z) - 1\big| \,<\, 1 \qquad (\forall\, z \in \varpi).$$

Autrement dit, $h \colon \varpi \longrightarrow \big\{w \in \mathbb{C} \colon\, |w - 1| < 1\big\}$ envoie ϖ dans le disque ouvert $\mathbb{D}_1(1)$ de rayon 1 centré en 1. Comme $\mathbb{D}_1(1) \subset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, nous pouvons utiliser la détermination principale du logarithme :

$$\log z \,=\, \log r + i\,\theta \qquad (r > 0,\ -\pi < \theta < \pi),$$

pour composer et obtenir une fonction :

$$\log h(z),$$

ayant pour dérivée :

$$\frac{h'(z)}{h(z)} \,=\, \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad (z \in \Gamma),$$

ce qui nous offre une belle primitive ! Comme Γ est fermé, c'est terminé :

$$\begin{aligned} 0 \,&=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz \\ &=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz \\ &=\, \#\,\text{zéros}\,(f) - \#\,\text{zéros}\,(g) \qquad \text{[Théorème 9.2]} \end{aligned}$$

□

10. Caractérisation de la connexité simple en termes d'indices

Il est maintenant intéressant de comparer les diverses formules des résidus obtenues jusqu'à présent, notamment le Théorème 7.3 et le Théorème 8.4. À cette fin, nous devons interpréter la connexité simple du point de vue du complémentaire de l'ouvert Ω.

Théorème 10.1. *Dans un ouvert* borné $\Omega \subset \mathbb{C}$*, on a équivalence entre :*

(i) Ω *est simplement connexe ;*

(ii) $0 = \mathsf{Ind}_\gamma(w)$ *pour toute courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée* $\gamma \subset \Omega$ *et tout point* $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$*;*

(iii) $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *est connexe.*

L'implication ascendante **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)** est profonde, elle nécessite le Théorème d'approximation de Runge, comme nous l'avons déjà vu, et elle nécessitera aussi le Théorème de Riemann conforme, qui sera démontré dans le prochain chapitre.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Soit un point quelconque $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. La fonction $f(\zeta) := \frac{1}{\zeta - w}$ est clairement holomorphe dans Ω. Comme Ω est simplement connexe, elle admet une primitive $F \in \mathscr{O}(\Omega)$, avec $F'(\zeta) = f(\zeta)$. Soit $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée : $\gamma(0) = \gamma(1)$. Alors l'indice concerné s'annule effectivement :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta \,=\, F\big(\gamma(1)\big) - F\big(\gamma(0)\big) \,=\, 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)**. Supposons par l'absurde que le fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega$ n'est *pas* connexe. De manière équivalente, il existe une décomposition :

$$\mathbb{C}\backslash\Omega \,=\, F_1 \cup F_2,$$

en deux fermés non vides disjoints.

Assertion 10.2. *Un seul parmi* F_1 *et* F_2 *est non borné.*

Preuve. Comme Ω est borné, il existe un rayon $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand pour que $\Omega \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Mais alors l'extérieur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}} \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$ de ce disque est connexe, donc dans sa décomposition en deux fermés (relatifs) :

$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}} \,=\, \Big[\big(\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big) \cap F_1\Big] \bigcup \Big[\big(\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big) \cap F_2\Big],$$

un seul peut être non vide, disons le premier, d'où :

$$F_1 \,\supset\, \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}},$$

et par conséquent l'autre $F_2 \subset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ est borné. □

Re-notons alors :

$$\mathbb{C}\backslash\Omega \,=\, F \cup K,$$

où $F \neq \emptyset$ est fermé et $K \neq \emptyset$ est compact.

Pour atteindre une contradiction, nous allons construire une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée γ 'explicite', et trouver un point $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ tel que $0 \neq \mathsf{Ind}_\gamma(w)$. Cette courbe γ sera construite comme partie du bord d'une réunion finie de petits carrés de chocolat bien choisis.

Proposition 10.3. *Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, soit un fermé non vide $F \neq \emptyset$, soit un compact non vide $K \neq \emptyset$ avec $K \cap F = \emptyset$ de telle sorte que :*

$$d := \mathsf{dist}\big(K, F\big) > 0,$$

et soit un point quelconque $w \in K$. Alors il existe une collection finie $\big\{\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{\mathrm{L}}\big\}$ de carrés fermés appartenant à une grille uniforme dans le plan de côté $\delta > 0$ avec $\delta \ll d$, qui satisfont :

(a) *$w \in Q_1$ appartient à l'intérieur de Q_1 ;*

(b) *pour tous $1 \leqslant \ell_1 \neq \ell_2 \leqslant \mathrm{L}$, les intérieurs $Q_{\ell_1} \cap Q_{\ell_2} = \emptyset$ sont disjoints ;*

(c) *K est contenu dans l'*intérieur *de la réunion $\bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}} \overline{Q}_\ell$;*

(d) *$\bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}} \overline{Q}_\ell$ est disjoint de F ;*

(e) *le bord de $\bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}} \overline{Q}_\ell$ est entièrement contenu dans l'ouvert $\Omega := \mathbb{C} \big\backslash (F \cup K)$, et il consiste en un nombre fini $\mathrm{M} \geqslant 1$ de courbes polygonales fermées simples $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mathrm{M}}$ disjointes deux à deux.*

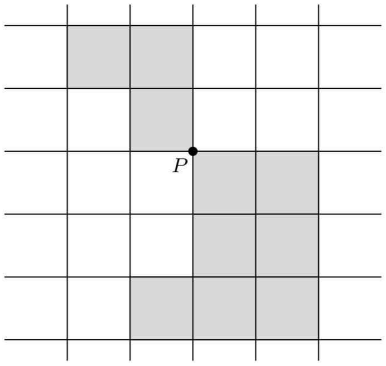
Démonstration. Découpons le plan $\mathbb{C}$ le long d'une grille uniforme infinie de côté $0 < 3\,\delta \ll d$ de telle sorte que w se trouve *au centre* d'un des carrés fermés d'aire $(3\,\delta) \times (3\,\delta)$ de la grille.

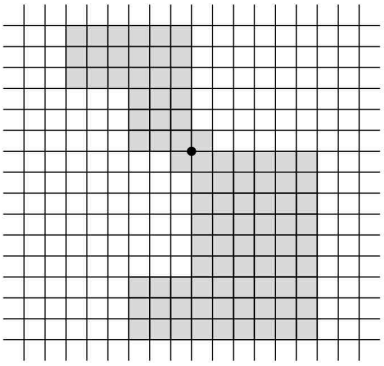
Soit alors $\big\{\overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_{\mathrm{J}}\big\}$ la collection finie de tous les carrés fermés qui intersectent K, dont les bords sont orientés dans le sens trigonométrique. On peut supposer w au centre du carré ouvert R_1. Alors on vérifie (exercice) que cette collection satisfait les propriétés **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)** de la proposition. Pour garantir que **(e)** est aussi satisfaite, nous allons devoir remodeler cette collection, comme suit.

Le bord topologique de la réunion :

$$\mathscr{R} := \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant J} \overline{R}_j$$

consiste alors en la réunion des côtés des carrés qui ne sont *pas* frontière commune entre deux carrés de la collection. Appelons-les *segments bordants*. Leur réunion forme une courbe polygonale — pas forcément connexe — constituée de segments dirigés par la grille.





Sur le bord $\partial\mathscr{R}$ de cette région, on trouve des *sommets*, qui sont par définition toutes les extrémités de tous les segments de longueur $3\,\delta$ bordants, tandis que les sommets « intérieurs », ont disparu, engloutis.

On dira qu'un sommet appartenant à un segment bordant est *confluent* s'il est extrémité d'un nombre $\geqslant 3$ de segments bordants. On se convainc (exercice) que ce nombre est toujours exactement égal à 4. Ces sommets confluents posent problème pour définir les courbes simples fermées disjointes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mathrm{M}}$, car en eux, elles se rencontrent. Nous devons donc *éliminer* tous les points confluents. Soit $\mathrm{P} \geqslant 0$ le nombre de points confluents.

Rien de plus simple ! Trisectons la grille de départ et remplaçons-la par une grille uniforme de côte $\frac{3\delta}{3} = \delta$. Les carrés $\overline{R}_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant \mathrm{J}$ sont alors remplacés par $9\,\mathrm{J}$ sous-carrés fermés, qui forment une nouvelle collection $\big\{\overline{Q}_1, \ldots, \overline{Q}_{9\mathrm{J}}\big\}$ de cardinal nonuple. Le point $w \in R_1$ qui était au centre de R_1 est alors encore au centre d'un unique carré ouvert de la nouvelle grille, disons Q_1.

Comme le montre la figure, afin de fusionner les courbes bordantes qui se recontrent en des points confluents, on ajoute 2 carrés au voisinage de tout point confluent. Avec $\mathrm{L} := 9\,\mathrm{J} + 2\,\mathrm{P}$, notons alors :

$$\big\{\overline{Q}_1, \ldots, \overline{Q}_{\mathrm{L}}\big\}$$

la collection, définitive, des carrés fermés ainsi obtenus. On se convainc (exercice) que cette collection satisfait toujours les propriétés **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)** de la proposition. Nous affirmons que cette collection satisfait aussi **(e)**.

En effet, soit $[a_1, a_2]$ un segment bordant (de longueur δ) pour la réunion :

$$\mathscr{Q} := \bigcup_{1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}} \overline{Q}_\ell.$$

Alors a_2 est le point de départ d'un autre segment bordant $[a_2, a_3]$. En continuant de cette manière, on construit une suite de segments bordants $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, $\ldots$, $[a_p, a_{p+1}]$, $\ldots$

Puisqu'il existe seulement un nombre fini de segments bordants, la suite de ces sommets est forcée de satisfaire $a_q = a_p$ pour un certain p et un certain $q \geqslant p + 1$. Choisissons le plus petit tel entier p et le plus petit entier q.

Assertion 10.4. *On a* $p = 1$.

Preuve. Si on avait au contraire $p \geqslant 2$, alors le point a_q serait sommet d'au moins trois segments bordants :

$$\big[a_{p-1}, a_p\big], \qquad \big[a_p, a_{p+1}\big], \qquad \big[a_{q-1}, a_q\big],$$

donc a_q serait un sommet confluent, mais on les a tous supprimés à l'avance ! □

Par conséquent, le polygone formé par les sommets $a_1, \ldots, a_q$ est une courbe fermée simple, disons γ_1.

Enfin, les autres courbes $\gamma_2, \ldots, \gamma_{\mathrm{M}}$ sont construite au moyen du même procédé. □

Grâce à cette proposition, nous pouvons maintenant aisément conclure l'implication **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)**, toujours en raisonnant par l'absurde. Orientons, comme nous l'avons dit, le bord ∂Q_ℓ de chaque carré dans le sens trigonométrique. Puisque $w \in Q_1$ est à l'intérieur de Q_1, on a $w \notin Q_\ell$ pour $2 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}$, et la formule de Cauchy donne :

$$\sum_{1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q_\ell} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 1.$$

Ensuite, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mathrm{M}}$ désignent les courbes polygonales fermées simples disjointes satisfaisant **(e)** de la Proposition 10.3, des annulations entre intégrales effectuées sur des

paires de segments orientés de manière opposée permettent de récrire cette identité sous la forme :

$$\sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_m} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \,=\, 1.$$

Par conséquent, on doit avoir $\mathsf{Ind}_{\gamma_{m_*}}(w) \neq 0$ pour au moins un indice m_*. Par construction, la courbe $\gamma_{m_*} \subset \Omega$ est entièrement contenue dans l'ouvert, et ainsi, $\gamma := \gamma_{m_*}$ apporte la contradiction annoncée.

Modulo l'implication **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)** qui ne pourra être établie que dans le chapitre suivant, la démonstration s'arrête. $\square$

11. Synthèse intermédiaire : connexité simple et holomorphie

Nous pouvons énoncer un résultat intermédiaire en direction d'une synthèse théorique toujours en suspens depuis que nous avons édifié la théorie de Cauchy, mais qui ne pourra être achevée que dans le prochain chapitre.

Théorème 11.1. *Pour un ouvert non vide* borné $\Omega \subset \mathbb{C}$*, les* 4 *conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\Omega \cong \mathbb{D}$ *est biholomorphe au disque unité* $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

(ii) Ω *est simplement connexe.*

(iii) $0 = \mathsf{Ind}_\gamma(w)$ *pour toute courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée* $\gamma \subset \Omega$ *et tout point* $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

(iv) $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *est connexe.*

Rappelons que nous avons déjà démontré que **(iv)** implique une propriété d'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des polynômes sur les compacts :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, K \,\subset\, \Omega \text{ compact} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} \big| f(z) - P(z) \big| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Nous avons aussi vu que ceci entraîne à son tour que pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée, on a :

$$0 \,=\, \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Dans le prochain chapitre, nous allons établir un théorème célèbre de Riemann, d'après lequel ces dernières annulations intégrales impliquent la condition très forte **(i)** affirmant que l'ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{D}$ est biholomorphe au disque unité.

12. Exercices

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé en l'un de ses points.

(a) Montrer, pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, et pour tout $w \notin \Omega$, que :

$$0 \,=\, \mathsf{Ind}_\gamma(w).$$

(b) Généraliser cela aux ouverts simplement connexes $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit une courbe continue $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe une application continue $\theta\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\gamma(t) \,=\, e^{\theta(t)} \qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

Indication: Observer que l'exponentielle complexe $\mathbb{C} \ni z \longmapsto e^z \in \mathbb{C}^*$ établit un difféomorphisme local au sens où, autour de tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un ouvert $U \ni z$ et il existe un ouvert $V \ni e^z$ tel que :

$$\exp\colon \quad U \xrightarrow{\sim} V$$

est un difféomorphisme.

Exercice 3. EE

Contours de Jordan $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ et Théorème de Cauchy-Jordan

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Connexité du complémentaire d'un arc de Jordan $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans $\mathbb{C}$

Avant de traiter les courbes $\mathscr{C}^1$ par morceaux, commençons par étudier les *arc de Jordan* $\mathscr{C}^\infty$, *i.e.* qui n'ont aucune discontinuité tangentielle.

Définition 2.1. Un *arc de Jordan* $\mathscr{C}^\infty$ est une application $\mathscr{C}^\infty$:

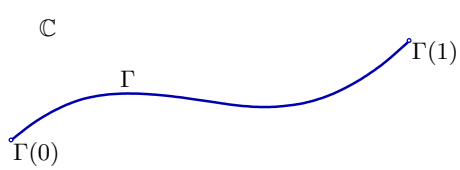
$$\Gamma\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},$$

à tangente jamais dégénérée :

$$\frac{d\Gamma}{dt}(t) \neq 0 \qquad (\forall\, t \in [0,1]),$$

qui est de plus injective :

$$0 \leqslant t' \neq t'' \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma\big(t'\big) \neq \Gamma\big(t''\big).$$



Grâce à des fonctions-plateau $\mathscr{C}^\infty$ à support compact — *cf.* un cours d'Analyse de Fourier —, on peut démontrer que Γ se prolonge à $\mathbb{R} \supset [0,1]$ de manière $\mathscr{C}^\infty$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $\rho > 0$ petit tel que notre application Γ est définie dans l'intervalle ouvert :

$$I_\rho := \big]-\rho,\ 1+\rho\big[\ \supset [0,1],$$

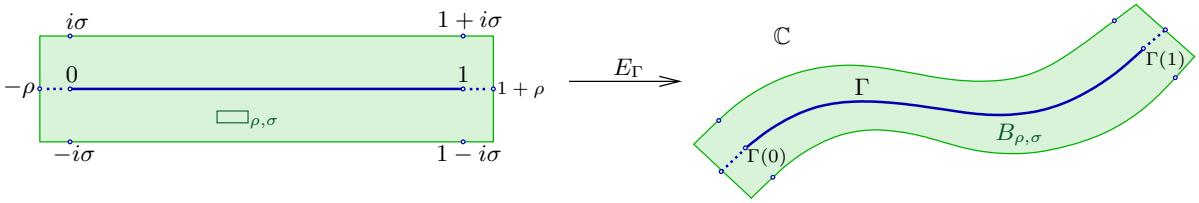
qu'elle y est injective, et que sa dérivée n'y est jamais nulle.

Convention 2.2. La paramétrisation $\Gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et l'image seront notées par la même lettre :

$$\Gamma \equiv \Gamma\big([0,1]\big).$$

Comme le montre la figure ci-dessus, la courbe ressemble à un cheveu ondulé tombé sur le sol. Comme Γ est continue, l'image $\Gamma \equiv \Gamma\big([0,1]\big)$ est un compact de $\mathbb{C}$. Intuitivement, on se convainc aisément que le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ est un ouvert connexe.

Pour démontrer ce résultat, *voir* le Théorème 2.6 ci-dessous, l'idée-clé est d'*épaissir* cet arc de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$.



Proposition 2.3. *Quitte à réduire $\rho > 0$, il existe $\sigma > 0$ assez petit tel que l'application d'épaississement de Γ :*

$$E_\Gamma : \quad]-\rho,\, 1+\rho[\, \times\,]-\sigma, \sigma[\;\longrightarrow\; \mathbb{C},$$

définie par :

$$E_\Gamma(t,s) \;:=\; \Gamma(t) + s\, i\, \frac{d\Gamma}{dt}(t),$$

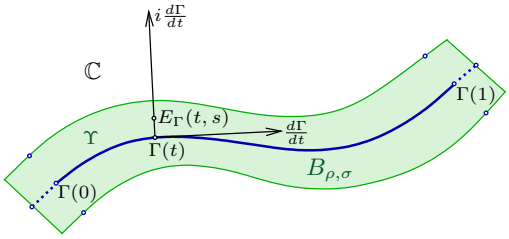
est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme du rectangle allongé :

$$\square_{\rho,\sigma} \;:=\;]-\rho,\; 1+\rho[\; \times\,]-\sigma,\, \sigma[,$$

sur son image :

$$\square_{\rho,\sigma} \;\xrightarrow{\sim}\; E_\Gamma\big(\square_{\rho,\sigma}\big) \;=:\; \boldsymbol{B}_{\rho,\sigma},$$

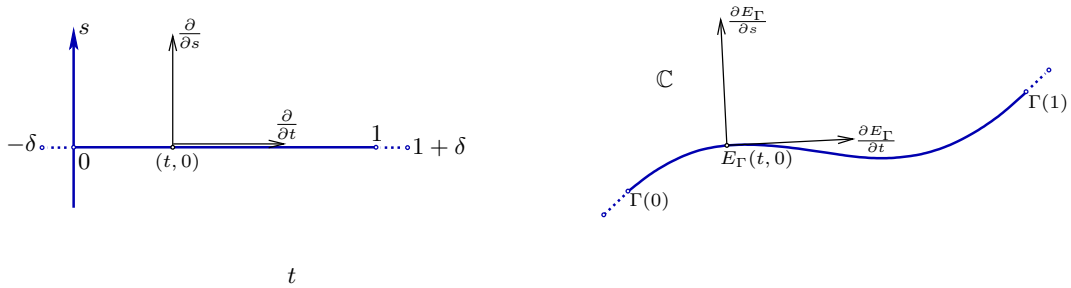
qui est une bande-serpent *entourant la courbe.*



Notons que le vecteur non nul $i\,\frac{d\Gamma}{dt}(t) \neq 0$ est obtenu par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ à partir du vecteur tangent $\frac{d\Gamma}{dt}(t)$, et donc, les deux vecteurs en question engendrent l'espace tangent à $\mathbb{R}^2$ en tout point de la courbe :

$$\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\frac{d\Gamma}{dt}(t),\; i\,\frac{d\Gamma}{dt}(t)\right) \;=\; \mathbb{R}^2 \qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

Multiplier alors le vecteur $i\,\frac{d\Gamma}{dt}(t)$ par un nombre réel petit $s \in\,]-\sigma, \sigma[$ nous fait nous déplacer de manière essentiellement orthogonale à la courbe, afin de l'épaissir.



Démonstration. En tout point $(t,0)$ avec $t \in [0,1]$, les deux vecteurs de dérivée partielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\Gamma}{\partial t}(t,0) &= \frac{d\Gamma}{dt}(t), \\ \frac{\partial E_\Gamma}{\partial s}(t,0) &= 0 + i\,\frac{d\Gamma}{dt}(t), \end{aligned}$$

sont linéairement indépendants, puisque $\frac{d\Gamma}{dt}(t) \neq 0$ par hypothèse.

Grâce au théorème d'inversion locale établi dans un cours de Calcul Différentiel, ceci implique l'existence, pour tout $t \in [0,1]$, d'un certain voisinage ouvert V_t de $(t,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, tel que la restriction de E_Γ à V_t établisse un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de V_t sur son image :

$$V_t \xrightarrow{\sim} E_\Gamma\big(V_t\big).$$

De plus, quitte à réduire $\rho > 0$, un argument de compacité permet de se convaincre qu'il existe $\sigma > 0$ tel qu'on ait uniformité de la taille de ces ouverts V_t, c'est-à-dire plus précisément, pour tout $t \in [0,1]$, l'application E_Γ établit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme :

$$\big]t-\rho,\, t+\rho\big[\times\big]-\sigma,\, \sigma\big[\quad \xrightarrow{\sim} \quad E_\Gamma\Big(\big]t-\rho,\, t+\rho\big[\times\big]-\sigma,\, \sigma\big[\Big). \tag{2.4}$$

En particulier, E_Γ est *injective* sur chacun de ces petits rectangles $\big]t-\rho,\, t+\rho\big[\times\big]-\sigma,\, \sigma\big[$, quel que soit $t \in [0,1]$.

Assertion 2.5. *Quitte à réduire $\sigma > 0$, l'application d'épaississement E_Γ est globalement injective dans le rectangle allongé :*

$$\square_{\rho,\sigma} = \bigcup_{t\in[0,1]} \big]t-\rho,\, t+\rho\big[\times\big]-\sigma,\, \sigma\big[.$$

Preuve. Il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\big|\Gamma(t)\big| \leqslant C \qquad \text{et} \qquad \big|\tfrac{d\Gamma}{dt}(t)\big| \leqslant C.$$

De plus, les deux hypothèses :

- $\Gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ injective ;
- $\frac{d\Gamma}{dt}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$;

entraînent (exercice) l'existence d'une constante $1 < \mathrm{M} < \infty$ telle que :

$$\tfrac{1}{\mathrm{M}}\,\big|t'-t\big| \leqslant \big|\Gamma(t')-\Gamma(t)\big| \leqslant \mathrm{M}\,|t'-t|,$$

quels que soient $t', t \in [0,1]$.

Si on a coïncidence de deux valeurs :

$$E_\Gamma\big(t',s'\big) = E_\Gamma(t,s),$$

c'est-à-dire si :

$$\Gamma(t') + s'\, i\, \tfrac{d\Gamma}{dt}(t') \;=\; \Gamma(t) + s\, i\, \tfrac{d\Gamma}{dt}(t),$$

une réorganisation adaptée :

$$\begin{aligned}\Gamma(t') - \Gamma(t) \;&=\; s\, i\, \tfrac{d\Gamma}{dt}(t) - s'\, i\, \tfrac{d\Gamma}{dt}(t') \\ &=\; \big(s - s'\big)\, i\, \tfrac{d\Gamma}{dt}(t) + i\, s' \Big(\tfrac{d\Gamma}{dt}(t) - \tfrac{d\Gamma}{dt}(t')\Big),\end{aligned}$$

conduit à la minoration :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\mathrm{M}}\, \big|t' - t\big| \;&\leqslant\; \big|\Gamma(t') - \Gamma(t)\big| \\ &\leqslant\; |s - s'|\, \Big|\frac{d\Gamma}{dt}(t)\Big| + |s'|\, \Big|\tfrac{d\Gamma}{dt}(t) - \tfrac{d\Gamma}{dt}(t')\Big| \\ &\leqslant\; 2\, \sigma\, C + \sigma\, 2\, C,\end{aligned}$$

d'où :

$$|t' - t| \;\leqslant\; 4\, C\, M\, \sigma \qquad (\ll 1).$$

En réduisant alors au besoin $0 < \sigma \ll 1$ afin que :

$$4\, C\, M\, \sigma \;<\; \rho,$$

on garantit que les deux valeurs (t', s') et (t, s) appartiennent à l'ouvert $]t - \rho, t + \rho[\, \times\,] - \sigma, \sigma[$ dans lequel E_Γ est injective, grâce au fait que (2.4) est un difféomorphisme.

Donc $(t', s') = (t, s)$, et enfin, E_Γ est globalement injective dans $\square_{\rho,\sigma}$. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de la Proposition 2.3. Le théorème d'inversion globale, énoncé au début du prochain chapitre sur le théorème de Riemann conforme, garantit alors que E_Γ est un difféomorphisme de $\square_{\rho,\sigma}$ sur son image, puisque E_Γ est un difféomorphisme local et est une application globalement injective. □

Grâce à cette Proposition 2.3 cruciale, nous voyons qu'il existe un ouvert connexe $\boldsymbol{B}_{\rho,\sigma} \supset \Gamma$ en forme de « bande-serpent » qui contient et entoure notre courbe. De plus, comme nous voyons sur une figure qui précède que l'ouvert complémentaire du segment horizontal $[0, 1] \times \{0\}$ dans notre rectangle allongé :

$$\square_{\rho,\sigma} \big\backslash\, [0, 1] \times \{0\},$$

est *connexe*, nous déduisons que son image par le difféomorphisme E_Γ :

$$\Upsilon \;:=\; \boldsymbol{B}_{\rho,\sigma} \big\backslash \Gamma$$

est *aussi* un ouvert connexe. Nous pouvons donc faire le tour complet de notre arc de Jordan Γ dans ce très pratique « jardin » Υ.

Théorème 2.6. [Arcs de Jordan $\mathscr{C}^\infty$] *Le complémentaire* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ *de tout arc* $\mathscr{C}^\infty$ *de Jordan* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *est* connexe.

Démonstration. Commençons par un préliminaire topologique. Étant donné un fermé quelconque $F \subset \mathbb{C}$, l'ouvert $\mathbb{C}\backslash F$ se décompose en *composantes connexes :*

$$\mathbb{C}\backslash F \;=\; \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha,$$

où les ω_α sont des ouverts maximalement connexes disjoints :

$$\emptyset \;=\; \omega_\alpha \cap \omega_{\alpha'} \qquad (\forall\, \alpha \neq \alpha'),$$

Rappelons la propriété de maximalité des composantes connexes. Si on a $\omega_\alpha \subset \widetilde{\omega}$ avec un ouvert connexe $\widetilde{\omega} \subset \mathbb{C}\backslash\Gamma$, alors nécessairement $\omega_\alpha = \widetilde{\omega}$.

Il en découle que si un ouvert connexe $\Upsilon \subset \mathbb{C}\backslash\Gamma$ rencontre une composante ω_α, *i.e.* si $\emptyset \neq \Upsilon \cap \omega_\alpha$, alors par maximalité, on a nécessairement $\Upsilon \subset \omega_\alpha$. Rappelons aussi que si deux ouverts connexes $\widetilde{\omega}_1$ et $\widetilde{\omega}_2$ dans $\mathbb{C}$ sont d'intersection $\widetilde{\omega}_1 \cap \widetilde{\omega}_2 \neq \emptyset$ non vide, alors $\widetilde{\omega}_1 \cup \widetilde{\omega}_2$ est connexe.

Lemme 2.7. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé, soit $\mathbb{C}\backslash F = \cup_{\alpha\in A}\,\omega_\alpha$ la décomposition de son complémentaire en composantes connexes. Alors pour tout $\alpha \in A$:*

$$\partial\omega_\alpha \,\subset\, F.$$

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha \in A$ et un point $p \in \partial\omega_\alpha\backslash F$. Comme $p \notin F$, on a $p \in \cup_{\alpha'\in A}\,\omega_{\alpha'}$. Comme $p \in \partial\omega_\alpha$ et comme $\partial\omega_\alpha \cap \omega_\alpha = \emptyset$, on a $p \notin \omega_\alpha$. Donc il existe $\alpha' \neq \alpha$ avec $p \in \omega_{\alpha'}$. Mais alors par ouverture de $\omega_{\alpha'}$, il existe un rayon $\eta > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_\eta(p) \subset \omega_{\alpha'}$.

Comme $p \in \overline{\omega}_\alpha$, il existe des points $q \in \omega_\alpha$ arbitrairement proches de p, donc il existe des points :

$$q \,\in\, \omega_\alpha \cap \omega_{\alpha'},$$

ce qui implique la connexité de l'ouvert réunion $\widetilde{\omega} := \omega_\alpha \cup \omega_{\alpha'}$, strictement plus gros que ω_α, puisque $p \in \widetilde{\omega}\backslash\omega_\alpha$. Tout ceci *contredit* l'hypothèse que ω_α *est* une composante connexe. Donc aucun $p \in \partial\omega_\alpha\backslash F$ n'existe. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème. Avec $F := \Gamma$, décomposons en composantes connexes :

$$\mathbb{C}\backslash\Gamma \,=\, \bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha.$$

Ainsi, chaque ω_α satisfait $\partial\omega_\alpha \subset \Gamma$. En particulier, $\overline{\omega}_\alpha \cap \Gamma \neq \emptyset$. Donc il existe des points $q_\alpha \in \omega_\alpha$, d'où $q_\alpha \notin \Gamma$, qui sont arbitrairement proches de Γ.

Mais alors, puisque notre bande $\boldsymbol{B}_{\rho,\sigma} \supset \Gamma$ est un voisinage ouvert de Γ dans $\mathbb{C}$, il existe pour chaque $\alpha \in A$ des points :

$$q_\alpha \,\in\, \omega_\alpha \cap \Upsilon \qquad\qquad \text{où} \qquad\qquad \Upsilon \,=\, \boldsymbol{B}_{\rho,\sigma}\backslash\Gamma.$$

Or comme l'ouvert Υ est connexe — *point absolument crucial !* —, chaque composante connexe $\omega_\alpha \supset \Upsilon$ le contient nécessairement. Donc toutes les composantes connexes ω_α se rencontrent dans le « jardin » Υ, et par maximalité, elles doivent toutes coïncider avec une *unique* composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

Ainsi $\mathsf{Card}\, A = 1$, et en conclusion, $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ est bien connexe. □

Maintenant, au lieu de supposer Γ lisse, *i.e.* de classe $\mathscr{C}^\infty$, traitons le cas plus général et nettement plus adapté aux applications à la théorie des résidus, où Γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, ce qu'on notera $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$. À nouveau, nous supposerons que la dérivée n'est jamais nulle, ce qui garantit que l'image :

$$\Gamma \,\equiv\, \Gamma\big([0,1]\big),$$

possèdent une forme géométrique définie. Comme toujours, on identifie une courbe à sa paramétrisation.

Définition 2.8. Un *arc de Jordan* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans $\mathbb{C}$ est une application continue $\Gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points dans $]0,1[$, à tangente partout non nulle, et sans point de rebroussement.

Explicitons cette définition. On suppose donné un nombre $\mathrm{M} \geqslant 0$ de *points de discontinuité* de la dérivée :

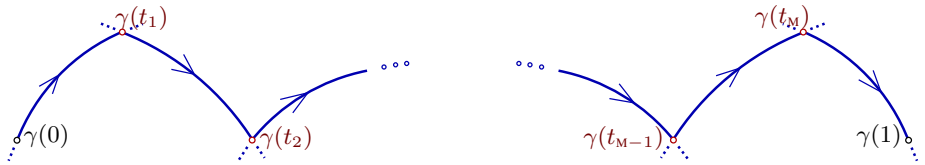
$$t_0 \,=\, 0 \,<\, t_1 \,<\, t_2 \,<\, \cdots \,<\, t_{\mathrm{M}-1} \,<\, t_{\mathrm{M}} \,<\, 1 \,=\, t_{\mathrm{M}+1};$$

on suppose que la courbe continue Γ est $\mathscr{C}^1$ sur chacun des $\mathrm{M}+1$ intervalles :

$$\big[0,t_1\big], \qquad \big[t_1,t_2\big], \qquad \ldots \qquad \big[t_{\mathrm{M}-1},t_{\mathrm{M}}\big], \qquad \big[t_{\mathrm{M}},1\big];$$

et on suppose que pour tout entier $0 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}$:

$$\frac{d\Gamma}{dt}(t) \,\neq\, 0 \qquad\qquad (\forall\, t \in [t_m, t_{m+1}]).$$

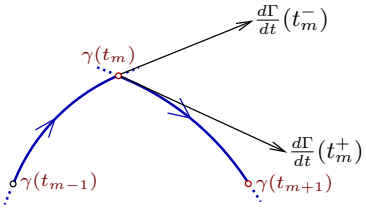


Bien entendu ici, aux points-extrémités de ces intervalles, les dérivées dont nous parlons sont des dérivées à gauche et à droite :

$$\frac{d\Gamma}{dt}\big(t_m^-\big) \,:=\, \lim_{\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{\Gamma(t_m - \varepsilon) - \Gamma(t_m)}{-\,\varepsilon} \,\neq\, 0,$$

$$\frac{d\Gamma}{dt}\big(t_m^+\big) \,:=\, \lim_{\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{\Gamma(t_m + \varepsilon) - \Gamma(t_m)}{\varepsilon} \,\neq\, 0.$$

Hypothèse 2.9. Aux points $t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}$, la tangente subit de vraies discontinuités, mais la courbe n'effectue jamais de rebroussement.



En introduisant :

$$\alpha_m \,:=\, \mathsf{Angle}\Big(\frac{d\Gamma}{dt}\big(t_m^-\big),\ \frac{d\Gamma}{dt}\big(t_m^+\big)\Big),$$

nous supposons donc que :

$$0 \,<\, \big|\alpha_m\big| \,<\, \pi \qquad\qquad (1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}).$$

Ré-exprimons encore d'une autre manière ces hypothèses. En utilisant des fonctions-plateau et cut-off, de classe $\mathscr{C}^1_c$ ou $\mathscr{C}^\infty_c$, on peut construire des extensions à des intervalles légèrement plus grands :

$$\begin{aligned} \Gamma_m : \quad & \big]t_m - \varepsilon_m,\, t_{m+1} + \varepsilon_m\big[\quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}, \\ \Gamma_m\big|_{[t_m, t_{m+1}]} \; &= \; \Gamma\big|_{[t_m, t_{m+1}]} \qquad\qquad (0 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_m > 0$ petit, à tangente géométrique partout existante :

$$\frac{d\Gamma_m}{dt}(t) \; \neq \; 0 \qquad\qquad (\forall\, t \in \,]t_m - \varepsilon_m, t_{m+1} + \varepsilon_m[).$$

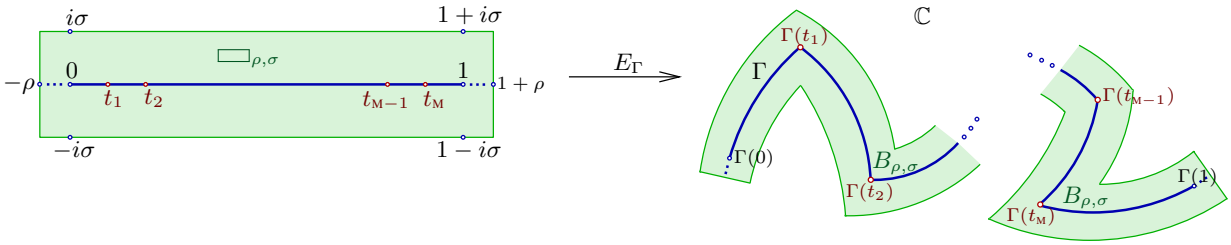
Les images dans $\mathbb{C}$ de ces Γ_m constituent alors des morceaux articulés de courbes satisfaisant la condition de continuité :

$$\Gamma_{m-1}\big(t_m\big) \; = \; \Gamma_m\big(t_m\big) \qquad\qquad (1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}).$$

Sans parler de dérivées à droite ou à gauche, les angles α_m en question peuvent alors être vus comme angles entre ces morceaux de courbes aux points d'articulation :

$$\alpha_m \; = \; \mathsf{Angle}\Big(\frac{d\Gamma_{m-1}}{dt}\big(t_m\big),\; \frac{d\Gamma_m}{dt}\big(t_m\big)\Big) \qquad\qquad (1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}),$$

toujours sous l'hypothèse $0 < |\alpha_m| < \pi$ qui exprime que les points sont *anguleux*, ou autrement dit, *non-rebroussants*.



Une fois ces hypothèses explicitées, nous pouvons présenter un énoncé intéressant qui généralise la Proposition 2.3 et dont la démonstration est très proche. Mais comme elle est techniquement exigeante, sans toutefois apporter d'éclaircissements utiles, nous l'éluderons. Contentons-nous de mentionner, comme la figure tente de l'exprimer, qu'on peut s'imaginer empoigner une bande-serpent lisse, puis la déformer adéquatement en les M points anguleux, comme les hommes forts qui tordaient des barres de fer sur les foires paysannes anciennes.

Proposition 2.10. *Pour $\rho > 0$ et $\sigma > 0$ assez petits, il existe une application d'épaississement :*

$$\begin{aligned} E_\Gamma : \quad \square_{\rho,\sigma} \; &\longrightarrow \; \mathbb{C} \\ (t, s) \; &\longmapsto \; E_\Gamma(t, s), \end{aligned}$$

qui prolonge la courbe :

$$E_\Gamma(t, 0) \; \equiv \; \Gamma(t),$$

qui effectue un homéomorphisme du rectangle-source sur son image :

$$\boldsymbol{B}_{\rho,\sigma} \; := \; E_\Gamma\big(\square_{\rho,\sigma}\big),$$

qui est $\mathscr{C}^1$ dans le rectangle allongé épointé :

$$\square^*_{\rho,\sigma} := \square_{\rho,\sigma} \Big\backslash \big\{(t_1,0),\dots,(t_{\mathrm{M}},0)\big\},$$

et qui établit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de ce rectangle épointé sur la bande-image épointée :

$$\square^*_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{B}^*_{\rho,\sigma} := \boldsymbol{B}_{\rho,\sigma} \Big\backslash \big\{\Gamma(t_1),\dots,\Gamma(t_{\mathrm{M}})\big\}. \qquad \square$$

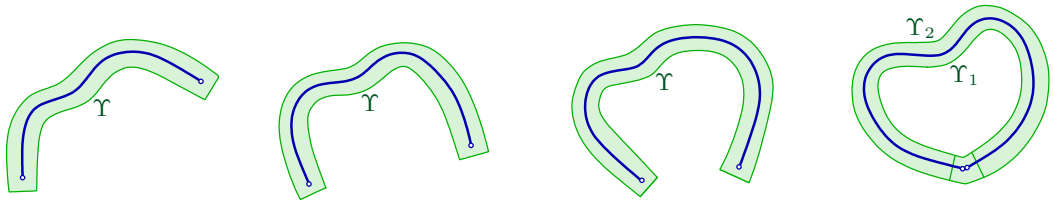
Grâce à cet énoncé, les démonstrations deviennent identiques, en considérant l'ouvert *connexe :*

$$\Upsilon := \boldsymbol{B}_{\rho,\sigma}\backslash\Gamma = E_\Gamma\Big(\square_{\rho,\sigma}\backslash [0,1]\times\{0\}\Big).$$

Théorème 2.11. *Le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ d'un arc $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est toujours* connexe. $\square$

3. Théorème de Jordan pour les contours $\Gamma \subset \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$

Quand l'arc de Jordan Γ se *referme*, *i.e.* quand il revient à son point de départ (sans s'auto-intersecter en route), la géométrie globale change. La courbe devient une « clôture », qui enferme certains moutons (étudiants ?) à l'intérieur d'un enclos.



En effet, l'ouvert qui correspondra à l'ouvert-bande Υ que nous avons considéré dans la section précédente ne sera plus connexe, il consistera en *deux* composantes connexes Υ_1 et Υ_2, lesquelles sont deux demi-bandes situées d'un côté et de l'autre de la courbe Γ. C'est le fait qu'il y ait *deux* composantes connexes distinctes de part et d'autre de Γ qui constituera la raison profonde du célèbre Théorème de Jordan, d'après lequel $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ consiste en exactement *deux* composantes connexes.

Dorénavant, nous supposerons donc que la courbe Γ est *fermée simple*, comme dans la théorie des résidus de Cauchy.

Définition 3.1. Un *contour de Jordan* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ dans $\mathbb{C}$ est une courbe continue fermée simple $\Gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, sauf en un nombre fini $\mathrm{M} \geqslant 0$ de points, à tangente partout non nulle, et sans point de rebroussement.

Puisque Γ est fermée, l'espace naturel de paramétrisation d'un contour de Jordan n'est pas le segment $[0,1]$; c'est plutôt le *cercle unité :*

$$S^1 := \big\{e^{i\theta} \in \mathbb{C}\colon\ \theta \in \mathbb{R}\big\}.$$

Comme dans un cours d'Analyse de Fourier, on identifiera ce cercle à l'ensemble des nombres réels modulo 2π, que l'on notera parfois :

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}\big/2\pi\mathbb{Z},$$

et alors la courbe est une application $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$:

$$\begin{aligned} \Gamma\colon\quad \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \Gamma(\theta). \end{aligned}$$

Ainsi, on suppose donné un nombre $\mathrm{M} \geqslant 0$ de *points de discontinuité* de la dérivée :

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{\mathrm{M}-1} < \theta_{\mathrm{M}} < 2\pi;$$

on suppose que la courbe continue Γ est $\mathscr{C}^1$ sur chacun des M intervalles modulo 2π :

$$\big[\theta_{\mathrm{M}} - 2\pi,\, \theta_1\big], \qquad \big[\theta_1, \theta_2\big], \qquad \ldots \qquad \big[\theta_{\mathrm{M}-1}, \theta_{\mathrm{M}}\big];$$

et on suppose que $\frac{d\Gamma}{d\theta}(\theta) \neq 0$ sur chacun de ces intervalles. Plus précisément, pour tout indice $1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}$, en introduisant :

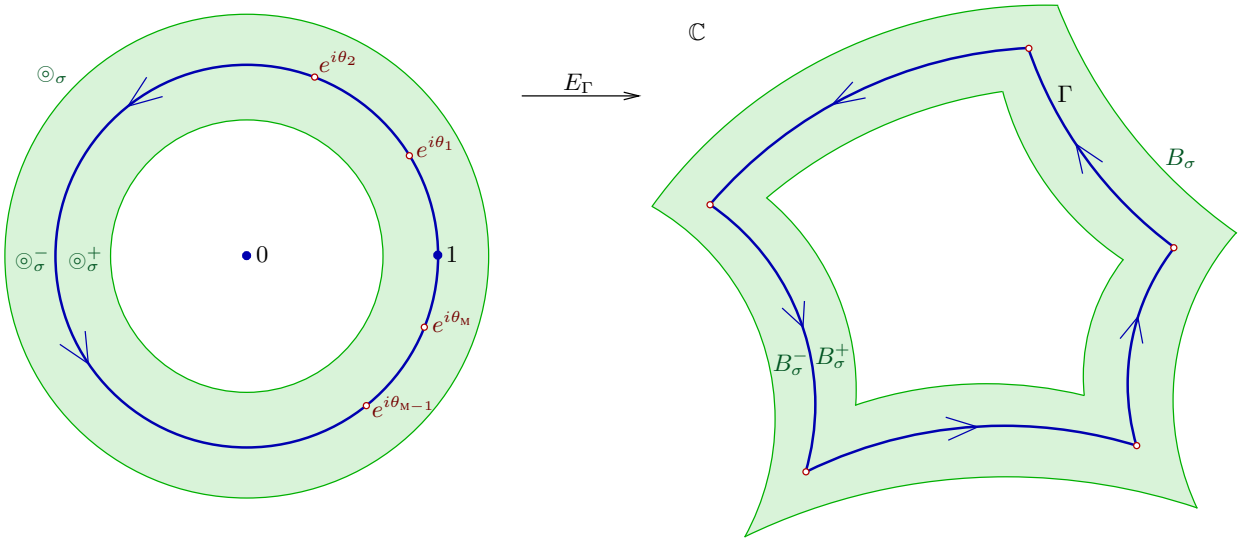
$$\alpha_m := \mathsf{Angle}\Big(\frac{d\Gamma}{d\theta}(\theta_m^-),\ \frac{d\Gamma}{d\theta}(\theta_m^+)\Big),$$

on suppose que les points sont anguleux sans rebroussement :

$$0 < \big|\alpha_m\big| < \pi \qquad (1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}).$$

Ensuite, avec $\sigma > 0$ petit, on introduit l'anneau topologique :

$$\begin{aligned} \circledcirc_\sigma &:= \big\{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\} \times \big\{s \in \,]-\sigma, \sigma[\big\} \\ &= \mathbb{T} \times \,]-\sigma, \sigma\big[. \end{aligned}$$



Proposition 3.2. *Pour $\sigma > 0$ assez petit, il existe une application continue :*

$$\begin{aligned} E_\Gamma : \quad \circledcirc_\sigma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, s) &\longmapsto E_\Gamma(\theta, s), \end{aligned}$$

qui prolonge la courbe :

$$E_\Gamma(\theta, 0) \equiv \Gamma(\theta),$$

qui effectue un homémorphisme de l'anneau-source sur son image :

$$\boldsymbol{B}_\sigma := E_\Gamma\big(\circledcirc_\sigma\big),$$

qui est $\mathscr{C}^1$ dans l'anneau épointé :

$$\circledcirc_\sigma^* := \circledcirc_\sigma \Big\backslash \big\{(\theta_1, 0), \ldots, (\theta_{\mathrm{M}}, 0)\big\},$$

et qui établit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de cet anneau épointé sur la bande-image épointée :

$$\circledcirc_\sigma^* \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{B}_\sigma^* := \boldsymbol{B}_\sigma \Big\backslash \big\{\Gamma(\theta_1), \ldots, \Gamma(\theta_{\mathrm{M}})\big\}. \qquad \square$$

Nous en admettrons la démonstration, en tous points analogue à celle de la Proposition 2.10. Comme nous l'avons anticipé, le complémentaire du cercle unité dans cet anneau :

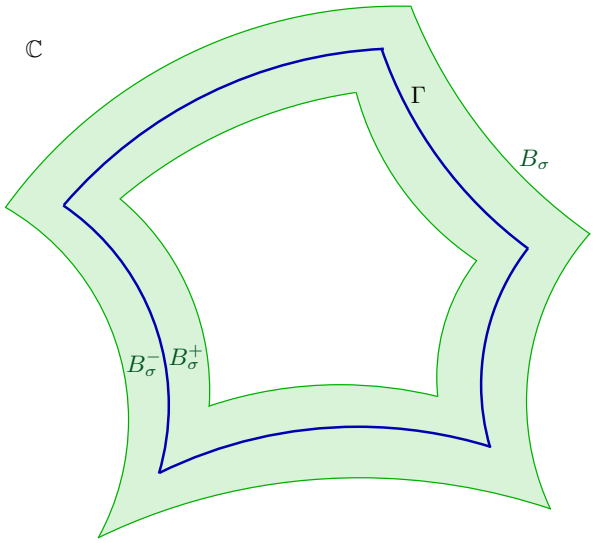
$$\circledcirc_\sigma \big\backslash \, \mathbb{T} \times \{0\} \;=\; \circledcirc_\sigma^+ \cup \circledcirc_\sigma^-$$

consiste en deux anneaux connexes, intérieur $\circledcirc_\sigma^+$ et extérieur $\circledcirc_\sigma^-$ au cercle central $\mathbb{T} \times \{0\}$. Les images des trois anneaux $\circledcirc_\sigma$, $\circledcirc_\sigma^+$, $\circledcirc_\sigma^-$, par l'homéomorphisme E_Γ sont alors trois « anneaux ondulés » dans $\mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{B}_\sigma \;:=\; E_\Gamma\big(\circledcirc_\sigma\big), \qquad \boldsymbol{B}_\sigma^+ \;:=\; E_\Gamma\big(\circledcirc_\sigma^+\big), \qquad \boldsymbol{B}_\sigma^- \;:=\; E_\Gamma\big(\circledcirc_\sigma^-\big),$$

En particulier, $\boldsymbol{B}_\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma^+, \boldsymbol{B}_\sigma^-$ sont connexes, et on a :

$$\boldsymbol{B}_\sigma \backslash \Gamma \;=\; \boldsymbol{B}_\sigma^+ \cup \boldsymbol{B}_\sigma^-.$$



Théorème 3.3. [Contours de Jordan $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$] *Étant donné un contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$, le complémentaire :*

$$\mathbb{C} \backslash \Gamma \;=\; \omega \cup \Omega_\infty,$$

consiste en exactement deux *composantes connexes ouvertes disjointes :*

- $\omega \subset \mathbb{C}$ *ouvert* borné*, avec* $\overline{\omega} = \omega \cup \Gamma$*;*
- $\Omega_\infty \subset \mathbb{C}$ *ouvert* non borné *allant vers l'infini, avec* $\overline{\Omega}_\infty = \Omega_\infty \cup \Gamma$.

Dans le chapitre consacré à la théorie de Cauchy, nous avons noté :

$$\mathbb{C} \;=\; \Gamma_{\mathsf{int}} \cup \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{ext}},$$

ce qui veut dire que nous admettons les coïncidences notationnelles :

$$\omega \;\equiv\; \Gamma_{\mathsf{int}}, \qquad \Omega_\infty \;\equiv\; \Gamma_{\mathsf{ext}}.$$

Démonstration. Commençons par des préliminaires topologiques. Décomposons en composantes connexes :

$$\mathbb{C} \backslash \Gamma \;=\; \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha.$$

Ici, on doit donc montrer que $\mathsf{Card}\, A \;=\; 2$. Auparavant, pour un *arc* de Jordan, c'était $\mathsf{Card}\, A = 1$.

Assertion 3.4. *Toute composante connexe (ouverte) ω_α de $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ intersecte $\boldsymbol{B}_\sigma^+$ ou $\boldsymbol{B}_\sigma^-$.*

Preuve. Soit ω_α quelconque. Comme dans la démonstration du Théorème 2.6, *cf.* le Lemme 2.7, nous savons que :

$$\emptyset \neq \overline{\omega}_\alpha \cap \Gamma,$$

donc il existe des points $q \in \omega_\alpha \subset \mathbb{C}\backslash\Gamma$ arbitrairement proches de Γ. De tels points sont alors contenus dans la bande $\boldsymbol{B}_\sigma$, puisque cette bande constitue un voisinage ouvert de Γ. Ainsi on a bien :

$$q \in \boldsymbol{B}_\sigma\backslash\Gamma = \boldsymbol{B}_\sigma^+ \cup \boldsymbol{B}_\sigma^-. \qquad \square$$

Assertion 3.5. *Toute composante connexe ω_α de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ satisfait :*

(1) $\omega_\alpha \supset \boldsymbol{B}_\sigma^+$ *ou* $\omega_\alpha \supset \boldsymbol{B}_\sigma^-$ *;*

(2) $\overline{\omega}_\alpha \supset \Gamma$.

Preuve. **(1)** Quand $\omega_\alpha \cap \boldsymbol{B}_\sigma^+ \neq \emptyset$ comme plus haut, puisque $\boldsymbol{B}_\sigma^+$ est $\mathscr{C}^1$-difféomorphe à l'anneau connexe $\circledcirc_\sigma^+$, donc est connexe, nous avons nécessairement $\boldsymbol{B}_\sigma^+ \subset \omega_\alpha$ par maximalité d'une composante connexe.

Quand $\omega_\alpha \cap \boldsymbol{B}_\sigma^- \neq \emptyset$, on a symétriquement $\boldsymbol{B}_\sigma^- \subset \omega_\alpha$.

(2) Dans chacun des deux cas, comme chaque demi-bande satisfait clairement à travers l'homéomorphisme E_Γ :

$$\overline{\boldsymbol{B}}_\sigma^+ \supset \Gamma \qquad \text{ou} \qquad \overline{\boldsymbol{B}}_\sigma^- \supset \Gamma,$$

nous obtenons bien :

$$\overline{\omega}_\alpha \supset \overline{\boldsymbol{B}}_\sigma^+ \supset \Gamma \qquad \text{ou} \qquad \overline{\omega}_\alpha \supset \overline{\boldsymbol{B}}_\sigma^- \supset \Gamma. \qquad \square$$

Attention ! Nous ne sommes pas encore en mesure d'affirmer que les deux circonstances :

$$\omega_\alpha \supset \boldsymbol{B}_\sigma^+ \qquad \text{ou} \qquad \omega_\alpha \supset \boldsymbol{B}_\sigma^-,$$

sont *mutuellement exclusives*, puisqu'il pourrait fort bien se produire qu'une composante connexe ω_α contienne ces *deux* demi-bandes $\boldsymbol{B}_\sigma^+$ et $\boldsymbol{B}_\sigma^-$. En tout cas :

Assertion 3.6. *Sous les hypothèses du Théorème 3.3, le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ consiste en* au plus 2 *composantes connexes ouvertes.*

Preuve. S'il y en avait 3 distinctes, ω_α, $\omega_{\alpha'}$, $\omega_{\alpha''}$, disjointes par définition, au moins deux d'entre elles, disons ω_α et $\omega_{\alpha'}$, intersecteraient la *même* demi-bande connexe, donc par maximalité devraient coïncider — contradiction ! $\square$

À ce stade, le contenu principal du Théorème 3.3 de Jordan pour les contours $\Gamma \subset \mathbb{C}$, c'est qu'il y a *vraiment exactement* 2 composantes connexes, c'est-à-dire que :

$$\mathsf{Card}\, A = 2.$$

En tout cas, comme $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est borné, la composante connexe $\Omega_\infty \neq \emptyset$ non bornée de son complémentaire existe. Il s'agit donc d'établir qu'il existe une *autre* composante connexe (nécessairement bornée) ω de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$. C'est à cette tâche qu'est consacrée la prochaine section. $\square$

4. Démonstration par l'argument de saut d'indice

Il faut donc trouver un critère permettant de distinguer précisément les deux composantes connexes en question. Alors le concept d'*indice* vient à la rescousse.

Rappelons qu'étant donné une courbe $\gamma \subset \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée — mais pas forcément simple —, tout point $w \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ de son complémentaire possède un *indice :*

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \,:=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

Dans le chapitre consacré au théorème des résidus, nous avons établi des propriétés fondamentales que nous ré-écrivons ici dans le cas qui nous intéresse où $\gamma := \Gamma$ est un *contour de Jordan*.

(P1) $\mathsf{Ind}_\Gamma(w) \in \mathbb{Z}$ pour tout $w \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$.

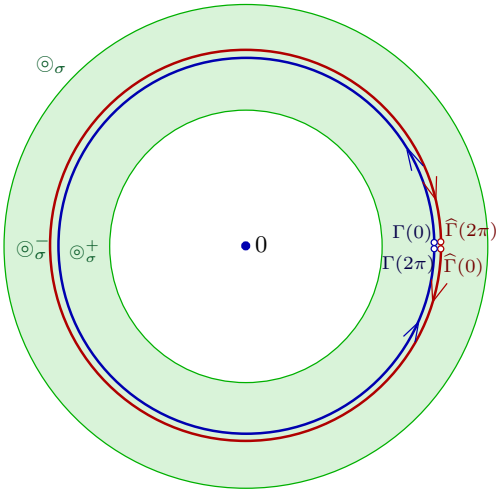
(P2) L'application $w \longmapsto \mathsf{Ind}_\Gamma(w)$ est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

(P3) $\mathsf{Ind}_\Gamma(w) = 0$ pour tout $w \in \Omega_\infty$, l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

Grâce à cet invariant numérique, nous pouvons caractériser de manière plus satisfaisante les deux composantes connexes ω et Ω_∞ de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ dont le Théorème 3.3 de Jordan affirme l'existence.

Tout d'abord, puisque nous savons que Ω_∞ existe, puis grâce à l'Assertion 3.5 que $\Omega_\infty \supset \boldsymbol{B}^+_\sigma$ ou que $\Omega_\infty \supset \boldsymbol{B}^-_\sigma$, nous allons fixer les idées concernant ces deux éventualités.

Si $\Omega_\infty \supset \boldsymbol{B}^-_\sigma$, on ne change rien.



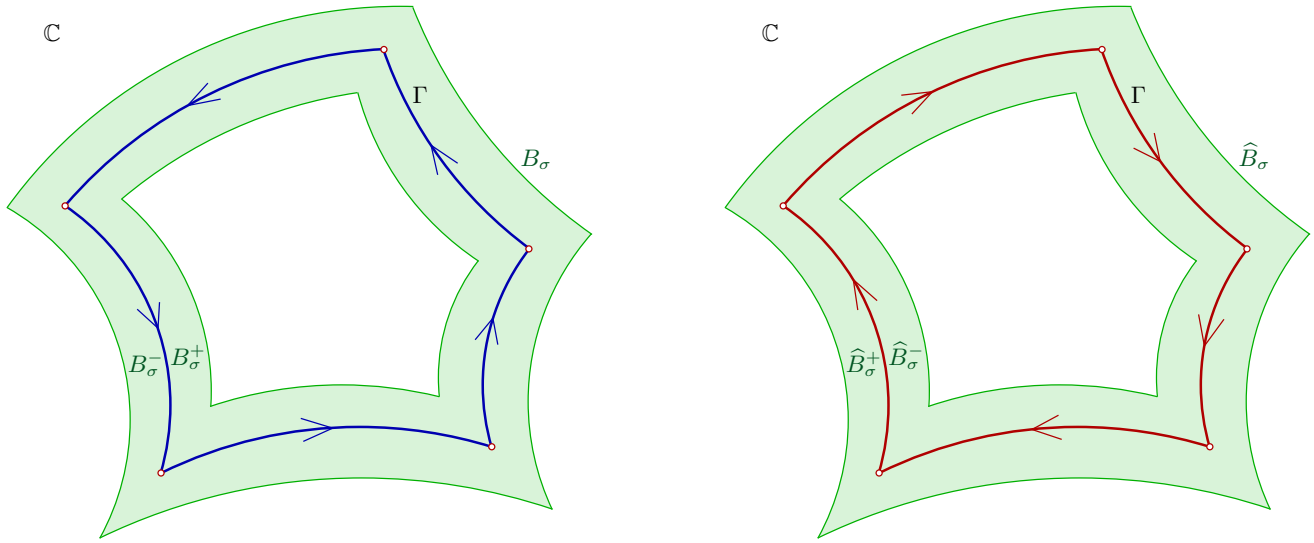
Mais si $\Omega_\infty \supset \boldsymbol{B}^+_\sigma$, on inverse le sens de parcours du contour Γ, en introduisant :

$$\widehat{\Gamma}(\theta) \,:=\, \Gamma\big(2\pi-\theta\big) \qquad (\forall\,\theta\in\mathbb{T}).$$

Nous affirmons que les deux demi-bandes sont alors *permutées* au sens où :

$$\widehat{\boldsymbol{B}}^-_\sigma \,=\, \boldsymbol{B}^+_\sigma;$$

pour s'en convaincre, rien de tel qu'une belle petite figurette !



On peut aussi, dans le cas plus simple où Γ est supposé $\mathscr{C}^\infty$, revenir à la définition naturelle d'une application d'épaississement que nous avons donnée pour les arcs de Jordan, définition qui devient ici pour un *contour* (fermé) de Jordan :

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\Gamma}}\big(\theta, s\big) &= \widehat{\Gamma}(\theta) + s\, i\, \tfrac{d\widehat{\Gamma}}{d\theta}(\theta) \\ &= \Gamma\big(2\pi - \theta\big) - s\, i\, \tfrac{d\Gamma}{d\theta}\big(2\pi - \theta\big), \end{aligned}$$

avec un signe « $-$ » après dérivation devant le paramètre d'épaississement s — signe provenant de l'inversion du sens de parcours —, ce qui signifie que l'ouvert Ω_∞ qui était « à gauche » quand on parcourt Γ devient « à droite » quand on parcourt $\widehat{\Gamma}$.

Ceci justifie de supposer toujours $\Omega_\infty \supset \boldsymbol{B}_\sigma^-$. L'énoncé technique et précis suivant terminera la démonstration du Théorème 3.3.

Théorème 4.1. *Soit un contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$, soit une bande ouverte $\boldsymbol{B}_\sigma \supset \Gamma$ homéomorphe à l'anneau $\mathbb{T}\times\,]-\sigma, \sigma[$ avec $\sigma > 0$ petit, scindée par Γ en deux demi-bandes :*

$$\boldsymbol{B}_\sigma = \boldsymbol{B}_\sigma^+ \cup \Gamma \cup \boldsymbol{B}_\sigma^-,$$

avec $\boldsymbol{B}_\sigma^- \subset \Omega_\infty$. Alors :

(1) $\mathsf{Ind}_\Gamma(w) = 0$ *pour tout* $w \in \boldsymbol{B}_\sigma^-$ *;*

(2) $\mathsf{Ind}_\Gamma(w) = 1$ *pour tout* $w \in \boldsymbol{B}_\sigma^+$ *;*

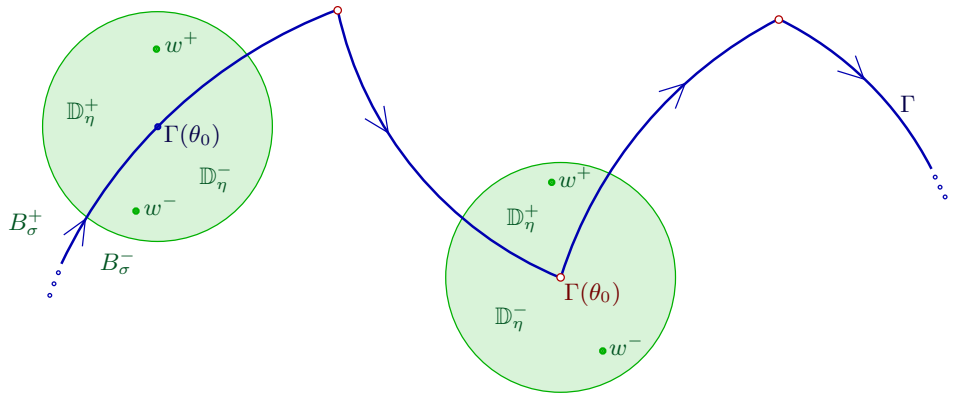
(3) *l'ensemble* $\omega := \mathbb{C}\backslash\big(\Gamma \cup \Omega_\infty\big)$ *est connexe, et de plus :*

$$\mathbb{C}\backslash\big(\Gamma \cup \Omega_\infty\big) = \big\{w \in \mathbb{C}\backslash\Gamma\colon\ \mathsf{Ind}_\Gamma(w) = 1\big\}.$$

Démonstration. Nous savons par **(P3)** que **(1)** est vraie.

Le point-clé est d'établir **(2)**, qui confirmera que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ possède exactement 2 composantes connexes, puisque $\boldsymbol{B}_\sigma^+ \neq \emptyset$, puisque l'indice est constant dans les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, et puisque nous savons déjà que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ consiste en au plus 2 composantes connexes.

Alors **(3)** découlera logiquement de toutes ces propriétés. En définitive, il s'agit surtout de démontrer **(2)**. Nous allons le faire par la *méthode du saut d'indice.*



Pour commencer, soit $\Gamma\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ notre contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan. Il est géométriquement clair qu'en tout point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, il existe un rayon $\eta > 0$ tel que :

$$\mathbb{D}_\eta\big(\Gamma(\theta_0)\big)\Big\backslash \Gamma$$

consiste en exactement 2 composantes connexes, que nous noterons $\mathbb{D}_\eta^+$, à gauche, et $\mathbb{D}_\eta^-$, à droite. Comme le montre la figure, cette propriété est vraie y compris lorsque $\theta_0 = \theta_m$, avec $1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}$, est un point anguleux.

Proposition 4.2. [Principale] *Pour tout point $w^- \in \mathbb{D}_\eta^-$ et tout point $w^+ \in \mathbb{D}_\eta^+$, on a :*

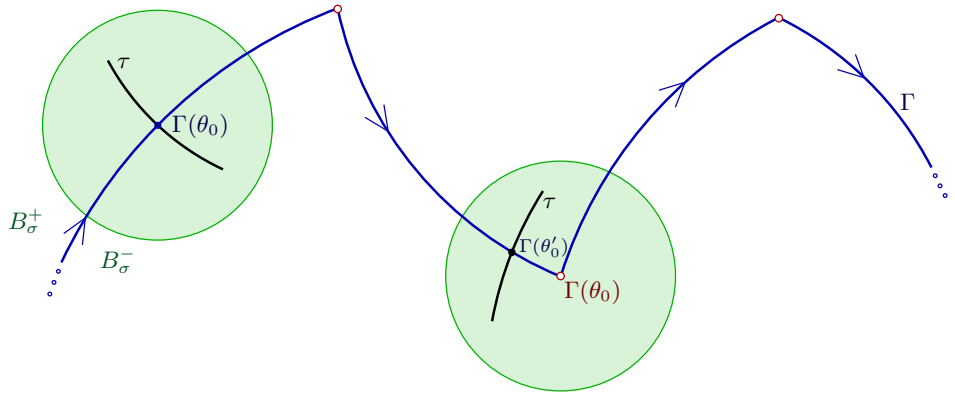
$$\mathsf{Ind}_\Gamma\big(w^+\big) - \mathsf{Ind}_\Gamma\big(w^-\big) \,=\, 1.$$

Autrement dit, l'indice « saute » d'une unité quand on traverse Γ. En admettant temporairement cet énoncé, terminons l'argumentation, *i.e.* terminons la démonstration du point **(2)** du Théorème 4.1.

Avec $\eta > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_\eta^- \subset \boldsymbol{B}_\sigma^- \subset \Omega_\infty$, on sait que $\mathsf{Ind}_\Gamma\big|_{B_\sigma^-} \equiv 0$, et on obtient donc bien en appliquant cette proposition principale :

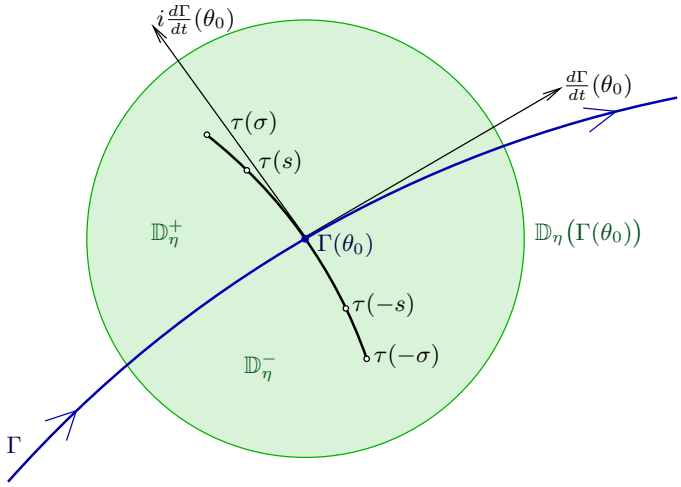
$$\mathsf{Ind}_\Gamma\big(w^+\big) - 0 \,=\, 1,$$

pour tout $w^+ \in \mathbb{D}_\eta^+ \subset \boldsymbol{B}_\sigma^+$, et comme $\mathsf{Ind}_\Gamma(\bullet)$ est constant dans les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, on obtient bien $\mathsf{Ind}_\Gamma\big|_{B_\sigma^+} \equiv 1$. Ainsi, **(2)** du Théorème 4.1 sera démontré grâce à cette Proposition 4.2. $\square$



Démonstration de la Proposition 4.2. Maintenant, afin de traiter simultanément les deux cas où $\Gamma(\theta_0)$ avec $\theta_0 \in \mathbb{T}\backslash\big\{\theta_1, \ldots, \theta_{\mathrm{M}}\big\}$ est un point $\mathscr{C}^1$ lisse et le cas où $\theta_0 = \theta_m$ correspond à un point anguleux, lorsque $\theta_0 = \theta_m$, nous pouvons changer légèrement de point

$\theta_0 \rightsquigarrow \theta_0'$ avec $\theta_0' \neq \theta_1, \ldots, \theta_{\mathrm{M}}$, ce qui est possible puisque nous savons que $\mathsf{Ind}_\Gamma(\bullet)$ est constant dans $\mathbb{D}_\eta^-$ et dans $\mathbb{D}_\eta^+$.



Soit donc $\theta_0 \neq \theta_1, \ldots, \theta_{\mathrm{M}}$. Puisque Γ est $\mathscr{C}^1$ au voisinage de θ_0, on peut construire une petite courbe locale τ transversale à Γ passant par le point $\Gamma(\theta_0)$ en lequel la tangente à Γ est bien définie, par exemple :

$$\tau(s) \,:=\, \Gamma\big(\theta_0\big) + s\, i\, \tfrac{d\Gamma}{d\theta}\big(\theta_0\big),$$

avec $s \in \,]-\sigma, \sigma[$, où $\sigma > 0$ est très petit. Clairement :

$$\tau\big(]-\sigma, 0[\big) \,\subset\, \mathbb{D}_\eta^- \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \tau\big(]0, \sigma[\big) \,\subset\, \mathbb{D}_\eta^+.$$

Il nous suffit donc de démontrer que :

$$\mathsf{Ind}_\Gamma\big(\tau(s)\big) - \mathsf{Ind}_\Gamma\big(\tau(-s)\big) \,=\, 1 \qquad\qquad (\forall\, 0 < s < \sigma).$$

Pour les arguments qui vont suivre, il importe que $\Gamma(\theta_0)$ soit un point lisse de la courbe, mais le fait que Γ n'ait aucune auto-intersection ne compte pas. C'est pourquoi nous élaborons un dernier énoncé qui achèvera la démonstration. □

Théorème 4.3. *Soit* $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée* $\gamma(1) = \gamma(0)$*, soit* $t_0 \in \,]0,1[$ *un point* $\mathscr{C}^1$ *lisse en lequel la tangente existe,* i.e. *où* $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) \neq 0$*, et soit la courbe locale transversale :*

$$\tau(s) \,:=\, \gamma(t_0) + s\, i\, \tfrac{d\gamma}{dt}(t_0) \qquad\qquad (t \in \,]-\sigma, \sigma[),$$

avec $\sigma > 0$ *assez petit pour que :*

$$\tau(s) \,\in\, \mathbb{C}\backslash\gamma \qquad\qquad (\forall\, 0 < |s| < \sigma).$$

Alors l'indice saute d'une unité à la traversée :

$$\mathsf{Ind}_\gamma\big(\tau(s)\big) - \mathsf{Ind}_\gamma\big(\tau(-s)\big) \,=\, 1 \qquad\qquad (\forall\, 0 < s < \sigma).$$

Démonstration. Par connexité (par arcs), il est clair que $\tau\big(]-\sigma, 0[\big)$ et $\tau\big(]0, \sigma[\big)$ sont chacun contenus dans une unique composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\gamma$. En abrégeant alors :

$$\Delta(s) \,:=\, \mathsf{Ind}_\gamma\big(\tau(s)\big) - \mathsf{Ind}_\gamma\big(\tau(-s)\big),$$

les propriétés **(P1)** et **(P2)** rappelées plus haut impliquent que cette fonction-différence $\Delta(s)$ est *constante*, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que :

$$\lim_{s \underset{>}{\to} 0} \Delta(s) \,=\, 1,$$

ce qui conclura.

Pour commencer, avec $0 < s < \sigma$, écrivons :

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= \mathsf{Ind}_\gamma\big(\tau(s)\big) - \mathsf{Ind}_\gamma\big(\tau(-s)\big) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(\frac{dz}{z-\tau(s)} - \frac{dz}{z-\tau(-s)}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(\frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t)-\gamma(t_0)-i\,s\,\gamma'(t_0)} - \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t)-\gamma(t_0)+i\,s\,\gamma'(t_0)}\right),
\end{aligned}$$

et donc, il nous faut simplifier cette différence de noyaux de Cauchy. À cet effet, introduisons la notation :

$$\begin{aligned}
I(t,s) &:= \left(\frac{1}{\gamma(t)-\gamma(t_0)-i\,s\,\gamma'(t_0)} - \frac{1}{\gamma(t)-\gamma(t_0)+i\,s\,\gamma'(t_0)}\right)\gamma'(t) \\
&= \frac{2i\,s\,\gamma'(t_0)\,\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-\gamma(t_0)\big)^2 + s^2\,\big(\gamma'(t_0)\big)^2},
\end{aligned}$$

effectuons deux développements de Taylor :

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \gamma'(t_0) + \mathsf{o}(t-t_0), \\
\gamma(t)-\gamma(t_0) &= (t-t_0)\,\big(\gamma'(t_0) + \mathsf{o}(t-t_0)\big),
\end{aligned}$$

où par définition :

$$\mathsf{o}(t-t_0) = \text{fonction de } t-t_0 \text{ qui tend vers } 0 \text{ quand } t \longrightarrow t_0.$$

Observation 4.4. *Pour toute constante C et toute fonction bornée ψ, on a :*

$$C\cdot\mathsf{o}(t-t_0) + \psi\cdot\mathsf{o}(t-t_0) = \mathsf{o}(t-t_0). \qquad \square$$

Alors insérons, en abrégeant simplement par o le reste :

$$I(t,s) = \frac{2i\,s\,\gamma'(t_0)\,\big[\gamma'(t_0)+\mathsf{o}\big]}{\big[(t-t_0)\,\big(\gamma'(t_0)+\mathsf{o}\big)\big]^2 + s^2\,\big(\gamma'(t_0)\big)^2}.$$

Si nous développons $\big(\gamma'(t_0)+\mathsf{o}\big)^2 = \big(\gamma'(t_0)\big)^2 + \mathsf{o}$, avec l'hypothèse $\gamma'(t_0) \neq 0$, nous observons que le terme $\big(\gamma'(t_0)\big)^2$ disparaît au numérateur et au dénominateur, d'où :

$$I(t,s) = 2i\,s\,\frac{1+\mathsf{o}(t-t_0)}{(t-t_0)^2\,\big(1+\mathsf{o}(t-t_0)\big)+s^2}.$$

Quand le reste est nul, on trouve $\frac{2i\,s}{(t-t_0)^2+s^2}$, donc avec une certaine fonction-reste, nous pouvons écrire :

$$I(t,s) = \frac{2i\,s}{(t-t_0)^2+s^2} + R(t,s),$$

et afin de contrôler ce reste, estimons-le :

$$\begin{aligned}
\frac{R(t,s)}{2i\,s} &= \frac{1+\mathsf{o}}{(t-t_0)^2\,(1+\mathsf{o})+s^2} - \frac{1}{(t-t_0)^2+s^2} \\
&= \frac{1}{(t-t_0)^2(1+\mathsf{o})+s^2}\left\{\frac{(1+\mathsf{o})[(t-t_0)^2+s^2]-(t-t_0)^2(1+\mathsf{o})-s^2}{(t-t_0)^2+s^2}\right\} \\
&= \frac{1}{(t-t_0)^2(1+\mathsf{o})+s^2}\left\{\frac{\mathsf{o}\,[(t-t_0)^2+s^2]}{(t-t_0)^2+s^2} - \frac{(t-t_0)^2\,\mathsf{o}}{(t-t_0)^2+s^2}\right\} \\
[0 \leqslant \psi \leqslant 1] \qquad &= \frac{1}{(t-t_0)^2(1+\mathsf{o})+s^2}\left\{\mathsf{o}\cdot 1 - \psi\cdot\mathsf{o}\right\} \\
&= \frac{\mathsf{o}}{(t-t_0)^2(1+\mathsf{o})+s^2}
\end{aligned}$$

ce qui, grâce à ces simplifications favorables, nous donne :

$$R(t,s) \;=\; \mathsf{o}(t-t_0)\cdot\frac{2i\,s}{(t-t_0)^2\,\big(1+\mathsf{o}(t-t_0)\big)+s^2}.$$

Maintenant, toujours avec $0 < s < \sigma$, nous pouvons aisément majorer :

$$\begin{aligned}
\big|R(t,s)\big| &\leqslant \mathsf{o}\big(|t-t_0|\big)\,\frac{2\,s}{(t-t_0)^2\,\big[1-\mathsf{o}\big(|t-t_0|\big)\big]+s^2} \\
&\leqslant \mathsf{o}\big(|t-t_0|\big)\,\frac{2\,s}{(t-t_0)^2\,\big[1-\frac{1}{2}\big]+\frac{1}{2}\,s^2} \\
&= \mathsf{o}\big(|t-t_0|\big)\,\frac{s}{(t-t_0)^2+s^2}.
\end{aligned}$$

De tout ce travail de calcul fort ingrat, nous déduisons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\Big(|t-t_0| \leqslant \delta, \quad 0 \,<\, s \,<\, \sigma\Big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \Big(\big|R(t,s)\big| \,\leqslant\, \varepsilon\,\frac{s}{(t-t_0)^2+s^2}\Big).$$

Ensuite, en revenant à notre intégrale, nous pouvons la décomposer :

$$\begin{aligned}
\Delta(s) \;=\; &\frac{1}{2i\pi}\int_{|t-t_0|\geqslant\delta}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\gamma(t_0)-i\,s\,\gamma'(t_0)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\gamma(t_0)+i\,s\,\gamma'(t_0)}\right)dt + \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{|t-t_0|<\delta}\left(\frac{2i\,s}{(t-t_0)^2+s^2} + R(t,s)\right)dt.
\end{aligned}$$

La première intégrale tend vers 0 quand $s \xrightarrow{>} 0$. Dans la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable $t - t_0 = s\,u$, d'où $dt = s\,du$, et on observe qu'elle devient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\delta/s}^{\delta/s}\frac{du}{u^2+1} \;&=\; \frac{1}{\pi}\Big[\arctan u\Big]_{-\delta/s}^{\delta/s} \\
&\underset{s\to 0}{\longrightarrow}\; 1.
\end{aligned}$$

Enfin, grâce à la majoration douloureuse du reste, on « écrase » la troisième :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{|t-t_0|<\delta} R(t,s)\,dt\right| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta/s}^{\delta/s}\frac{du}{u^2+1}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant $s \overset{>}{\longrightarrow} 0$, nous obtenons :

$$\big|\Delta - 1\big| \leqslant 0 + \tfrac{\varepsilon}{2},$$

et comme Δ est un entier, on a bien $\Delta = 1$, car $\varepsilon > 0$ était arbitraire. □

5. Théorème de Cauchy-Jordan pour les fonctions holomorphes

Nous venons d'obtenir que le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Gamma = \omega \cup \Omega_\infty$ d'un contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$ consiste en exactement deux composantes connexes ouvertes, ω bornée, Ω_∞ non bornée, et donc le plan complexe tout entier s'écrit comme réunion disjointe :

$$\mathbb{C} = \omega \cup \Gamma \cup \Omega_\infty.$$

Théorème 5.1. *Le fermé $\mathbb{C}\backslash\omega$ est connexe. De plus, ω est holomorphiquement simplement connexe.*

Démonstration. La connexité de $\mathbb{C}\backslash\omega$ peut être établie à l'aide de simples arguments topologiques. Par l'absurde, supposons que ce fermé :

$$\mathbb{C}\backslash\omega = F_1 \cup F_2,$$

soit réunion de 2 fermés disjoints non vides. Introduisons les 2 ensembles *disjoints :*

$$\mathscr{O}_1 := F_1 \cap \Omega_\infty \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}_2 := F_2 \cap \Omega_\infty,$$

qui recouvrent l'ouvert connexe Ω_∞, puisque :

$$\Omega_\infty = \big(\mathbb{C}\backslash\omega\big) \cap \Omega_\infty = \big[F_1 \cap \Omega_\infty\big] \cup \big[F_2 \cap \Omega_\infty\big] = \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2.$$

Pour atteindre une contradiction, commençons par une

Assertion 5.2. *$\mathscr{O}_1 \neq \emptyset$ et $\mathscr{O}_2 \neq \emptyset$.*

Preuve. Si par exemple on avait $\emptyset = \mathscr{O}_1 = F_1 \cap \Omega_\infty$, c'est-à-dire si on avait $F_1 \subset \Gamma \cup \omega$, comme $F_1 \subset \mathbb{C}\backslash\omega$, on aurait $F_1 \subset \Gamma$. De plus, comme :

$$\Omega_\infty = \emptyset \cup \mathscr{O}_2 = \mathscr{O}_2 = F_2 \cap \Omega_\infty,$$

on aurait nécessairement :

$$\Omega_\infty \subset F_2.$$

Ensuite, soit un point quelconque $z_1 \in F_1$, d'où $z_1 \in \Gamma$. D'après le Théorème 3.3 de Jordan que nous avons démontré, pour tout $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ avec $n \geqslant 1$ entier, le disque $\mathbb{D}_{\frac{1}{n}}(z_1)$ intersecte à la fois ω et $\Omega_\infty \subset F_2$. Donc il existe une suite $\big\{z_2^n\big\}_{n=1}^\infty$ de points $z_2^n \in F_2$ avec $\big|z_1 - z_2^n\big| \leqslant \frac{1}{n}$, d'où :

$$z_2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_1,$$

et enfin $z_1 \in F_2$, par fermeture de F_2. Mais ceci contredit effrontément l'hypothèse $F_2 \cap F_1 = \emptyset$! Donc $\mathscr{O}_1 \neq \emptyset$, comme voulu.

Par symétrie, on démontre de même que $\mathscr{O}_2 \neq \emptyset$. □

Assertion 5.3. *$\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit à nouveau un point quelconque $z_1 \in \mathscr{O}_1 = F_1 \cap \Omega_\infty$, d'où $z_1 \in \Omega_\infty$. Comme Ω_∞ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ avec $\mathbb{D}_\varepsilon(z_1) \subset \Omega_\infty$.

Si d'aventure pour tout $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ avec $n \geqslant 1$ entier, le disque $\mathbb{D}_{\frac{1}{n}}(z_1) \cap F_2 \neq \emptyset$ rencontrait F_2, comme F_2 est fermé, on en déduirait à nouveau que $z_1 \in F_2$, ce qui n'est pas possible, car $F_2 \cap F_1 = \emptyset$.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_\varepsilon(z_1) \cap F_2 = \emptyset$, d'où :

$$\mathbb{D}_\varepsilon(z_1) \cap \mathscr{O}_2 \,=\, \emptyset,$$

ce qui implique, grâce à $\mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2 = \Omega_\infty$, que :

$$\mathbb{D}_\varepsilon(z_1) \,\subset\, \mathscr{O}_1.$$

Ainsi, $\mathscr{O}_1$ est ouvert.

De même, par symétrie, $\mathscr{O}_2$ est ouvert. □

En conclusion, on a représenté l'ouvert *connexe* $\Omega_\infty = \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$ comme réunion de 2 ouverts non vides disjoints — contradiction ! Donc $\mathbb{C}\backslash\omega$ est bien connexe, comme annoncé.

Ensuite, rappelons que, d'après le chapitre consacré à la théorie de Cauchy et aux théorèmes de Runge, ceci implique, pour tout $\delta > 0$, la connexité de :

$$\mathbb{C}\big\backslash L_\delta,$$

où L_δ est le compact de l'ouvert borné ω défini par :

$$L_\delta \,:=\, \big\{z \in \omega\colon\ \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\omega\big) \geqslant \delta\big\},$$

et que ensuite, le théorème de Runge assure que les fonctions holomorphes dans ω sont approximables uniformément sur tout compact $K \subset \omega$ par des polynômes de $\mathbb{C}[z]$, sachant que chaque K est contenu dans un certain L_δ pour $\delta > 0$ assez petit.

Enfin, rappelons aussi que cette propriété d'approximabilité uniforme implique aisément les annulations de Cauchy :

$$0 \,=\, \int_\gamma f(z)\,dz \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\omega)),$$

sur toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \omega$.

Ceci signifie que ω est *holomorphiquement simplement connexe*, comme cela a été défini à la fin du chapitre consacré aux séries de Laurent. □

Toutefois, il faudra encore attendre le prochain chapitre pour être en mesure de déduire, à l'aide du théorème de Riemann conforme qui est un résultat profond et avancé, que ceci implique *in fine* que ω est simplement connexe, comme on devrait s'en douter.

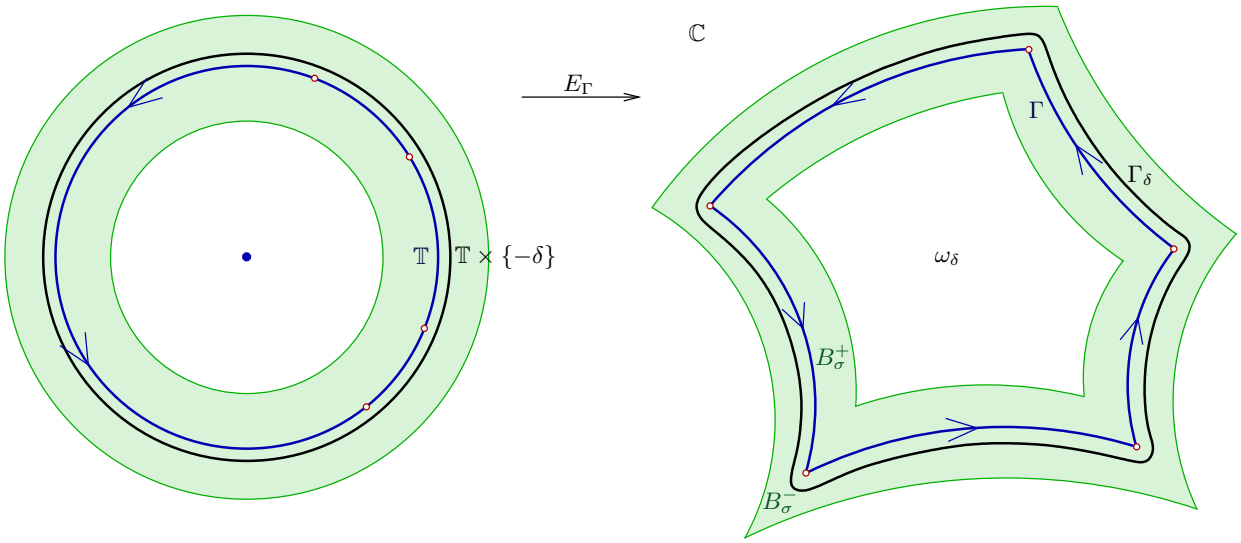
Maintenant que nous savons que ω est holomorphiquement simplement connexe, nous pouvons enfin établir complètement le célèbre *Théorème de Cauchy-Jordan* que presque tous les cours de Licence 3 dans le monde n'ont pas le temps de présenter dans tous ses détails au tableau.

Théorème 5.4. [de Cauchy-Jordan] *Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée simple, alors pour toute fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma_{\mathsf{int}} \cup \Gamma$ qui contient l'adhérence de la composante bornée Γ_{int}, on a :*

$$0 \,=\, \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

Rappelons que nous admettons les coïncidences notationnelles :

$$\omega \equiv \Gamma_{\mathsf{int}} \qquad \text{et} \qquad \Omega_\infty \equiv \Gamma_{\mathsf{ext}}.$$



Démonstration. Reprenons l'application d'épaississement dont nous nous sommes amplement servis dans la Section **3** :

$$\circledcirc_\sigma \xrightarrow{E_\Gamma} \boldsymbol{B}_\sigma \supset \Gamma.$$

Choisissons $\delta > 0$ avec $0 < \delta < \sigma$ très proche de 0, et considérons le cercle extérieur $\mathbb{T} \times \{-\delta\}$ ainsi que son image :

$$\Gamma_\delta := E_\Gamma\big(\mathbb{T} \times \{-\delta\}\big).$$

Il est clair que $\Gamma_\delta \subset \Omega_\infty$ se trouve à l'*extérieur* de notre contour Γ, et qu'il est « essentiellement parallèle » à Γ.

Maintenant, si $\delta > 0$ est assez petit, on assure de plus que Γ_δ est contenu dans l'ouvert $\Omega \supset \omega \cup \Gamma$ dans lequel on considère des fonctions holomorphes $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ — ouvert qui ne doit pas être confondu avec Ω_∞ !

De plus, Γ_δ est un contour de Jordan $\mathscr{C}^1$, sans points anguleux (!), simplement parce que $\mathbb{T} \times \{-\delta\}$ est contenu dans l'ouvert :

$$\circledcirc_\sigma^* \supset \circledcirc_\sigma \backslash \mathbb{T} \times \{0\}$$

dans lequel nous savons, d'après la Proposition 2.10, que Γ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur son image.

Alors le Théorème 3.3 de Jordan s'applique ! C'est magique ! Il garantit que :

$$\mathbb{C} \backslash \Gamma_\delta = \omega_\delta \cup \Omega_{\delta,\infty}$$

se décompose en exactement deux composantes connexes ouvertes, avec ω_δ bornée. Pour des raisons d'orientation et grâce à notre choix du cercle $\mathbb{T} \times \{-\delta\}$ avec $-\delta < 0$, il est alors clair que :

$$\Gamma \cup \omega \subset \omega_\delta.$$

De plus, le Théorème 5.1 vient d'établir que ω_δ est holomorphiquement simplement connexe. Par conséquent, toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ a une restriction à ω_δ qui

possède une primitive :

$$F_\delta \in \mathscr{O}\big(\omega_\delta\big),$$

avec $F'_\delta = f\big|_{\omega_\delta}$.

Enfin, comme la courbe $\Gamma \subset \omega_\delta$ paramétrée par $\Gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est fermée, nous atteignons effectivement l'annulation conclusive :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F_\delta\big(\Gamma(2\pi)\big) - F_\delta\big(\Gamma(0)\big) = 0. \qquad \square$$

6. Exercices

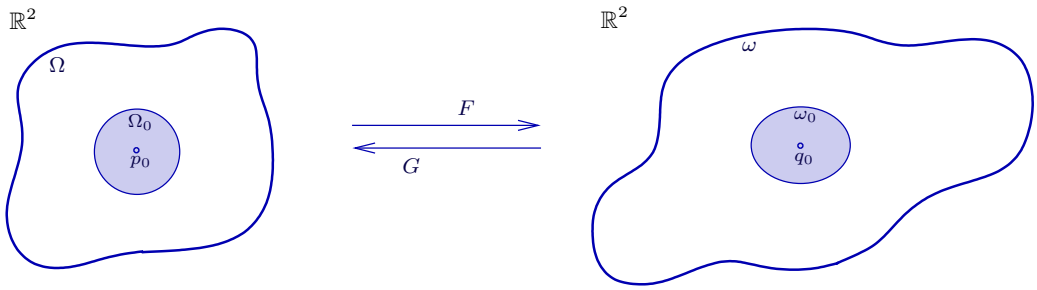
Théorème de l'application conforme de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Théorèmes d'inversion locale et globale dans $\mathbb{R}^2$

Dans deux plans euclidiens distincts pour lesquels on notifie des coordonnées courantes $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ et $\mathbb{R}^2 \ni (u, v)$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à gauche et soit un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$ à droite.



Soit un entier $k \geqslant 1$, et soit une application de classe $\mathscr{C}^k$:

$$F\colon \quad \Omega \longrightarrow \omega.$$

Soit un point fixé $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, et soit $q_0 := F(p_0) =: (u_0, v_0)$ le point-image.

Si nous écrivons les deux composantes de F comme :

$$F(x, y) \;=:\; \big(U(x, y),\, V(x, y)\big),$$

la *matrice jacobienne* de F en un point quelconque $(x, y) \in \Omega$ est :

$$\mathsf{Jac}_F(x, y) \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}(x, y).$$

Les résultats de cette section, présentés ici à titre de rappel et par souci de complétude dans la pensée, seront considérés comme provenant d'un autre cours de mathématiques, et par conséquent, nous nous dispenserons de les redémontrer. Puisqu'il importe au plus haut point d'en comprendre le contenu géométrique sous-jacent, nous tracerons des figures afin d'éveiller l'intuition du lecteur au sujet de la nature des *transformations ponctuelles* entre ouverts de $\mathbb{R}^2$. Il faut s'imaginer des taches d'huile extensibles et compressibles, se déformant sans déchirement dans le plan.

Théorème 2.1. [d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$] *Si* $\det \mathsf{Jac}_F(p_0) \neq 0$, *à savoir si :*

$$0 \neq \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} (p_0),$$

alors il existe un voisinage ouvert $p_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ *en restriction auquel :*

$$F\big|_{\Omega_0} : \quad \Omega_0 \xrightarrow{\sim} F(\Omega_0) =: \omega_0,$$

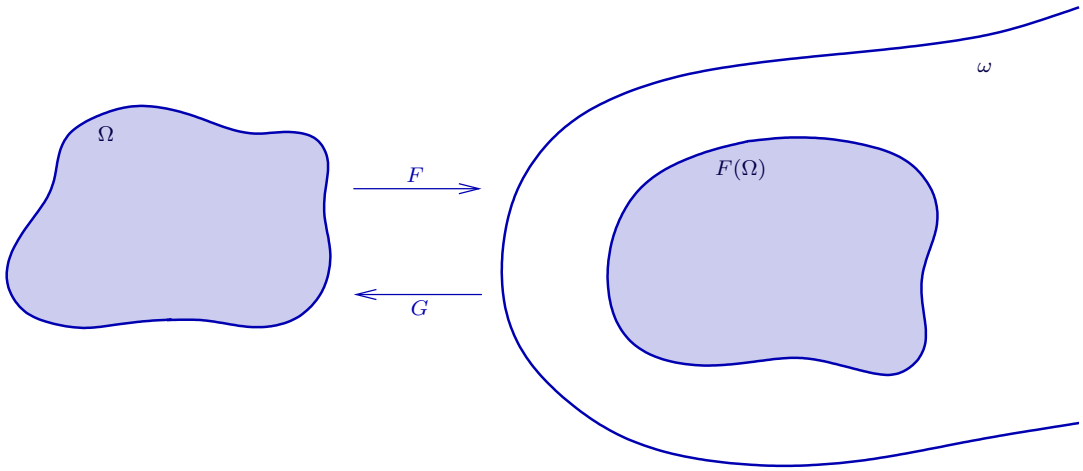
est bijective, homéomorphe sur son image, et d'application inverse :

$$\Omega_0 \xleftarrow{\sim} \omega_0 \quad : G,$$

elle aussi de classe $\mathscr{C}^k$ *et de déterminant jacobien non nul :*

$$0 \neq \det \mathsf{Jac}_G(q_0). \qquad \square$$

Principalement, l'argument repose sur un théorème itératif de type « *point fixe à la Picard* ». Si la condition de non-annulation du déterminant jacobien est satisfaite en tout point, le résultat se globalise.



Théorème 2.2. [d'inversion globale dans $\mathbb{R}^2$] *Si* $F : \Omega \longrightarrow \omega$ *est une application de classe* $\mathscr{C}^{k \geqslant 1}$ *entre deux ouverts* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\omega \subset \mathbb{R}^2$ *qui est* injective *et satisfait :*

$$0 \neq \det \mathsf{Jac}_F(x, y) \qquad (\forall\, (x,y) \in \Omega),$$

alors F *est un homéomorphisme* $\Omega \xrightarrow{\sim} F(\Omega) \subset \omega$ *sur son image, d'inverse :*

$$\Omega \xleftarrow{\sim} F(\Omega) \quad : G,$$

aussi de classe $\mathscr{C}^k$, *ayant aussi un déterminant jacobien non nul :*

$$0 \neq \det \mathsf{Jac}_G(u, v),$$

en tout point $(u, v) \in F(\Omega)$. $\square$

Quand $F(\Omega) = \omega$ est surjective, on dit alors que $F : \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$ est un $\mathscr{C}^k$-*difféomorphisme* de Ω sur ω.

3. Inversion holomorphe

Maintenant, quand $F = f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une application réelle entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ induite par une fonction holomorphe, décomposée en parties réelle et imaginaire sous la forme :

$$f(z) \,=\, u(x,y) + i\,v(x,y),$$

les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} && \text{en abrégé} && u_x \,=\, v_y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\,\frac{\partial v}{\partial x} && \text{en abrégé} && u_y \,=\, -\,v_x, \end{aligned}$$

permettent d'écrire une expression de la dérivée de f :

$$f'(z) \,=\, u_z + i\,v_z \,=\, \tfrac{1}{2}\,u_x - \tfrac{i}{2}\,u_y + \tfrac{i}{2}\,v_x + \tfrac{1}{2}\,v_y \,=\, u_x - i\,u_y,$$

et impliquent, comme nous l'avons déjà vu, que le déterminant jacobien de la transformation réelle associée $F(x,y) := \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ prend une forme simplifiée agréable :

$$\begin{aligned} \det \mathsf{Jac}_F \,&=\, u_x\,v_y - u_y\,v_x \\ &=\, \big(u_x\big)^2 + \big(u_y\big)^2 \\ &=\, \big|f'(z)\big|^2. \end{aligned}$$

Rappelons que les fonctions holomorphes sont $\mathscr{C}^\infty$, donc les deux Théorèmes 2.1 et 2.2 s'appliquent aux fonctions holomorphes $f = F$, vues comme applications réelles à deux variables. Mais naturellement, la question de pose de savoir si l'inverse réel local ou global G dont nous venons de rappeler l'existence correspond à une fonction *holomorphe*. La réponse est positive, et elle nécessite un auxiliaire technique.

Lemme 3.1. *Soient trois ouverts $\Omega, \omega, \varpi \subset \mathbb{R}^2$ et soient deux applications $\mathscr{C}^\infty$ composables :*

$$\begin{aligned} \Omega \;&\xrightarrow{\;F\;}\; \omega \;\xrightarrow{\;G\;}\; \varpi \\ (x,y) \;&\longmapsto\; F(x,y) \\ &\qquad\quad (u,v) \;\longmapsto\; G(u,v). \end{aligned}$$

Alors leurs dérivées partielles complexes par rapport aux variables $z = x + i\,y$ de Ω et $w = u + i\,v$ de ω satisfont :

$$\begin{aligned} \big(G \circ F\big)_z \,&=\, G_w \cdot F_z + G_{\overline{w}} \cdot \overline{F}_z, \\ \big(G \circ F\big)_{\overline{z}} \,&=\, G_w \cdot F_{\overline{z}} + G_{\overline{w}} \cdot \overline{F}_{\overline{z}}. \end{aligned}$$

Bien entendu, la classe de différentiabilité $\mathscr{C}^1$ suffit pour que l'énoncé soit vrai.

Démonstration. Pour traiter la première ligne, notons parties réelle et imaginaire de F comme plus haut :

$$F(x,y) \,=\, U(x,y) + i\,V(x,y),$$

et dérivons la composée $G \circ F$ par rapport à z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\Big[G \circ F(x,y)\Big] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) G\big(U(x,y), V(x,y)\big)\\ &= \frac{1}{2}\Big[G_u\,U_x + G_v\,V_x - i\,G_u\,U_y - i\,G_v\,V_y\Big].\end{aligned}$$

Ensuite, utilisons :

$$\begin{aligned}\partial_u &= \partial_w + \partial_{\overline{w}}, & \partial_x &= \partial_z + \partial_{\overline{z}},\\ \partial_v &= i\,\partial_w - i\,\partial_{\overline{w}}, & \partial_y &= i\,\partial_z - i\,\partial_{\overline{z}},\end{aligned}$$

pour remplacer puis calculer de manière détaillée :

$$\begin{aligned}\big(G \circ F\big)_z &= \tfrac{1}{2}\Big[\big(G_w + G_{\overline{w}}\big)\big(U_z + U_{\overline{z}}\big) + \big(i\,G_w - i\,G_{\overline{w}}\big)\big(V_z + V_{\overline{z}}\big) -\\ &\qquad - i\,\big(G_w + G_{\overline{w}}\big)\big(i\,U_z - i\,U_{\overline{z}}\big) - i\,\big(i\,G_w - i\,G_{\overline{w}}\big)\big(i\,V_z - i\,V_{\overline{z}}\big)\Big]\\ &= \tfrac{1}{2}\Big[G_w\,U_z + \underline{G_w\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + G_{\overline{w}}\,U_z + \underline{G_{\overline{w}}\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + i\,G_w\,V_z + \underline{i\,G_w\,V_{\overline{z}}}_{\circ} - i\,G_{\overline{w}}\,V_z - \underline{i\,G_{\overline{w}}\,V_{\overline{z}}}_{\circ} +\\ &\qquad + G_w\,U_z - \underline{G_w\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + G_{\overline{w}}\,U_z - \underline{G_{\overline{w}}\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + i\,G_w\,V_z - \underline{i\,G_w\,V_{\overline{z}}}_{\circ} - i\,G_{\overline{w}}\,V_z + \underline{i\,G_{\overline{w}}\,V_{\overline{z}}}_{\circ}\Big]\\ &= G_w\,U_z + G_{\overline{w}}\,U_z + i\,G_w\,V_z - i\,G_{\overline{w}}\,V_z\\ &= G_w\,\big(U_z + i\,V_z\big) + G_{\overline{w}}\,\big(U_z - i\,V_z\big)\\ &= G_w\,F_z + G_{\overline{w}}\,\overline{F}_z.\end{aligned}$$

Le traitement de la deuxième ligne est évidemment en tous points analogue. □

Maintenant, en revenant à l'inversion (locale ou globale), écrivons l'identité :

$$z \equiv G\big(f(z)\big),$$

qui exprime, que la fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, vue comme application réelle, admet un difféomorphisme inverse *réel* :

$$\Omega \overset{\sim}{\longleftarrow} f(\Omega) \quad : G,$$

et appliquons le Lemme 3.1 pour dériver cette identité par rapport à $\overline{z}$:

$$\begin{aligned}0 &\equiv G_w \cdot \underline{f_{\overline{z}}}_{\circ} + G_{\overline{w}}\,\overline{f}_{\overline{z}}\\ &\equiv 0 + G_{\overline{w}}\,\overline{f}_{\overline{z}}.\end{aligned}$$

Or comme les fonctions holomorphes sont localement des séries entières $\sum a_n\,(z - z_0)^n$ pour lesquelles conjugaison et dérivation commutent, on reconnaît :

$$\overline{f}_{\overline{z}} = \overline{f_z} \neq 0 \qquad \text{(hypothèse)},$$

et donc :

$$0 \equiv G_{\overline{w}} \qquad (\forall\, w \in f(\Omega)),$$

ce qui montre que l'inverse G de la fonction holomorphe f est bel est bien *holomorphe* lui aussi ! Énonçons ce résultat avec cette information supplémentaire agréable.

Théorème 3.2. [d'inversion holomorphe locale et globale] *Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

(1) *En tout point $z_0 \in \Omega$ où $f'(z_0) \neq 0$, il existe un (petit) voisinage ouvert $z_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ en restriction auquel $f|_{\Omega_0}\colon \Omega_0 \xrightarrow{\sim} f(\Omega_0)$ établit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme sur son image $f(\Omega_0)$, qui a pour inverse :*

$$\Omega_0 \xleftarrow{\sim} f\big(\Omega_0\big) \quad : g,$$

une application $\mathscr{C}^\infty$ holomorphe *dans $f(\Omega_0)$ satisfaisant $g'(w_0) \neq 0$ au point-image $w_0 := f(z_0)$.*

(2) *Si $f'(z) \neq 0$ en tout point $z \in \Omega$ et si de plus f est* globalement injective*, alors f établit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $\Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ sur son image, et admet pour inverse une fonction* holomorphe :

$$\Omega \xleftarrow{\sim} f(\Omega) \quad : g,$$

qui satisfait aussi :

$$0 \neq g'(w) \qquad (\forall\, w \in f(\Omega)). \qquad \square$$

Ces faits conduisent naturellement à une conceptualisation nouvelle.

Définition 3.3. Un *biholomorphisme :*

$$f\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$$

entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\omega \subset \mathbb{C}$ est une application satisfaisant :

(1) $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et établit une bijection $\Omega \xrightarrow{\sim} \omega$;

(2) $f'(z) \neq 0$ quel que soit $z \in \Omega$;

(3) l'application inverse $\Omega \xleftarrow{\sim} \omega : f^{-1}$ est aussi holomorphe et elle vérifie de plus $\big(f^{-1}\big)'(w) \neq 0$ quel que soit $w \in \omega$.

En fait, la non-annulation de la dérivée de $f^{-1}(w)$ provient d'une dérivation de l'identité $z \equiv f^{(-1)}\big(f(z)\big)$.

Nous venons d'observer ci-dessus que la condition **(3)** est conséquence de **(2)**. Par ailleurs, puisque dans un cadre réel pour un difféomorphisme $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, les deux conditions :

$$\textbf{(1)}\ F \text{ injective},$$
$$\textbf{(2)}\ \det \mathsf{Jac}_F \neq 0,$$

sont indépendantes et nécessaires pour que le Théorème 2.2 soit vrai — exercice : trouver un exemple ! —, on pourrait croire que les deux conditions ci-dessus :

$$\textbf{(1)}\ f \text{ injective},$$
$$\textbf{(2)}\ f' \neq 0,$$

sont elles aussi simultanément nécessaires pour avoir un biholomorphisme, mais il n'en est rien !

Un des objectifs de ce qui va suivre est en effet de démontrer qu'on peut se passer de **(2)** dans cette définition ! À nouveau, la prestidigitation holomorphe va escamoter une hypothèse :

$$\boxed{f \text{ holomorphe injective} \quad \Longrightarrow \quad f' \neq 0 \text{ partout.}}$$

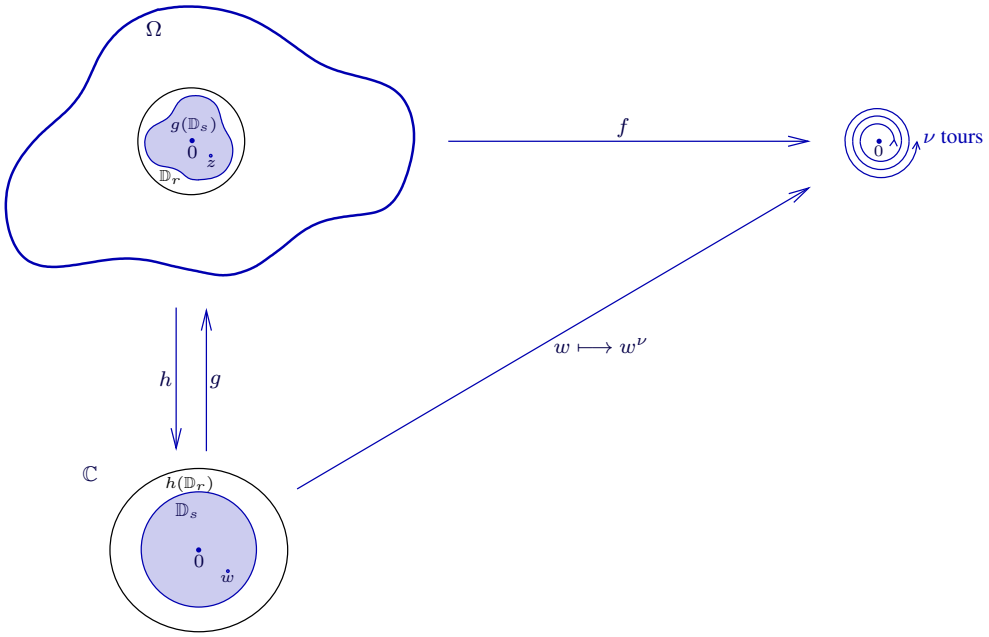
Mais avant de lever la baguette magique, un préliminaire s'impose.

4. Forme normale locale d'une fonction holomorphe

Quand on développe en série entière convergente une fonction holomorphe non identiquement nulle au voisinage de l'origine :

$$a_\nu\, z^\nu + a_{\nu+1}\, z^{\nu+1} + a_{\nu+2}\, z^{\nu+2} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0),$$

il y a toujours un premier monôme non nul, suivi en général d'une infinité de puissances supérieures de z. Le résultat paradoxal suivant montre qu'on peut toujours les « engloutir » toutes dans la première puissance, grâce à un changement de coordonnée holomorphe, c'est-à-dire grâce à un biholomorphisme.



Théorème 4.1. [Normalisation locale] *Dans un ouvert* $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ *contenant l'origine, soit une fonction holomorphe* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *avec* $f(0) = 0$ *et* $f \not\equiv 0$ *près de* 0*, et soit* $1 \leqslant \nu < \infty$ *son ordre d'annulation en* 0 *:*

$$\nu := \nu_f(0).$$

Alors il existe un rayon $s > 0$ *et un biholomorphisme fixant* 0 *:*

$$g\colon \quad \mathbb{D}_s(0) \xrightarrow{\sim} g\big(\mathbb{D}_s(0)\big) \subset \Omega,$$

tels que :

$$f\big(g(w)\big) \equiv w^\nu \qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}_s(0)).$$

Autrement dit, après un changement de coordonnée holomorphe locale, en notant à nouveau z la coordonnée (au lieu de w), toute fonction holomorphe non identiquement nulle s'annulant en 0 s'écrit sous la forme normale simple :

$$f(z) = z^\nu \qquad (\nu = \nu_f(0) \geqslant 1),$$

dans laquelle tous les termes d'ordre supérieur de la série entière ont disparu, engloutis gloutonnement !

Démonstration. Factorisons le développement en série entière par la puissance minimale de z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n\, z^n && (a_\nu \neq 0) \\ &= z^\nu \big(a_\nu + \mathrm{O}(z)\big) \\ &=: z^\nu\, F(z) && (F(0) \neq 0). \end{aligned}$$

Choisissons un rayon $r > 0$ assez petit pour que $F \neq 0$ sur $\mathbb{D}_r$, ce qui est possible par continuité, car $F(0) = a_\nu \neq 0$.

Donc une fonction $\log F(z)$ holomorphe dans $\mathbb{D}_r$ (simplement connexe) existe, et on peut écrire au moyen d'une nouvelle fonction holomorphe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(z\, e^{\frac{1}{\nu} \log F(z)}\Big)^\nu \\ &=: \big(h(z)\big)^\nu. \end{aligned}$$

Avec ce choix de racine ν-ième cohérent avec le choix du logarithme, il est clair que $h(0) = 0$ et que :

$$\frac{d}{dz}\, h(z)\Big|_{z=0} = e^{\frac{1}{\nu} \log F(0)} = \big(a_\nu\big)^{\frac{1}{\nu}} \neq 0,$$

et le Théorème 3.2 **(1)** assure qu'en diminuant au besoin $r > 0$, la fonction $h \colon \mathbb{D}_r \xrightarrow{\sim} h\big(\mathbb{D}_r\big)$ établit un biholomorphisme.

Comme sur la figure, soit alors $s > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_s(0) \subset h\big(\mathbb{D}_r\big)$. En notant :

$$g := h^{-1}\big|_{\mathbb{D}_s},$$

l'équation :

$$f(z) = \big(h(z)\big)^\nu \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_r),$$

dans laquelle on remplace $z = g(w)$ avec $w \in \mathbb{D}_s(0)$ offre la conclusion :

$$\begin{aligned} f\big(g(w)\big) &= \Big(h\big(g(w)\big)\Big)^\nu \\ &\equiv w^\nu. \end{aligned}$$

□

5. Multiplicités locales et théorème de l'application ouverte

Étant donné une fonction holomorphe quelconque $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas forcément 0, le théorème précédent s'applique en localisant l'étude au voisinage de *tout* point $z_0 \in \Omega$, à condition de translater z_0 pour qu'il devienne l'origine et de soustraire $f(z_0)$:

$$\varphi(z) := f(z + z_0) - f(z_0).$$

Puisque cette fonction holomorphe s'annule en $z = 0$, on peut parler de son ordre d'annulation en $z = 0$.

Définition 5.1. La *multiplicité locale* d'une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ en un point quelconque $z_0 \in \Omega$ au voisinage duquel elle n'est pas constante est l'entier :

$$\mu_f(z_0) := \nu_{f - f(z_0)}(z_0) = \nu_\varphi(0).$$

On a donc toujours, si $f \not\equiv 0$ au voisinage de z_0 :

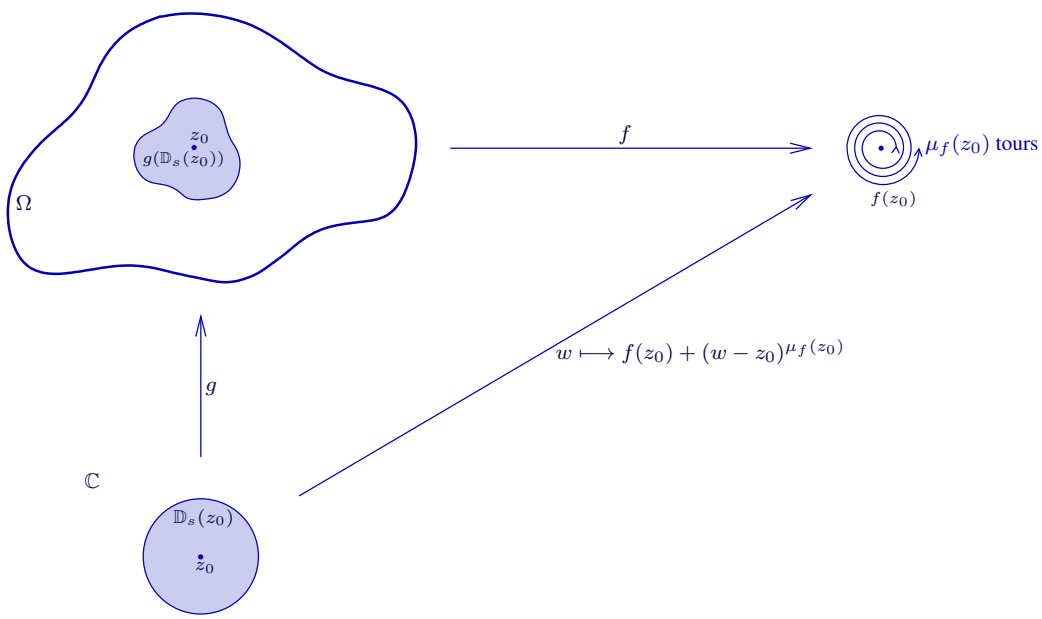
$$1 \leqslant \mu_f(z_0) < \infty.$$

Observons au passage que :

$$\begin{aligned} \Big(0 \neq f'(z_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_f(z_0) = 1\Big) \quad &\Longrightarrow \quad 0 \neq f'(z) \text{ pour } z \text{ proche de } z_0 \\ &\Longrightarrow \quad \mu_f(z) = 1 \text{ pour } z \text{ proche de } z_0, \end{aligned}$$

grâce à une lecture du développement :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=\mu_f(z_0)}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \big(z - z_0\big)^n.$$



Théorème 5.2. *Dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction holomorphe* non constante $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. *Alors en tout point $z_0 \in \Omega$, la multiplicité locale de f est finie :*

$$1 \leqslant \mu_f(z_0) < \infty,$$

et elle se lit dans le développement en série entière :

$$f(z) - f(z_0) = \big(z - z_0\big)^{\mu_f(z_0)} \Big[a_0 + a_1 \big(z - z_0\big) + \cdots\Big] \qquad (a_0 \neq 0).$$

De plus, il existe un rayon $s > 0$ petit et un biholomorphisme fixant z_0 :

$$g\colon \quad \mathbb{D}_s(z_0) \xrightarrow{\sim} g\big(\mathbb{D}_s(z_0)\big) \subset \Omega$$

tels que :

$$f\big(g(w)\big) \equiv f(z_0) + \big(w - z_0\big)^{\mu_f(z_0)} \qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}_s(z_0)).$$

Autrement dit, après un changement de coordonnée holomorphe locale au voisinage de z_0, en notant à nouveau z la coordonnée (au lieu de w), on peut voir la fonction f comme étant simplement de la forme :

$$f(z) = f(z_0) + \big(z - z_0\big)^{\mu_f(z_0)},$$

sans aucun terme d'ordre supérieur.

Preuve. La fonction translatée :

$$\varphi(z) \,=\, f(z+z_0) - f(z_0)$$

satisfait $\varphi(0) = 0$ et $\nu_\varphi(0) = \mu_f(z_0)$. Le Théorème 4.1 qui précède fournit alors un biholomorphisme local $\psi\colon \mathbb{D}_s(0) \xrightarrow{\sim} \psi\big(\mathbb{D}_s(0)\big)$ avec $\psi(0) = 0$ tel que :

$$f\big(\psi(\zeta) + z_0\big) - f(z_0) \,=\, \varphi\big(\psi(\zeta)\big) \,=\, \zeta^{\mu_f(z_0)} \qquad (\forall\, \zeta \in \mathbb{D}_s(0)).$$

Translatons à présent la variable :

$$\zeta \,=:\, w - z_0,$$

et abrégeons :

$$\psi\big(w - z_0\big) + z_0 \,=:\, g(w),$$

pour obtenir comme annoncé :

$$f\big(g(w)\big) - f(z_0) \,=\, \big(w - z_0\big)^{\mu_f(z_0)}. \qquad \square$$

Juste pour le plaisir, voici un dernier corollaire de la normalisabilité locale des fonctions holomorphes. Rappelons qu'une application $\tau\colon X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est dite *ouverte* si l'image par τ de tout ouvert de X est encore un ouvert de Y. On montre (exercice de révision) qu'il suffit que cela soit satisfait localement au voisinage de chaque point $x \in X$.

Théorème 5.3. [de l'application ouverte] *Une application holomorphe non constante $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ est toujours* ouverte.

Preuve. D'après ce qui précède, cela revient à vérifier que chaque application normalisée :

$$z \,\longmapsto\, z^\mu,$$

où $\mu \geqslant 1$ est un entier, est ouverte en 0, ce qui est manifestement vrai, puisqu'un (petit) disque centré en 0 de rayon $r > 0$ est envoyé surjectivement sur le disque ouvert de rayon strictement positif $r^\mu > 0$. $\square$

6. Fonctions holomorphes injectives : théorème fondamental

Tout le décor est en place, maintenant, pour lever le rideau sur un phénomène exceptionnel : l'injectivité, dans l'univers holomorphe, implique la non-annulation de la dérivée, ce qui est faux dans le monde réel, comme le montre l'exemple simple de $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.1. *Soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f est localement injective en un point $z_0 \in \Omega$ au sens où il existe un voisinage ouvert $z_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ en restriction auquel $f\big|_{\Omega_0}$ est injective, alors $\mu_f(z_0) = 1$, c'est-à-dire $f'(z_0) \neq 0$.*

Démonstration. Comme f est non constante, on sait que $1 \leqslant \mu_f(z_0) < \infty$. Supposons par l'absurde que $2 \leqslant \mu_f(z_0)$. Alors un changement biholomorphe (donc bijectif) de coordonnée locale fourni par le Théorème 5.2 normalise :

$$f\big(g(w)\big) \,=\, f(z_0) + \big(w - z_0\big)^{\mu_f(z_0)}.$$

Mais pour $\mu \geqslant 2$, l'application $w - z_0 \longmapsto \big(w - z_0\big)^\mu$ n'est *jamais* injective, comme on le voit en passant aux coordonnées polaires $w = z_0 + r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ petit et avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$, puisque c'est :

$$r\,e^{i\theta} \,\longmapsto\, r^\mu\, e^{i\mu\theta},$$

et l'application $\theta \longmapsto \mu\,\theta$ du cercle unité $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans lui-même est *non* injective, puisque tout point possède exactement $\mu \geqslant 2$ préimages. $\square$

Être globalement injectif implique être localement injectif, n'est-ce pas ? Donc un corollaire direct — et spectaculaire ! — est le :

Théorème 6.2. *Si une fonction holomorphe $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, est* globalement injective*, alors :*

$$\boxed{f'(z) \neq 0} \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Preuve. Le théorème qui précède donne $\mu_f(z) = 1$, en *tout* point, et nous avons vu plus haut que ceci équivaut à $f'(z) \neq 0$. $\square$

Si nous revenons à la Définition 3.3, nous constatons — enfin ! que la condition **(2)** peut être éliminée.

Voici ce qu'il faut retenir.

Théorème 6.3. [Fondamental] *Si une fonction holomorphe $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est* injective*, alors elle établit un biholomorphisme global sur son image :*

$$f\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega). \qquad \square$$

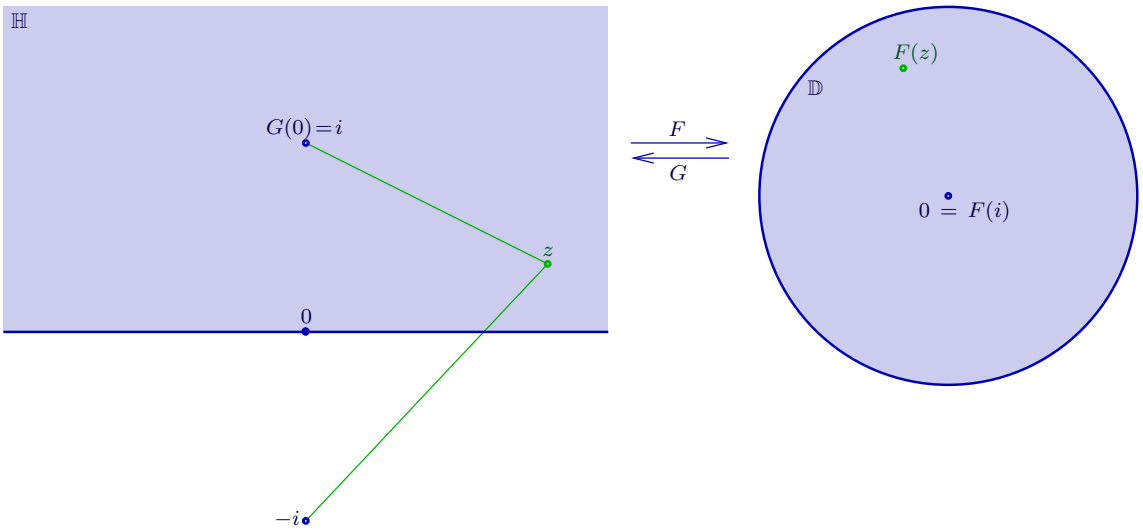
7. Équivalence entre le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$

Le *demi-plan de Poincaré* consiste en les points du plan complexe dont la partie imaginaire est strictement positive :

$$\mathbb{H} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Im}\, z > 0\big\}.$$

Un fait mathématique remarquable et surprenant est que $\mathbb{H}$ est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$, grâce à des formules explicites simples. Introduisons en effet les deux applications rationnelles :

$$F(z) := \frac{i-z}{i+z} \qquad \text{et} \qquad G(w) := i\,\frac{1-w}{1+w}.$$



Théorème 7.1. *L'application $F\colon \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ établit un* biholomorphisme *entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ d'inverse $\mathbb{H} \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}\ : G$.*

Démonstration. Commençons par observer (visuellement) que F et G sont holomorphes dans $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$, puisque leurs uniques pôles $-i \notin \mathbb{H}$ et $-1 \notin \mathbb{D}$ n'y appartiennent pas.

Comme la figure l'indique, un point quelconque $z \in \mathbb{H}$ est toujours plus proche de i que de $-i$, donc on a une inégalité :

$$\big|F(z)\big| \;=\; \frac{|i-z|}{|i+z|} \;<\; 1,$$

qui fait voir géométriquement que F envoie $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$.

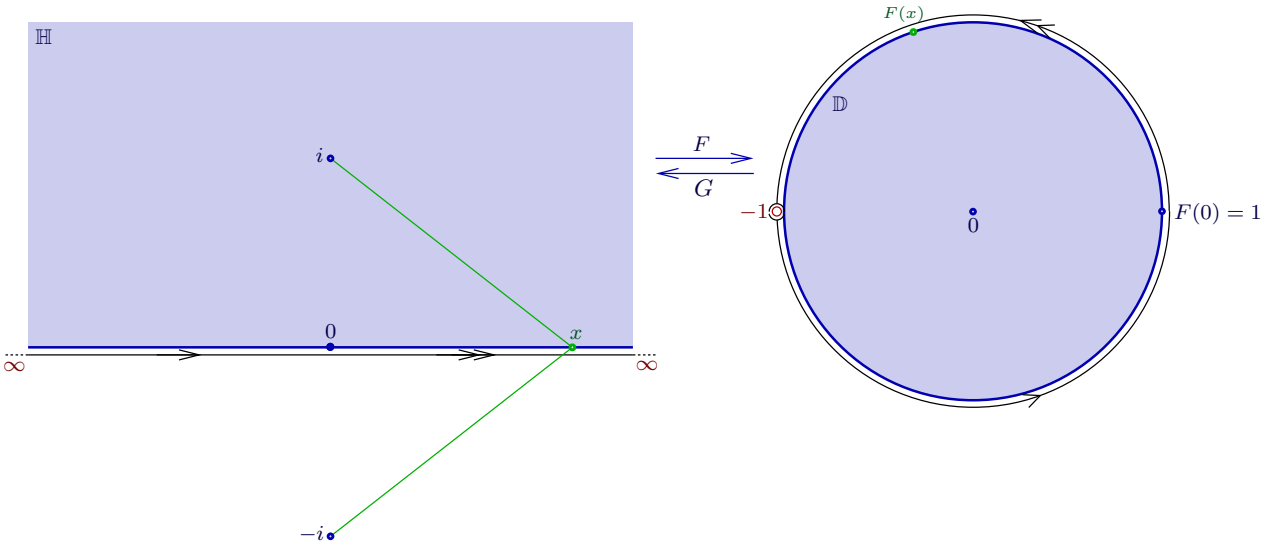
Pour voir que G envoie inversement $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{H}$, en notant $w = u + i\,v \in \mathbb{D}$, vérifions par un calcul la positivité de :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}\, G(w) \;&=\; \mathsf{Re}\, \frac{1-u-i\,v}{1+u+i\,v} \\
&=\; \mathsf{Re}\, \frac{(1-u-i\,v)(1+u-i\,v)}{(1+u)^2+v^2} \\
&=\; \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} \\
[u+i\,v \in \mathbb{D}] \qquad &>\; 0.
\end{aligned}$$

Enfin, vérifions que $F \circ G = \mathsf{Id}_{\mathbb{D}}$ et que $G \circ F = \mathsf{Id}_{\mathbb{H}}$, ce qui établira la bijectivité et conclura :

$$\begin{aligned}
F\big(G(w)\big) \;&=\; \frac{i - i\,\frac{1-w}{1+w}}{i + i\,\frac{1-w}{1+w}} \;=\; \frac{1+w-1+w}{1+w+1-w} \;=\; w, \\
G\big(F(z)\big) \;&=\; i\,\frac{1-\frac{i-z}{i+z}}{1+\frac{i-z}{i+z}} \;=\; i\,\frac{i+z-i+z}{i+z+i-z} \;=\; z.
\end{aligned}$$

□



Analysons maintenant le comportement de F au *bord* $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ du demi-plan supérieur. Comme la seule singularité de F est $z = -i$, sa restriction $F\big|_{\mathbb{R}}$ est continue, et même $\mathscr{C}^\infty$.

À présent, les distances à $+i$ et à $-i$ d'un point réel quelconque $x \in \mathbb{R}$ sont *égales*, donc :

$$\big|F(x)\big| \,=\, \frac{|i-x|}{|i+x|} \,=\, 1,$$

ce qui fait voir géométriquement que F envoie $\partial\mathbb{H}$ dans le cercle unité $\partial\mathbb{D}$. Mais son image ne recouvre pas tout !

En effet, écrivons :

$$F(x) \,=\, \frac{i-x}{i+x} \,=\, \frac{(i-x)(-i+x)}{1+x^2} \,=\, \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\,\frac{2\,x}{1+x^2},$$

et paramétrons la droite réelle avec $t \in \,]-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}[$ par :

$$x \,:=\, \tan t.$$

Des réminiscences trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sin 2t \,&=\, 2\sin t\cos t \,=\, 2\,\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t \,=\, \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \,=\, \frac{2\,x}{1+x^2},\\
\cos 2t \,&=\, \cos^2 t - \sin^2 t \,=\, \Big(1-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\Big)\cos^2 t \,=\, \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} \,=\, \frac{1-x^2}{1+x^2},
\end{aligned}$$

permettent alors de représenter :

$$F(x) \,=\, \cos 2t + i\sin 2t \,=\, e^{2it} \qquad\qquad (-\tfrac{\pi}{2}<t<\tfrac{\pi}{2}),$$

sous une forme qui montre clairement que l'image $F(\mathbb{R})$ recouvre le cercle unité *excepté le seul point* $\{-1\}$ — qui correspondrait à $t \,=\, \pm\frac{\pi}{2}$ — et que F établit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme :

$$F\colon\, \mathbb{R} \,\xrightarrow{\sim}\, \partial\mathbb{D}\big\backslash\{-1\}.$$

Intuitivement, la préimage de ce point manquant -1 devrait être un certain couple de « *points à l'infini* » de $\mathbb{R}$, car :

$$-1 \,=\, \lim_{|x|\to\infty} \frac{i-x}{i+x}.$$

Pour terminer, observons que lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, l'image $F(x)$ voyage dans le sens trigonométrique le long de $\partial\mathbb{D}$.

8. Lemme de Schwarz

Rappelons qu'une *rotation* de $\mathbb{C}$ fixant l'origine est une transformation de la forme :

$$z \,\longmapsto\, e^{i\theta}\,z,$$

avec une constante $\theta \in \mathbb{R}$, appelée *angle de rotation*, et définie à un multiple entier de 2π près. L'énonciation et la démonstration du résultat suivant sont simples, mais les conséquences auront une grande portée.

Lemme 8.1. [de Schwarz] *Soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ du disque unité à valeurs dans lui-même. Si $f(0)=0$, alors :*

(1) $\big|f(z)\big| \leqslant |z|$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *;*

(2) *si* $\big|f(z_0)\big| = |z_0|$ *en un* $z_0 \in \mathbb{D}$ *avec* $z_0 \neq 0$*, alors* $f(z) = e^{i\theta}\,z$ *est une rotation ;*

(3) $\big|f'(0)\big| \leqslant 1$*, et s'il y a égalité* $\big|f'(0)\big| = 1$*, alors* $f(z) = e^{i\theta}\,z$ *est encore une rotation.*

Démonstration. **(1)** Développons f à l'origine en série entière convergeant dans $\mathbb{D}$:

$$f(z) \,=\, \underline{a_0}_{\circ} + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots .$$

Puisque $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$, et par conséquent $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$, puisqu'elle a une singularité éliminable en $z = 0$.

Ensuite, pour un rayon $0 < r < 1$ fixé arbitrairement proche de 1, comme $|f(z)| < 1$ par hypothèse dans $\mathbb{D}$, il vient sur le cercle C_r :

$$\left|\tfrac{f(z)}{z}\right| \,<\, \tfrac{1}{r} \qquad\qquad (\forall\, |z| = r),$$

donc le principe du maximum offre la même inégalité dans $\overline{\mathbb{D}}_r$:

$$\left|\tfrac{f(z)}{z}\right| \,<\, \tfrac{1}{r} \qquad\qquad (\forall\, |z| \leqslant r),$$

et en faisant $r \xrightarrow{<} 1$, nous obtenons bien $|f(z)| \leqslant |z|$ dans $\mathbb{D}$.

(2) Maintenant, si cette fonction holomorphe $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1$ atteint son maximum $\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$ en un point *intérieur non nul* $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, le principe du maximum la force à être constante, disons $f(z) = c\,z$ avec $c \in \mathbb{C}$, puis $|z_0| = |f(z_0)| = |c|\,|z_0|$ force $|c| = 1$, donc $f(z) = e^{i\theta} z$ est une rotation.

(3) Abrégeons $\frac{f(z)}{z} =: g(z)$, fonction holomorphe qui satisfait donc $|g(z)| \leqslant 1$ dans $\mathbb{D}$, et aussi :

$$g(0) \,=\, \lim_{\substack{z \to 0 \\ \neq}} \tfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} \,=\, f'(0),$$

d'où toujours $|f'(0)| \leqslant 1$.

Pour terminer, si $|f'(0)| = 1 = |g(0)|$, le principe du maximum — encore lui ! — force g à être constante, d'où à nouveau par le même raisonnement $f(z) = e^{i\theta} z$. $\square$

9. Automorphismes du disque unité

Étudions maintenant les biholomorphismes d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lui-même $\omega := \Omega$.

Définition 9.1. Une application biholomorphe $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lui-même est appelée un *automorphisme holomorphe* de Ω. Leur collection sera notée :

$$\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\Omega) \,:=\, \big\{ f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega \text{ biholomorphe} \big\}.$$

Elle forme un groupe — abstrait ! En effet, l'identité $z \longmapsto z$ de $\mathbb{C}$ se restreint en une identité de Ω, la composition est transitive et préserve le caractère biholomorphe, et enfin l'inverse — pour la structure de groupe — de $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega$ est tout simplement le biholomorphisme réciproque $\Omega \xleftarrow{\sim} \Omega \,: f^{-1}$.

Question 9.2. *Pour* $\Omega = \mathbb{D}$, *peut-on décrire* $\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ *?*

Visiblement, toute rotation $z \longmapsto e^{i\theta} z$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ fixé est un automorphisme de $\mathbb{D}$, d'inverse la rotation $z \longmapsto e^{-i\theta} z$ d'angle opposé.

D'autres automorphismes existent, qui ont une grande utilité dans de nombreux chapitres de l'Analyse Complexe.

Lemme 9.3. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $|\alpha| < 1$, *l'application :*

$$\psi_\alpha \colon \quad z \,\longmapsto\, \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

constitue un automorphisme holomorphe du disque unité $\mathbb{D}$.

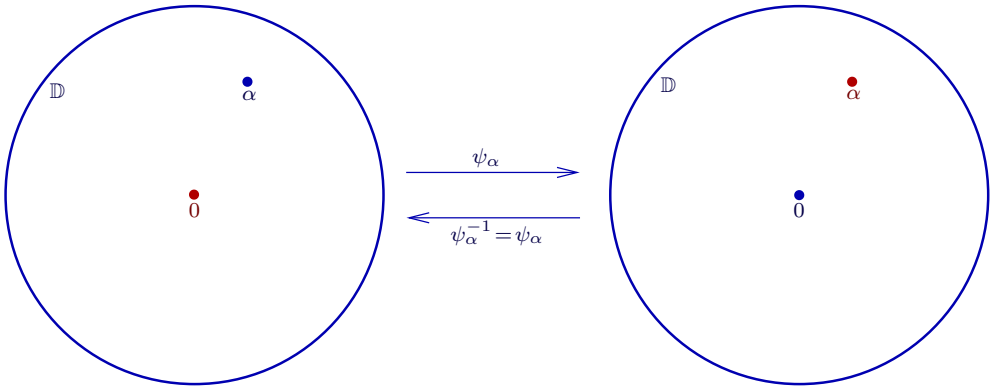
Démonstration. L'unique pôle $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ de $\psi_\alpha(z)$ étant de module $\left|\frac{1}{\overline{\alpha}}\right| > 1$, l'application ψ_α est holomorphe dans $\mathbb{D}$, et même holomorphe dans le voisinage ouvert $\mathbb{D}_{\frac{1}{|\alpha|}} \supset \overline{\mathbb{D}}$ du disque unité fermé.

Sur le bord, pour $z = e^{i\theta}$, ré-écrivons :

$$\begin{aligned}\psi_\alpha\big(e^{i\theta}\big) &= \frac{1}{e^{i\theta}}\,\frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{-i\theta} - \overline{\alpha}} \\ &=: -\frac{1}{e^{i\theta}}\,\frac{w}{\overline{w}},\end{aligned}$$

pour faire voir que $\left|\psi_\alpha(e^{i\theta})\right| \equiv 1$, puis déduire grâce au principe du maximum que :

$$\left|\psi_\alpha(z)\right| < 1 \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$



Enfin, pour vérifier la bijectivité de $\psi_\alpha \colon \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, calculons la composition de ψ_α avec elle-même :

$$\begin{aligned}\big(\psi_\alpha \circ \psi_\alpha\big)(z) &= \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}}{1 - \overline{\alpha}\,\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}} \\ &= \frac{\alpha - \alpha\overline{\alpha}\, z - \alpha + z}{1 - \overline{\alpha} z - \alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha} z} \\ &= \frac{(1 - \alpha\overline{\alpha})\, z}{1 - \alpha\overline{\alpha}} \\ &= z,\end{aligned}$$

pour constater que ψ_α est sa propre inverse ! □

Voici une dernière constatation simple qui présente un grand intérêt géométrique.

Observation 9.4. *L'automorphisme* $\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$ *du disque unité* $\mathbb{D}$ *avec* $|\alpha| < 1$ échange 0 *et* α *:*

$$\psi_\alpha(0) = \alpha \qquad \textit{et} \qquad \psi_\alpha(\alpha) = 0.$$ □

Le résultat principal de cette section dévoile, grâce au Lemme 8.1 de Schwarz, que la combinaison des rotations et des applications ψ_α fournit *tous* les automorphismes holomorphes du disque unité.

Théorème 9.5. *Si* $f \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ *est un automorphisme holomorphe de* $\mathbb{D}$*, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{D}$ *tels que :*

$$f(z) = e^{i\theta}\,\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} = e^{i\theta}\,\psi_\alpha(z).$$

Démonstration. Puisque $f\colon \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ est bijective, il existe une unique préimage $\alpha \in \mathbb{D}$ de $0 = f(\alpha)$. Introduisons alors l'automorphisme composé :

$$g \,:=\, f \circ \psi_\alpha,$$

qui satisfait maintenant $g(0) = 0$. Le Lemme 8.1 de Schwarz s'applique donc, et donne :

$$\big|g(z)\big| \,\leqslant\, |z| \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Mais il s'applique *aussi* à l'inverse $\mathbb{D} \xleftarrow{\sim} \mathbb{D} : g^{-1}$ satisfaisant $g^{-1}(0) = 0$, pour donner de même :

$$\big|g^{-1}(w)\big| \,\leqslant\, |w| \qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}),$$

et si nous y remplaçons bêtement $w = g(z)$, nous obtenons une inégalité :

$$\Big|g^{-1}\big(g(z)\big)\Big| \,=\, |z| \,\leqslant\, \big|g(z)\big| \qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}),$$

inverse de celle qui précède, ce qui force $|g(z)| = |z|$ partout !

La partie **(2)** du Lemme 8.1 de Schwarz offre alors que $g(z) = e^{i\theta} z$ est une rotation, c'est-à-dire :

$$f\big(\psi_\alpha(z)\big) \,=\, e^{i\theta}\, z.$$

Pour terminer, en substituant là-dedans $z := \psi_\alpha(z)$ et en nous souvenant que $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \mathrm{Id}$, nous concluons :

$$f(z) \,=\, f\big(\psi_\alpha(\psi_\alpha(z))\big) \,=\, e^{i\theta}\, \psi_\alpha(z). \qquad \square$$

Il est clair qu'un tel automorphisme $z \longmapsto e^{i\theta}\, \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z}$ ne fixe l'origine que lorsque $\alpha = 0$.

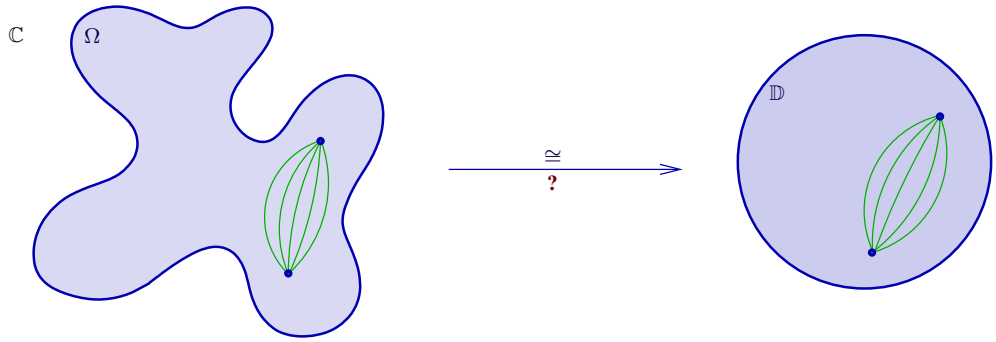
Corollaire 9.6. *Les seuls automorphismes holomorphes de $\mathbb{D}$ qui fixent l'origine $0 \in \mathbb{D}$ sont les rotations $z \longmapsto e^{i\theta} z$.* $\square$

Enfin, étant donné deux points quelconques $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, on peut envoyer $\alpha \longmapsto 0$ au moyen de ψ_α, puis $0 \longmapsto \beta$ au moyen de ψ_β, et donc la composition $\psi_\beta \circ \psi_\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ envoie α sur β : passer par Paris pour aller de Toulouse à Marseille, il fallait y penser !

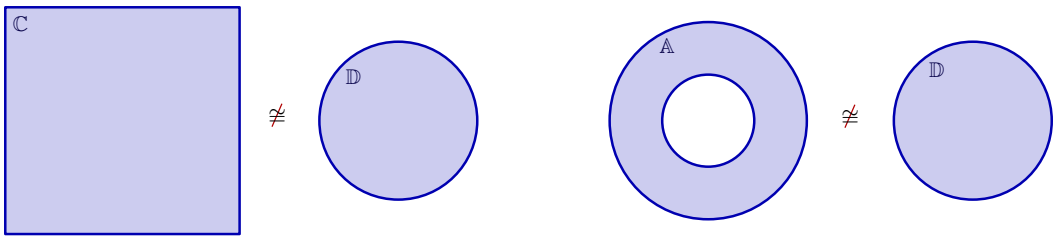
Corollaire 9.7. *Le groupe $\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ est transitif.* $\square$

10. Présentation du théorème de Riemann

Une question se pose de savoir si un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ peut être « *normalisé* » au sens où il soit biholomorphiquement équivalent au disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.



Dans le cas où $\Omega = \mathbb{C}$, la réponse est négative, à cause du théorème de Liouville qui force toute application holomorphe $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$, donc bornée, à être constante.



Ensuite, l'existence d'un biholomorphisme $F\colon \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ permet de transférer les homotopies entre courbes dans $\mathbb{D}$ comme homotopies entre courbes dans Ω. Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, car convexe, Ω doit nécessairement être *aussi* simplement connexe. Ainsi, aucun anneau $\mathbb{A}$ n'est équivalent à $\mathbb{D}$.

Il est absolument remarquable que ces deux conditions nécessaires aient été découvertes comme aussi suffisantes par Riemann, dans sa thèse soutenue en 1851 à l'âge de 21 ans.

Théorème 10.1. [de l'application conforme de Riemann] *Tout ouvert non vide* $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ *distinct de* $\mathbb{C}$, i.e. *avec* $\mathbb{C}\backslash\Omega \neq \emptyset$, *qui est connexe et simplement connexe, est* biholomorphe *au disque unité* $\mathbb{D}$.

De plus, pour tout $z_0 \in \Omega$ *fixé, il existe un unique biholomorphisme :*

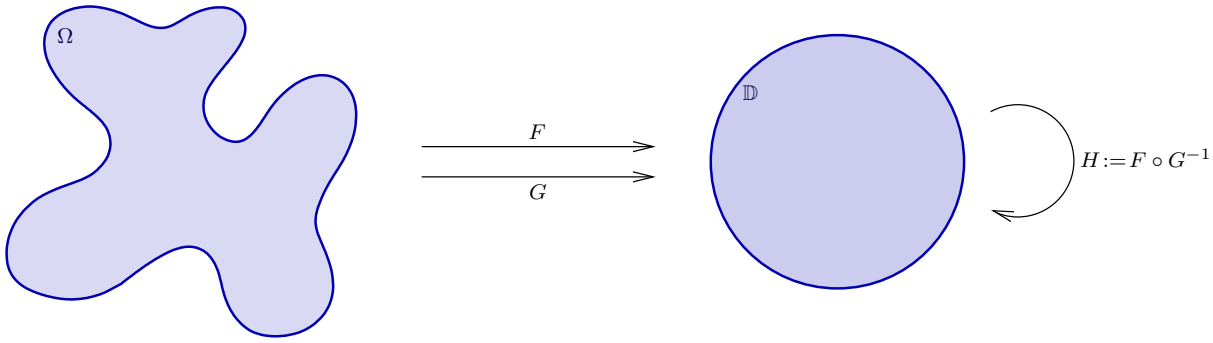
$$F\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$$

satisfaisant les conditions de normalisation :

$$\begin{aligned} F(z_0) &= 0, \\ F'(z_0) &\in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad F'(z_0) > 0. \end{aligned}$$

Comme il n'y a qu'un seul « *modèle* », $\mathbb{D}$, et que les biholomorphismes peuvent être composés et inversés, il en découle un

Corollaire 10.2. *Deux ouverts connexes et simplement connexes quelconques* $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ *sont toujours biholomorphes.* $\square$



Preuve de l'unicité. Étant donné *deux* biholomorphismes normalisés :

$$F, G\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D},$$

la composition $H := F \circ G^{-1}$ devient un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ fixant l'origine :

$$H(0) = F\big(G^{-1}(0)\big) = F(z_0) = 0.$$

Puisque $\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D}) = \big\{z \longmapsto e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}\big\}$, on sait par le Corollaire 9.6 que de tels biholomorphismes sont nécessairement de la forme $H(z) = e^{i\theta}z$.

Mais la formule de dérivation composée et l'hypothèse de normalisation :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \;=\; H'(0) \;&=\; F'\big(G^{-1}(0)\big) \cdot (G^{-1})'(0) \\ &=\; F'(z_0)\,\frac{1}{G'(z_0)} \;\in\; \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

force $e^{i\theta} = 1$, d'où $H = \mathsf{Id}$, c'est-à-dire $G = F$. □

La partie difficile, et profonde, de la démonstration du Théorème 10.1 de l'application conforme de Riemann concerne l'*existence*. À grands traits, en voici les idées. Introduisons l'ensemble :

$$\mathscr{R} \;:=\; \big\{f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \text{ holomorphe}\colon\; f(z_0) = 0 \text{ et } f \text{ injective}\big\}.$$

Nous avons déjà démontré dans le Théorème 6.3 fondamental que la seule injectivité de f assure qu'on a toujours un biholomorphisme de f sur son image :

$$f\colon \quad \Omega \;\xrightarrow{\sim}\; f(\Omega) \;\subset\; \mathbb{D}.$$

Puisqu'on cherche un *biholomorphisme* $\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, il est naturel de maximiser l'image $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, c'est-à-dire de « *remplir* » $\mathbb{D}$.

Pour des raisons qui seront comprises ultérieurement, il s'avère que maximiser $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ est possible en se contentant de maximiser seulement $|f'(z_0)|$, cela, en choisissant une certaine fonction appropriée $f_{\mathsf{max}} \in \mathscr{R}$. Évidemment, on peut toujours trouver une suite maximisante $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{R}$ satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty} \big|f_n'(z_0)\big| \;=\; \sup_{g\in\mathscr{R}} \big|g'(z_0)\big|,$$

mais on n'a alors aucune garantie que ces f_n convergeront vers une fonction holomorphe dans Ω, et qui plus est, une fonction *injective*, de manière à réellement trouver une fonction intéressante $f_{\mathsf{max}} \in \mathscr{R}$. C'est ici que gît la difficulté principale, et pour la surmonter, commençons à déployer des concepts nouveaux concernant la convergence de suites $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$.

11. Théorème de Montel pour les familles uniformément bornées et continues

Dans notre cas, les $f_n\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ sont à valeurs dans $\mathbb{D}$, donc elles sont toutes bornées (par 1), mais énonçons plus généralement une

Définition 11.1. Une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes est dite *uniformément bornée sur les compacts de* Ω si :

$$\forall\, K \;\subset\; \Omega \text{ compact} \quad \exists\, 0 \leqslant \mathrm{M}_K < \infty \quad \text{telle que}$$
$$\big|f(z)\big| \;\leqslant\; \mathrm{M}_K \qquad\qquad (\forall\, z \in K,\ \forall\, f \in \mathscr{F}).$$

Une fonction holomorphe individuelle est bien entendu bornée sur un compact, mais on demande ici l'*uniformité* par rapport à la famille $\mathscr{F}$.

Le concept-clé apparaît maintenant.

Définition 11.2. Une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes est dite *uniformément équicontinue sur les compacts de* Ω si :

$$\forall\, K \;\subset\; \Omega \text{ compact} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(K, \varepsilon) > 0 \quad \text{tel que}$$
$$\Big(z, w \in K \text{ avec } |z - w| \leqslant \delta\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\big|f(z) - f(w)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, f \;\in\; \mathscr{F}\Big).$$

Cette condition est très forte : non seulement on a continuité spatiale uniforme — ce qui, d'après Heine-Borel, est automatique pour des fonctions continues sur un compact —, mais encore, on a uniformité par rapport à la famille $\mathscr{F}$.

Exemple 11.3. Sur le segment fermé $[0,1]$, soit la famille (suite) :

$$\big\{f_n(x) := x^n\big\}_{n=1}^{\infty},$$

uniformément bornée (par 1). Elle n'est pas uniformément équicontinue, car pour tout $x_0 < 1$ fixé arbitrairement proche de 1, on a :

$$\big|f_n(1) - f_n(x_0)\big| \,=\, 1 - x_0^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

quantité qui ne peut pas être rendue uniformément arbitrairement petite $\leqslant \varepsilon$, quelle que soit la proximité $1 - x_0 \leqslant \delta$.

Toutefois, cette famille $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément équicontinue sur les compacts du segment *semi-ouvert* $[0,1[$, car c'est une suite qui converge uniformément vers 0 sur tout segment $[0,x_0]$ avec $0 \leqslant x_0 < 1$.

Exemple 11.4. Un meilleur contre-exemple dans le monde réel est, sur le même segment semi-ouvert $[0,1[$:

$$\big\{g_n(x) := \sin\big(2\pi\, nx\big)\big\}_{n=1}^{\infty}.$$

Cette famille (suite) y est uniformément bornée (par 1), mais elle n'est uniformément équicontinue sur aucun segment compact $[a,b] \subset [0,1[$ d'intérieur non vide, *i.e.* avec $0 \leqslant a < b < 1$, puisque (exercice), ses dérivées $2\pi n \cos\big(2\pi\, nx\big)$ y sont non bornées.

Dans le monde holomorphe, nous le savons, la magie domine. En voici une nouvelle illustration spectaculaire.

Théorème 11.5. [de Montel] *Soit une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions uniformément bornées sur les compacts de Ω. Alors :*

(1) *$\mathscr{F}$ est uniformément équicontinue sur les compacts $K \subset \Omega$;*

(2) *$\mathscr{F}$ est une famille normale.*

Voici l'explicitation de ce dernier concept.

Définition 11.6. Une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ est dite *normale* (dans $\mathscr{O}(\Omega)$) si pour *toute* suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{F}$, il existe au moins une sous-suite $\big\{f_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω :

$$f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \,\in\, \mathscr{O}(\Omega).$$

[La notion de famille normale peut être formulée dans l'espace $\mathscr{C}^0(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω, et aussi dans $\mathscr{C}^0(K)$ pour $K \subset \Omega$ compact, *voir infra* la Définition 12.1, où nous introduirons une autre terminologie.]

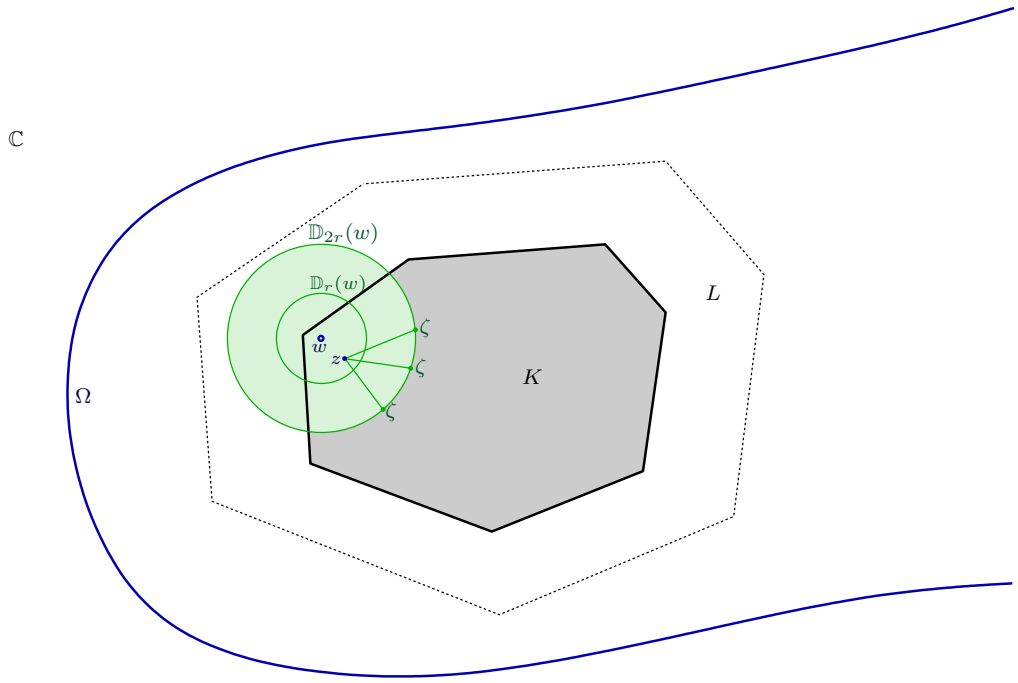
Rappelons qu'un théorème de Cauchy montre que la fonction-limite g est non seulement continue, mais aussi holomorphe. Il importe de faire remarquer qu'on ne demande pas que $g \in \mathscr{F}$ ici.

Plus haut, la suite de fonctions réelles $\big\{\sin\,(2\pi nx)\big\}_{n=1}^{\infty}$ sur $[0,1[$ n'est *pas* normale (exercice). Mais la suite $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ l'est sur les compacts de $[0,1[$, comme restriction à $[0,1[\subset \mathbb{D}$ de la suite de fonctions holomorphes $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ définies sur $\mathbb{D}$ et donc à laquelle ce Théorème 11.5 s'applique !

12. Démonstration du Théorème de Montel

Démonstration du Théorème 11.5 **(1)**. Commençons par établir le « miracle » **(1)** :

$$\mathscr{O}(\Omega) \supset \mathscr{F} \text{ uniformément bornée (sur les compacts)} \overset{\textbf{magie}}{\Longrightarrow} \mathscr{F} \text{ uniformément équicontinue (sur les compacts).}$$



Soit donc $K \subset \Omega$ un compact quelconque. Choisissons $r > 0$ assez petit pour que $3\,r < \mathsf{dist}\big(K, \mathbb{C}\backslash\Omega\big)$. Alors pour un point quelconque $w \in K$, on a $\overline{\mathbb{D}}_{2r}(w) \subset \Omega$, et même mieux :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{D}}_{2r}(w) &\subset \big\{\zeta \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,(\zeta, K) \leqslant 2\,r\big\} \\ &=: L. \end{aligned}$$

Puisque ce nouvel ensemble L est un compact de Ω, l'hypothèse que $\mathscr{F}$ est uniformément bornée fournit $\mathrm{M}_L < \infty$ satisfaisant :

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant \mathrm{M}_L \qquad (\forall\, \zeta \in L,\ \forall\, f \in \mathscr{F}).$$

Comme sur la figure, soit enfin un point quelconque $z \in \mathbb{D}_r(w)$. La formule de Cauchy appliquée deux fois sur le cercle de rayon $2\,r$ centré en w :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \\ f(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta, \end{aligned}$$

donne, après soustraction :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{2r}(w)} f(\zeta) \Big[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\Big]\, d\zeta,$$

et afin de faire voir la petitesse de $|f(z)-f(w)|$, il est avisé d'estimer celle de l'expression entre crochets :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\Big| &= \frac{|z-w|}{|\zeta-z|\cdot|\zeta-w|}\\ &= \frac{|z-w|}{|\zeta-z|\cdot 2\,r}\\ &\leqslant \frac{|z-w|}{r\cdot 2\,r}.\end{aligned}$$

$[z\in\mathbb{D}_r(w)$ et $\zeta\in C_{2r}(w) \implies |\zeta-z|>r]$

En conclusion, nous obtenons bien une inégalité valable pour $z,w\in K$ avec $|z-w|\leqslant\delta\leqslant r$ qui fait voir comment choisir $\delta>0$ pour obtenir l'équicontinuité uniforme :

$$\begin{aligned}\big|f(z)-f(w)\big| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{M}_L\,\frac{|z-w|}{r\cdot 2\,r}\,2\pi\,2r\\ &= \mathsf{constante}\cdot|z-w|\\ &\leqslant \mathsf{constante}\cdot\delta\\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 11.5 **(2)**. Cette deuxième partie de l'énoncé ne doit rien à l'holomorphie :

$$\left\{\begin{matrix}\mathscr{F}\text{ uniformément bornée}\\ \mathscr{F}\text{ uniformément équicontinue}\end{matrix}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \mathscr{F}\text{ normale},$$

elle est valable en remplaçant $\Omega\subset\mathbb{C}$ par un espace métrique quelconque $\big(E,d(\cdot,\cdot)\big)$.

En effet, pour un compact arbitraire $K\subset E$, munissons l'espace :

$$\mathscr{C}(K) := \big\{f\colon\ K\longrightarrow\mathbb{C}\text{ continue}\big\},$$

de la topologie de la convergence uniforme :

$$\big|f-g\big|_{\mathscr{C}(K)} := \max_{x\in K}\big|f(x)-g(x)\big|.$$

Définition 12.1. [Analogue] Une famille $\mathscr{F}\subset\mathscr{C}(K)$ est dite :

- *uniformément bornée* s'il existe $0\leqslant\mathrm{M}<\infty$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \mathrm{M} \qquad (\forall\,x\in K,\ \forall\,f\in\mathscr{F});$$

- *uniformément équicontinue* si :

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0 \quad \text{tel que}\\ &\Big(x,y\in K\text{ avec }d(x,y)\leqslant\delta\Big) \quad\Longrightarrow\quad \Big(\big|f(x)-f(y)\big|\leqslant\varepsilon \quad \forall\,f\in\mathscr{F}\Big);\end{aligned}$$

- *relativement compacte* si pour toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n\in\mathscr{F}$, il existe au moins une sous-suite $\big\{f_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers une certaine fonction continue $g\in\mathscr{C}(K)$ — mais n'appartenant pas forcément à $\mathscr{F}$ — :

$$0 = \lim_{n\to\infty}\big|f_n-g\big|_{\mathscr{C}(K)}.$$

Ici, dans un cadre topologique métrique, le terme de « *famille normale* », généralement réservé au monde holomorphe, est remplacé par « *famille relativement compacte* », ce qui correspond bien à la conception que l'adhérence $\overline{\mathscr{F}}^{|\cdot|_{\mathscr{C}(K)}}$ de $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(K)$, pour la topologie de la norme uniforme $|\cdot|_{\mathscr{C}(K)}$ est un compact contenu dans $\mathscr{C}(K)$.

Théorème 12.2. [Ascoli] *Pour toute sous-famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(K)$ de l'espace des fonctions réelles continues sur un compact $K \subset (E, d)$ d'un espace métrique, on a l'équivalence :*

$$\left\{\begin{matrix} \mathscr{F} \text{ uniformément bornée} \\ \mathscr{F} \text{ uniformément équicontinue} \end{matrix}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ normale}.$$

Plutôt que de basculer dans le monde réel, revenons plutôt au monde imaginaire (holomorphe), et démontrons l'implication $\Longrightarrow$, dont le lecteur avisé constatera qu'elle se généralise presque sans modification pour obtenir ce théorème d'Ascoli ; la réciproque, moins intéressante, est aussi laissée en exercice.

Soit donc une suite quelconque $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{F}$ dans une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ uniformément bornée et uniformément équicontinue sur les compacts $K \subset \Omega$. L'objectif est de sélectionner une sous-suite qui est uniformément convergente sur les compacts de Ω. Deux idées interviennent.

La première idée consiste à faire converger une sous-suite $\{g_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sur une collection *dénombrable dense* $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de points $w_j \in \Omega$.

La seconde consiste à constater que l'équicontinuité uniforme est la bonne hypothèse suffisante pour « juguler la sauvagerie éventuelle » (non-convergence) des suites numériques $\{g_\nu(\zeta)\}_{\nu=1}^{\infty}$ en d'*autres* points $\zeta \in \Omega \backslash \{w_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Premièrement, il est clair par densité et dénombrabilité de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ que le sous-ensemble :

$$\Omega \cap \big(\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\,\mathbb{Q}\big) \;=:\; \big\{w_j\big\}_{j=1}^{\infty}$$

est dense et dénombrable, donc représentable comme une certaine *suite*.

Au point w_1, les valeurs $\big\{f_n(w_1)\big\}_{n=1}^{\infty}$ restent bornées. Extrayons alors une sous-suite de $\{f_n\}$, notée :

$$\big\{f_{n_1}^1\big\}_{n_1=1}^{\infty},$$

convergeant en w_1 :

$$f_{n_1}^1(w_1) \underset{n_1 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1 \in \mathbb{C}.$$

Dire que c'est une sous-suite revient à dire qu'il y a une application $n_1 \longmapsto n(n_1)$ strictement croissante telle que :

$$f_{n_1}^1 \;:=\; f_{n(n_1)} \qquad \text{avec} \qquad n(n_1) \geqslant n_1 \qquad {\scriptstyle (n_1 \geqslant 1)}.$$

Au point w_2, les valeurs $\big\{f_{n_1}^1(w_2)\big\}_{n_1=1}^{\infty}$ restent aussi bornées, donc ré-extrayons :

$$f_{n_2}^2 \;:=\; f_{n_1(n_2)}^1 \;=\; f_{n(n_1(n_2))} \qquad \text{avec} \qquad n_1(n_2) \geqslant n_2 \qquad {\scriptstyle (n_2 \geqslant 1)},$$

afin que :

$$f_{n_2}^2(w_2) \underset{n_2 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_2 \in \mathbb{C}.$$

Mais alors, au point w_1, la convergence est conservée grâce à $n_1(n_2) \geqslant n_2$:

$$f_{n_2}^2(w_1) \;=\; f_{n_1(n_2)}^1(w_1) \underset{n_2 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1.$$

Diagrammatisons cela :

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}
	$\boxed{f_1^1}$		f_2^1		f_3^1	f_4^1	f_5^1	f_6^1		f_7^1		f_8^1	f_9^1	f_{10}^1		f_{11}^1
			f_1^2		$\boxed{f_2^2}$	f_3^2		f_4^2		f_5^2		f_6^2	f_7^2			f_8^2
					f_1^3			f_2^3		$\boxed{f_3^3}$		f_4^3	f_5^3			f_6^3
								f_1^4		f_2^4			f_3^4			$\boxed{f_4^4}$

Continuons cela au point w_3 :

$$f_{n_3}^3 := f_{n_2(n_3)}^2 = f_{n_1(n_2(n_3))}^1 = f_{n(n_1(n_2(n_3))} \qquad (n_3 \geqslant 1),$$

pour avoir :

$$f_{n_3}^3(w_3) \underset{n_3 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_3,$$

tout en conservant aux deux points précédents w_2, w_1 :

$$f_{n_3}^3(w_2) = f_{n_2(n_3)}^2(w_2) \underset{n_3 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_2,$$

$$f_{n_3}^3(w_1) = f_{n_1(n_2(n_3))}^1(w_1) \underset{n_3 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1,$$

parce que :

$$n_2(n_3) \geqslant n_3,$$

$$n_1\big(n_2(n_3)\big) \geqslant n_2(n_3) \geqslant n_3.$$

Généralement, après avoir extrait $j-1$ fois :

$$f_{n_1}^1(w_1) \underset{n_1 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1, \; \ldots\ldots\ldots, \; f_{n_{j-1}}^{j-1}(w_{j-1}) \underset{n_{j-1} \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_{j-1},$$

extrayons une j-ème fois :

$$f_{n_j}^j := f_{n_{j-1}(n_j)}^{j-1} = f_{n_{j-2}(n_{j-1}(n_j))}^{j-2} = \cdots\cdots\cdots = f_{n_1(\cdots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\cdots)}^1,$$

afin que :

$$f_{n_j}^j(w_j) \underset{n_j \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_j \in \mathbb{C},$$

avec par construction des inégalités mémorisant les extractions successives :

$$n_{j-1}(n_j) \geqslant n_j,$$

$$n_{j-2}\big(n_{j-1}(n_j)\big) \geqslant n_{j-1}(n_j) \geqslant n_j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n_1\big(\cdots\big(n_{j_2}\big(n_{j-1}(n_j)\big)\big)\cdots\big) \geqslant \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \geqslant n_{j-1}(n_j) \geqslant n_j,$$

et qui permettent de constater qu'aux points précédents w_{j-1}, w_{j-2}, …, w_1, les convergences sont conservées :

$$f_{n_j}^j(w_{j-1}) = f_{n_{j-1}(n_j)}^{j-1}\big(w_{j-1}\big) \underset{n_j \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_{j-1} \qquad (\text{car } n_{j-1}(n_j) \geqslant n_j),$$

$$f_{n_j}^j(w_{j-2}) = f_{n_{j-2}(n_{j-1}(n_j))}^{j-2}\big(w_{j-2}\big) \underset{n_j \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_{j-2} \qquad (\text{car } n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)) \geqslant n_j),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n_j}^j(w_1) = f_{n_1(\cdots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\cdots)}^1\big(w_1\big) \underset{n_j \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1 \qquad (\text{car } n_1(\cdots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\cdots) \geqslant n_j)).$$

Ainsi, nous sommes parvenus à garantir une convergence sur un nombre fini $j \geqslant 1$ quelconque de points $w_1, \ldots, w_j \in \Omega$.

Contrairement à une intuition d'impossibilité éventuelle, il est en fait possible de construire une sous-suite qui converge en *tous* les points infinis dénombrables $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Voici le diagramme qui donne l'idée :

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{f_1^1} & f_2^1 & f_3^1 & f_4^1 & f_5^1 \\
f_1^2 & \boxed{f_2^2} & f_3^2 & f_4^2 & f_5^2 \\
f_1^3 & f_2^3 & \boxed{f_3^3} & f_4^3 & f_5^3 \\
f_1^4 & f_2^4 & f_3^4 & \boxed{f_4^4} & f_5^4 \\
f_1^5 & f_2^5 & f_3^5 & f_4^5 & \boxed{f_5^5}
\end{array}$$

En effet, l'astuce est d'effectuer ce qu'on appelle une *extraction diagonale*, en introduisant la sous-suite :

$$g_\nu \ := \ f_\nu^\nu \qquad (\nu \geqslant 1),$$

c'est-à-dire que g_ν est le ν-ème terme de la ν-ème sous-suite extraite.

Assertion 12.3. *En* tout *point* $w_j \in \Omega \cap \big(\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\,\mathbb{Q}\big)$*, on a convergence :*

$$g_\nu\big(w_j\big) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \varphi_j \qquad (\forall\, j \geqslant 1).$$

Preuve. En effet, dès que $\nu \geqslant j$, toutes les fonctions g_ν appartiennent à la suite $\big\{f_{n_j}^j\big\}_{n_j=1}^{\infty}$, dont on vient de voir qu'elle converge en les points $w_1, \ldots, w_j$. $\square$

Comme annoncé, la deuxième idée exploite l'hypothèse d'équicontinuité uniforme des éléments de $\mathscr{F}$, donc des éléments de la suite $\big\{g_\nu = f_\nu^\nu\big\}_{\nu=1}^{\infty}$.

Proposition 12.4. *Sur un compact quelconque non vide* $K \subset \Omega$*, la suite extraite diagonale* $\big\{g_\nu = f_\nu^\nu\big\}$ *converge uniformément.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. En abrégeant :

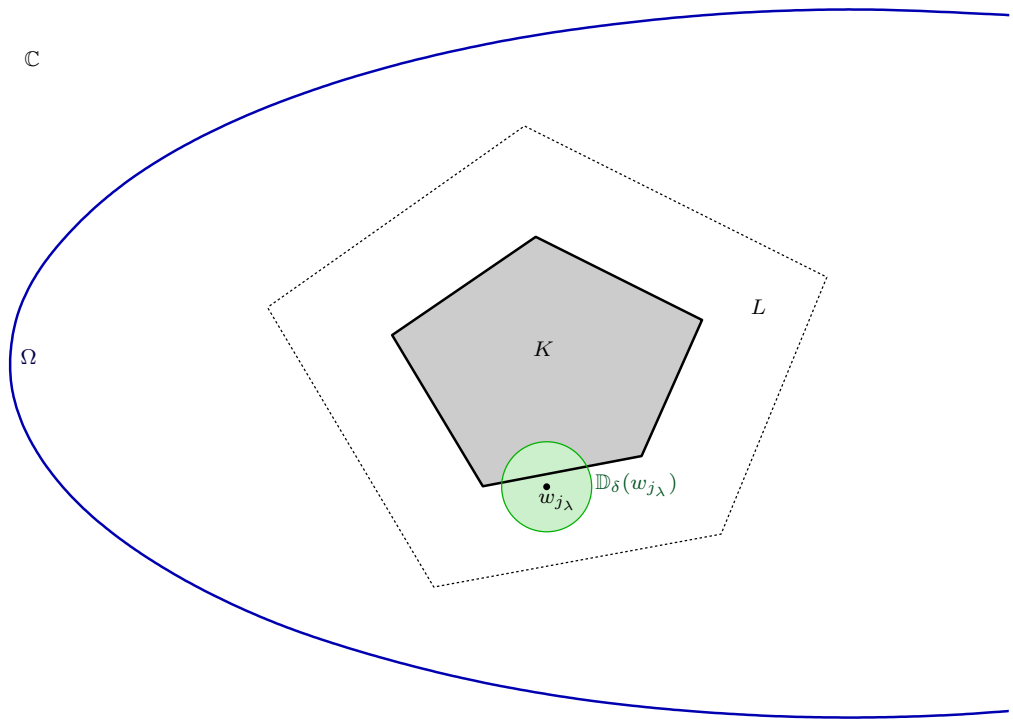
$$c \ := \ \min\big\{1,\ \tfrac{1}{2}\,\mathsf{dist}\,\big(K,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big)\big\},$$

qui satisfait $0 < c < \infty$, introduisons le sous-ensemble compact de Ω qui « élargit » K :

$$L \ := \ \big\{\zeta \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,(\zeta, K) \leqslant c\big\},$$

ainsi que l'ouvert naturel que ce plus gros compact contient :

$$\begin{aligned} U \ &:= \ \big\{\zeta \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,(\zeta, K) < c\big\} \\ &\subset \ L. \end{aligned}$$



Comme $\mathscr{F}\big|_L$ est uniformément équicontinue, il en va de même pour $\big\{g_\nu|_L\big\}_{\nu=1}^{\infty}$, donc il existe $\delta = \delta(L, \varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$\Big(z, w \in L \text{ avec } |z - w| \leqslant \delta\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\big|g_\nu(z) - g_\nu(w)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, \nu \geqslant 1\Big).$$

Si nécessaire, nous pouvons diminuer δ de façon à ce que :

$$0 \,<\, \delta \,<\, \tfrac{c}{2}.$$

Du recouvrement ouvert trivial :

$$K \,\subset\, \Omega \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{D}_\delta(w_j),$$

Borel et Lebesgue extraient pour nous un recouvrement fini :

$$K \,\subset\, \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_1}\big) \cup \cdots \cup \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\kappa}\big),$$

avec certains indices $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\kappa$. Quitte à en supprimer quelques uns qui sont inutiles, nous pouvons supposer que :

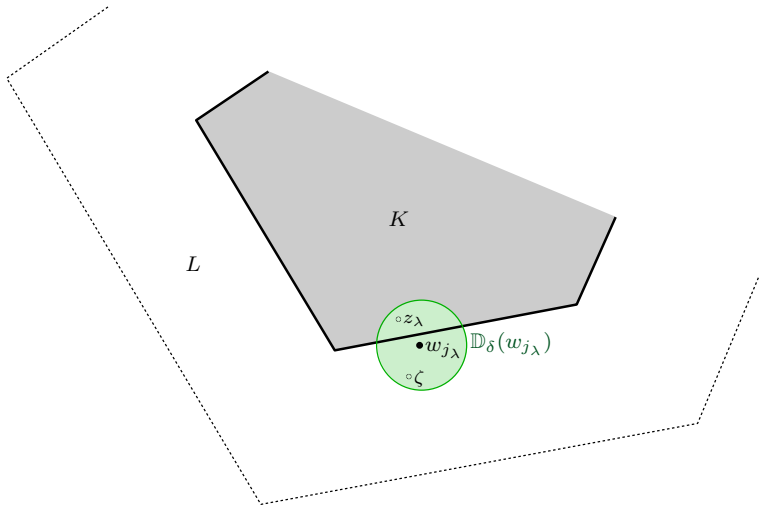
$$\emptyset \,\neq\, K \cap \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big) \qquad (\forall\, 1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa).$$

Assertion 12.5. *Alors tous ces disques sont contenus dans le compact élargi :*

$$\mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big) \,\subset\, L \qquad (\forall\, 1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa).$$

En particulier, leurs centres :

$$w_{j_1}, \ldots, w_{j_\kappa} \,\in\, L.$$



Preuve. En effet, pour $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ fixé, il existe au moins un point $z_\lambda \in K \cap \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big)$, mais alors pour tout autre point arbitraire $\zeta \in \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big)$, il vient :

$$\begin{aligned} \big|\zeta - z_\lambda\big| &\leqslant \big|\zeta - w_{j_\lambda}\big| + \big|w_{j_\lambda} - z_\lambda\big| \\ &< \delta + \delta \\ &< c, \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que $z \in U \subset L$. □

Maintenant, comme on a convergence ponctuelle en la collection finie $w_{j_1}, \dots, w_{j_\kappa}$ des centres de ces disques recouvrant K, toujours avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand pour que :

$$\nu,\, \nu' \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \Big(\big|g_\nu\big(w_{j_\lambda}\big) - g_{\nu'}\big(w_{j_\lambda}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad {\scriptstyle (\forall\, 1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa)}\Big).$$

Alors en un autre point quelconque $z \in K \subset L$, d'où $z \in \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big)$ pour au moins un indice $1 \leqslant \lambda(z) \leqslant \kappa$, l'équicontinuité uniforme sur le compact L auquel *appartiennent* les deux points z et $w_{j_{\lambda(z)}}$ permet de majorer pour tous $\nu, \nu' \geqslant \mathrm{N}$ grâce à une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \big|g_\nu(z) - g_{\nu'}(z)\big| &\leqslant \big|g_\nu(z) - g_\nu\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big)\big| + \big|g_\nu\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big) - g_{\nu'}\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big)\big| + \big|g_{\nu'}\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big) - g_{\nu'}(z)\big| \\ &\leqslant \qquad \varepsilon \qquad + \qquad \varepsilon \qquad + \qquad \varepsilon. \end{aligned}$$

Ici, la majoration des termes délicats 1 et 3 utilise crucialement en effet l'équicontinuité uniforme, laquelle vient de « forcer » la convergence uniforme en tous les points z assez proches d'un point $w_{j_{\lambda(z)}}$ en lequel la convergence ponctuelle a été arrangée à l'avance. □

En conclusion, $\big\{g_\nu = f_\nu^\nu\big\}_{\nu=1}^\infty$ converge bien uniformément sur tous les compacts $K \subset \Omega$ vers une certaine fonction-limite holomorphe dans Ω. Tout ceci termine la partie **(2)** du Théorème 11.5. □

13. Préservation de l'injectivité à la limite

Un dernier ingrédient essentiel est nécessaire avant d'entamer la démonstration proprement dite du Théorème 10.1 de l'application conforme de Riemann. À nouveau, il s'agit

d'un phénomène typiquement holomorphe, n'ayant aucun analogue vrai dans le monde réel.

Proposition 13.1. *Dans un ouvert non vide* connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$*, soit une suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions holomorphes* $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ *toutes* injectives. *Si* $\{f_n\}$ *converge uniformément sur les compacts de* Ω *vers une* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$*, alors :*

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{ou bien injective}, \\ \text{ou bien constante}. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons f non injective, à savoir, il existe $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ distincts avec $f(z_1) = f(z_2)$. Le but est de faire voir que f est constante.

À cet effet, introduisons les fonctions :

$$g_n(z) := f_n(z) - f_n(z_1) \qquad (n \geqslant 1),$$

qui ont pour seul zéro $z = z_1$. Si donc $r > 0$ est assez petit pour que $r < \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$, d'où $g_n\big|_{\overline{\mathbb{D}}_r(z_2)} \neq 0$, une formule connue comptant le nombre de zéros donne :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}\, d\zeta \qquad (n \geqslant 1).$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} g_n(z) &\xrightarrow[n\to\infty]{} f(z) - f(z_1) \\ &=: g(z). \end{aligned}$$

Observons que $g(z_2) = 0$.

Assertion 13.2. *On a* $g \equiv 0$.

Preuve. Sinon, si $g \not\equiv 0$, comme Ω est connexe, l'autre zéro z_2 de g doit être isolé, donc quitte à réduire $r > 0$, on a non-annulation :

$$g\big|_{\overline{\mathbb{D}}_r(z_2)\setminus\{z_2\}} \neq 0,$$

puis la même formule exprime l'ordre, fini, d'annulation de g en z_2 :

$$1 \leqslant \nu_g(z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta.$$

Sur le cercle $C_r(z_2)$, la non-annulation $g\big|_{C_r(z_2)} \neq 0$ et un théorème de Cauchy offrent les deux convergences uniformes :

$$\frac{1}{g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{g} \qquad \text{et} \qquad g_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} g' \qquad (\text{sur } C_r(z_2)).$$

Mais alors ces deux convergences uniformes permettent d'intervertir limite et intégration pour aboutir à une contradiction :

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}\, d\zeta \\ &= \lim_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

□

En définitive, $0 \equiv g(z) = f(z) - f(z_1)$ montre bien que f était constante. □

14. Démonstration du théorème de Riemann conforme

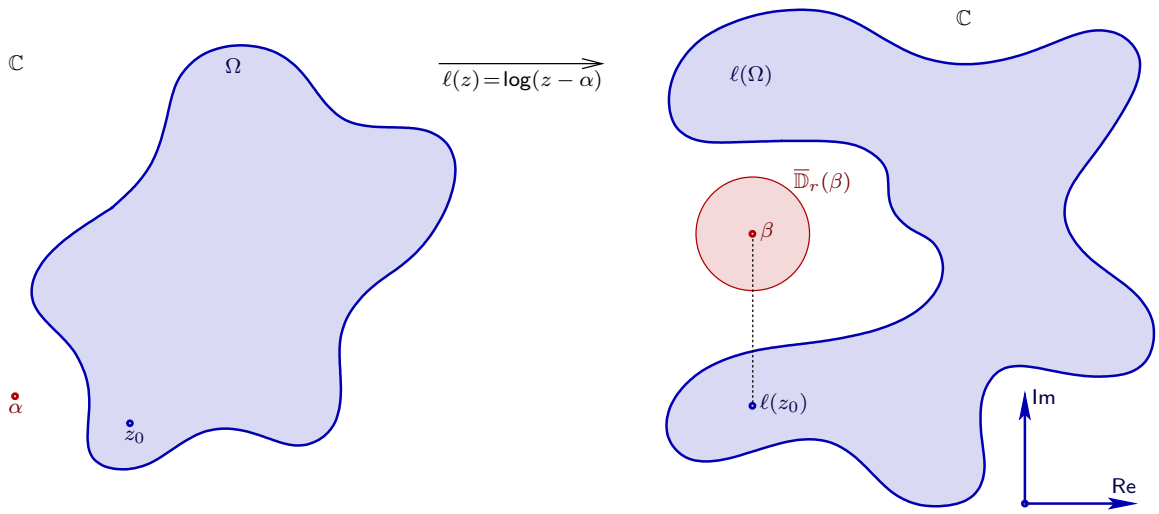
L'argumentation se déroule en trois étapes, la seconde étant la plus essentielle.

Étape 1. D'une manière qui pourrait paraître surprenante, le fait que l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ soit *distinct* de $\mathbb{C}$ est une hypothèse impliquant que Ω n'est en fait pas « gros », comme le dévoile le

Lemme 14.1. *Tout ouvert connexe et simplement connexe non vide $\emptyset \neq \Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe :*

$$f\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$$

à un ouvert (non vide) $\omega \subset \mathbb{D}$ contenu dans le disque unité *avec $0 \in \omega$.*



Démonstration. Soit donc un point $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Comme Ω est simplement connexe et comme $z - \alpha \neq 0$ dans Ω, grâce à un théorème d'un chapitre qui précède, il existe une fonction logarithme :

$$\ell(z) \;:=\; \mathsf{log}\,(z - \alpha),$$

holomorphe pour $z \in \Omega$, ce qui revient à écrire :

$$e^{\ell(z)} \;=\; z - \alpha \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Or ceci implique que ℓ est injective, car si $\ell(z_1) = \ell(z_2)$, il vient $z_1 - \alpha = z_2 - \alpha$.

Fixons un point $z_0 \in \Omega$, et translatons son image $\ell(z_0)$ verticalement d'une hauteur 2π :

$$\beta \;:=\; \ell(z_0) + 2i\pi.$$

Assertion 14.2. *Il existe $r > 0$ assez petit pour que l'image complète de Ω par $\ell(z)$ évite le disque fermé de rayon r centré en β :*

$$\mathsf{log}\,\big(\Omega - \alpha\big) \;\subset\; \mathbb{C}\big\backslash\overline{\mathbb{D}}_r(\beta).$$

Preuve. Sinon, il existerait une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \Omega$ tels que :

$$\begin{array}{c} \ell(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell(z_0) + 2i\pi \;=\; \beta \\ \Downarrow \\ z_n - \alpha \;=\; e^{\ell(z_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\ell(z_0)+2i\pi} \;=\; z_0 - \alpha, \end{array}$$

ce qui impliquerait $z_n \longrightarrow z_0$, donc $\ell(z_n) \longrightarrow \ell(z_0)$ par continuité — contradiction avec le point de départ ! $\square$

Ainsi :

$$\big|\ell(z) - \beta\big| \,>\, r \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Effectuons une inversion (renormalisée) centrée au point β, afin d'échanger l'intérieur du cercle $C_r(\beta)$ avec son extérieur :

$$g(w) \,:=\, \frac{r}{w-\beta},$$

ce qui donne par composition :

$$g\big(\ell(z)\big) \,=\, \frac{r}{\log\,(z-\alpha) - \beta}.$$

Comme ℓ et g sont injectives, leur composition $g \circ \ell$ l'est aussi. Le Théorème 6.2 fondamental garantit alors que :

$$g \circ \ell \colon \quad \Omega \;\xrightarrow{\sim}\; g \circ \ell\,(\Omega),$$

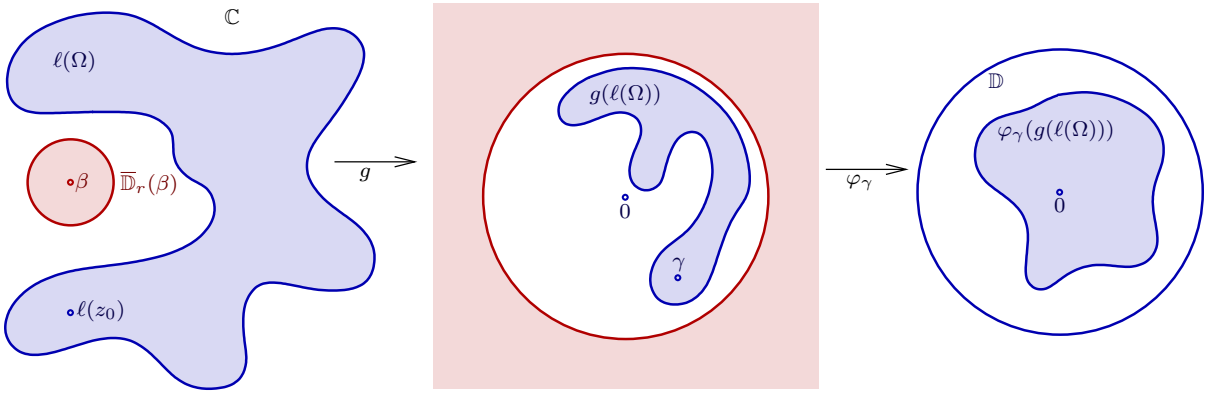
est un biholomorphisme. En particulier, $g \circ \ell(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Assertion 14.3. *On a* $g \circ \ell(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned} \big|g \circ \ell(z)\big| \,&=\, \frac{r}{|\ell(z) - \beta|} \\ &<\, \frac{r}{r} \,=\, 1. \end{aligned}$$

$\square$

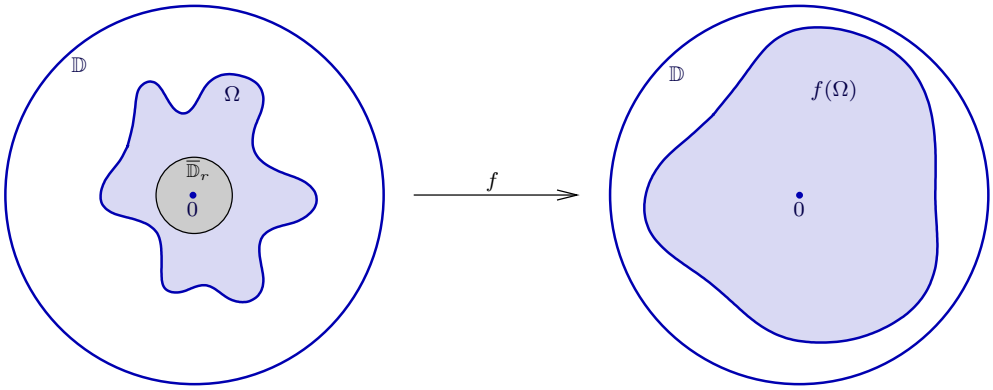


Toutefois, cet ouvert $g \circ \ell(\Omega) \subset \mathbb{D}$ ne contient pas forcément l'origine. Qu'à cela ne tienne, puisqu'il contient le point $g\big(\ell(z_0)\big) =: \gamma$, nous n'avons qu'à le composer avec l'automorphisme $\varphi_\gamma(w) = \frac{\gamma - w}{1 - \overline{\gamma} w}$ du disque unité qui envoie γ sur $0 \in \mathbb{D}$, pour obtenir en conclusion :

$$f \,:=\, \varphi_\gamma \circ g \circ \ell \qquad \text{avec} \qquad \omega \,:=\, \varphi_\gamma\big(g\big(\ell(\Omega)\big)\big) \,\ni\, 0. \qquad \square$$

Étape 2. Grâce à ce qui précède, on peut dorénavant supposer que :

$$0 \,\in\, \Omega \,\subset\, \mathbb{D}.$$



Comme promis, introduisons alors l'espace fonctionnel :

$$\mathscr{R} \,:=\, \big\{f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \text{ holomorphe}\colon\ f(0)=0 \text{ et } f \text{ injective}\big\},$$

qui est non vide, puisqu'il contient l'identité $z \longmapsto z$. Souvenons-nous qu'alors toutes ces $f\colon \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ sont des biholomorphismes.

Cette famille $\mathscr{R}$ est uniformément bornée — sans avoir besoin de se cantonner à des compacts ! —, car $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$ et toute $f \in \mathscr{R}$. Le Théorème 11.5 de Montel affirme alors que $\mathscr{R}$ est uniformément équicontinue et normale.

Ensuite, soit $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}}_r(0) \subset \Omega$. De la formule de Cauchy pour $g \in \mathscr{R}$ quelconque :

$$g'(0) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta,$$

découle une majoration :

$$\begin{aligned}\big|g'(0)\big| \,&\leqslant\, \frac{1}{2\pi}\cdot \max_{|\zeta|=r}|g|\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2\pi r\\ &\leqslant\, 1\cdot\frac{1}{r}\\ &<\, \infty,\end{aligned}$$

bornant uniformément les modules des dérivées en 0, ce qui garantit la finitude de :

$$s \,:=\, \sup_{g\in\mathscr{R}}\big|g'(0)\big| \,<\, \infty.$$

Avec l'identité $g(z)=z\in\mathscr{R}$, on voit que :

$$1 \,\leqslant\, s.$$

Proposition 14.4. [Principale] *Il existe une fonction $f \in \mathscr{R}$ — c'est-à-dire holomorphe injective $\Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ avec $f(0)=0$ — qui* réalise *ce supremum :*

$$s \,=\, \big|f'(0)\big| \qquad (<\infty).$$

Démonstration. Prenons une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{R}$ maximisante :

$$\big|f_n'(0)\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} s.$$

Tout notre programme se réalise précisément maintenant, parce que le Théorème 11.5 de Montel nous offre une sous-suite, que nous noterons encore $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pour simplifier, qui converge, uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$, vers une certaine fonction holomorphe :

$$f \,\in\, \mathscr{O}(\mathbb{D}).$$

Un théorème de Cauchy donne la convergence des dérivées $f'_n \longrightarrow f'$, donc $|f'(0)| = s$.

Rappelons que dans la Définition 11.6 du concept de *famille normale* $\mathscr{R} \subset \mathscr{O}(\Omega)$, nous n'avons pas demandé que les fonctions-limites appartiennent *encore* à la famille $\mathscr{R}$, et donc ici, il reste à argumenter que :

$$f \overset{?}{\in} \mathscr{R}.$$

C'est facile ! Premièrement, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ offre $f(0) = 0$ sans effort.

Deuxièmement, puisque les f_n sont toutes injectives, et puisque f est non constante — car $|f'(0)| = s \geqslant 1$ —, la Proposition 13.1 offre l'injectivité de f. Ainsi, les deux conditions pour que $f \in \mathscr{R}$ sont satisfaites. $\square$

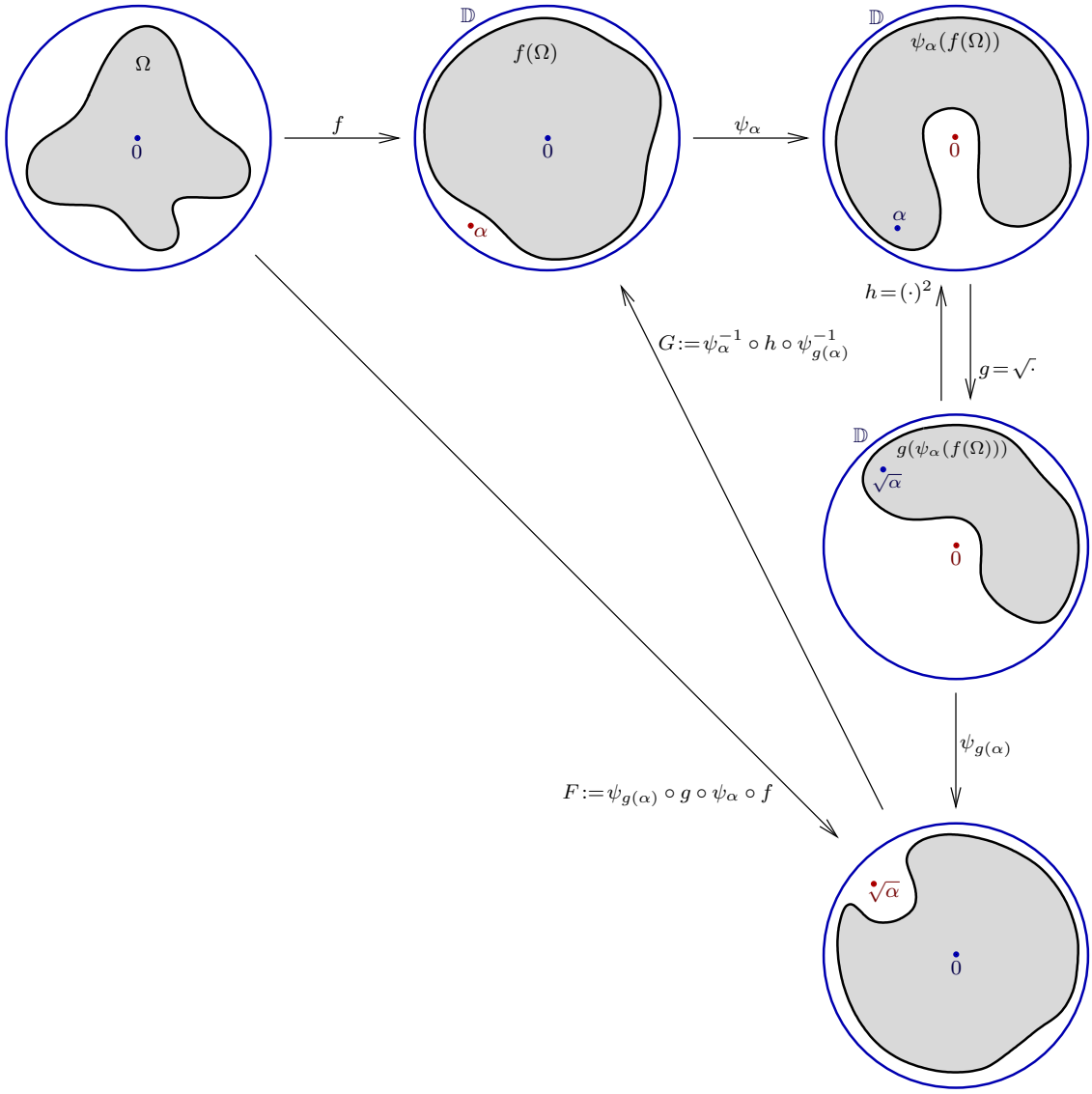
Étape 3. Dans cette dernière étape, nous établissons que cette fonction $f \in \mathscr{R}$ réalisant le supremum de la dérivée en 0 constitue un biholomorphisme $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$. Comme on sait que $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ en est déjà un par injectivité, il ne reste plus qu'à traiter la *surjectivité*.

Affirmation 14.5. *La fonction $f \in \mathscr{R}$ satisfaisant $|f'(0)| = \sup\limits_{g \in \mathscr{R}} |g'(0)|$ est surjective $f \colon \Omega \twoheadrightarrow \mathbb{D}$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un :

$$\alpha \in \mathbb{D} \big\backslash f(\Omega).$$

Pour aboutir à une contradiction, nous allons construire une autre fonction $F \in \mathscr{R}$ de dérivée strictement supérieure $\big|F'(0)\big| > |f'(0)|$ à l'origine.



Considérons l'automorphisme ψ_α de $\mathbb{D}$ qui échange 0 et α :

$$\psi_\alpha(z) \;=\; \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Comme Ω est simplement connexe, l'ouvert $\psi_\alpha(\Omega)$ l'est aussi, et il ne contient pas $\psi_\alpha(\alpha) = 0$. Nous pouvons donc définir une fonction racine carrée :

$$g(w) \;:=\; \sqrt{w} \;:=\; e^{\frac{1}{2}\log w},$$

holomorphe dans $\psi_\alpha \circ g(\Omega)$, et en composant avec g, on divise essentiellement par 2 l'« écartement angulaire » de $\psi_\alpha \circ f(\Omega)$ dans $\mathbb{D}$, comme tente de l'illustrer la figure.

Enfin, pour ramener le point $g \circ \psi_\alpha \circ f(0) = g \circ \psi_\alpha(0) = g(\alpha)$ à être l'origine, introduisons la composition :

$$F \;:=\; \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f.$$

Assertion 14.6. *On a $F \in \mathscr{R}$.*

Preuve. On vient de faire $F(0) = 0$. Ensuite, F envoie Ω dans $\mathbb{D}$, puisque ψ_α, g, $\psi_{g(\alpha)}$ envoient $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Enfin, f est injective par hypothèse, ψ_α est un automorphisme, $g(w) = \sqrt{w}$ est injective, $\psi_{g(\alpha)}$ est un automorphisme, donc la composition $F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$ est aussi injective. $\square$

En notant $h(w) := w^2$ la fonction réciproque, il vient :

$$f = \underbrace{\psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}}_{=:\, G} \circ F.$$

Cette nouvelle fonction composée G envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et fixe l'origine :

$$G(0) = \psi_\alpha^{-1}\big(h\big(\psi_{g(\alpha)}^{-1}(0)\big)\big) = \psi_\alpha^{-1}\big(h\big(g(\alpha)\big)\big) = \psi_\alpha^{-1}\big((\sqrt{\alpha})^2\big) = \psi_\alpha(\alpha) = 0,$$

mais $G\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ n'est *pas* injective, car $h(w) = w^2$ ne l'est clairement pas.

Par conséquent, la partie **(3)** du Lemme 8.1 de Schwarz implique :

$$\big|G'(0)\big| < 1 \qquad \text{(strictement)}.$$

Une dérivation à l'origine de $f = G \circ F$ donne :

$$f'(0) = G'\big(F(0)\big)\, F'(0) = G'(0)\, F'(0),$$

et par conséquent :

$$|f'(0)| < \big|F'(0)\big|,$$

en contradiction *déflagrationnelle et libératrice* [1] avec l'hypothèse de maximalité de $|f'(0)|$ dans la famille $\mathscr{R}$. $\square$

Pour terminer complètement l'argumentation du Théorème 10.1, il ne reste plus qu'à multiplier f par un nombre complexe approprié de module 1 pour avoir $f'(0) \in \mathbb{R}$ avec $f'(0) > 0$. $\square$

15. Synthèse : sept caractérisations de la connexité simple

En examinant soigneusement les arguments de la démonstration du Théorème 10.1 de Riemann conforme, on se convainc que le seul endroit où l'hypothèse de simple connexité de l'ouvert $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ a été utilisée, c'était pour se servir d'une fonction logarithme et d'une fonction racine carrée. Par conséquent, nous aurions pu nous contenter de supposer que Ω est *holomorphiquement simplement connexe*, au sens où $0 = \int_\gamma f(z)\, dz$ pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$ et toute $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, puisque nous avons démontré, à la fin du chapitre consacré aux séries de Laurent, que ceci suffit à garantir l'existence de logarithmes et de racines carrées.

Nous pouvons donc enfin énoncer un résultat qui réalise une synthèse théorique très importante. Ici, nous supposerons l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ *borné*, c'est-à-dire contenu dans un disque de rayon suffisamment grand, parce que la condition **(iv)** ci-dessous n'est par exemple pas satisfaite quand Ω est une bande infinie dirigée par une droite, simplement connexe, mais dont le complémentaire $\Omega \backslash \mathbb{C}$ consiste en *deux* composantes connexes.

1. Chapitre de 25 pages tapé intégralement (hors figures) en LaTeX-non-stop le Dimanche 7 Mai 2018, de 08h15 à 18h05.

Théorème 15.1. *Pour un ouvert connexe non vide* borné $\Omega \subset \mathbb{C}$*, les* 7 *conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\Omega \cong \mathbb{D}$ *est biholomorphe au disque unité* $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

(ii) Ω *est simplement connexe.*

(iii) $0 = \mathsf{Ind}_\gamma(w)$ *pour toute courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée* $\gamma \subset \Omega$ *et tout point* $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

(iv) $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *est connexe.*

(v) *La propriété d'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des polynômes sur les compacts est satisfaite :*

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, K \subset \Omega \text{ compact} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \textit{tel que} \quad \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(vi) *Pour toute courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée, on a :*

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

(vii) *Primitives, logarithmes, et racines existent :*

- $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)$, $\exists\, F \in \mathscr{O}(\Omega)$ *telle que* $F' = f$ *;*
- $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *ne s'annulant jamais,* $\exists\, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ *telle que* $f = e^g$ *;*
- $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *ne s'annulant jamais,* $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\exists\, h \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *telle que* $f = h^\alpha$.

Démonstration. Évidemment, quand $\Omega \subset \mathbb{C}$ est borné, il est clair que l'hypothèse $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$, du Théorème 10.1 de Riemann conforme est satisfaite.

Toutes les implications descendantes :

$$\textbf{(i)} \Longrightarrow \textbf{(ii)} \Longrightarrow \textbf{(iii)} \Longrightarrow \textbf{(iv)} \Longrightarrow \textbf{(v)} \Longrightarrow \textbf{(vi)} \Longrightarrow \textbf{(vii)},$$

ont déjà été démontrées dans les chapitres qui précèdent.

L'implication ascendante qui remonte d'un seul coup tous les échelons de cette échelle à saumon, de loin la plus difficile :

$$\textbf{(i)} \Longleftarrow \textbf{(vii)},$$

n'est autre que le Théorème 10.1 de Riemann conforme que nous venons d'établir, en tenant compte de notre observation que l'hypothèse de simple connexité de Ω peut être remplacée par l'hypothèse **(vi)** que Ω est holomorphiquement simplement connexe. □

Quand $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ n'est pas forcément borné, il faut modifier cet énoncé en prenant le complémentaire par rapport au plan complexe $\mathbb{C}$ auquel on ajoute un point à l'infini :

$$\big(\mathbb{C} \cup \{\infty\}\big)\backslash\Omega.$$

Cet ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à une sphère, dite *de Riemann.*

16. Exercices

Exercice 1. EE

Fonctions entières et produits infinis

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les fonctions holomorphes *entières*, à savoir celles qui sont définies sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}$ consistant en le plan complexe tout entier.

D'après le principe des zéros isolés, toute $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle ne peut s'annuler que sur une collection de points n'ayant aucun point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, si l'ensemble :

$$Z(f) := \big\{a \in \mathbb{C}\colon\ f(a) = 0\big\},$$

est de cardinal infini, il consiste nécessairement en une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = Z(f)$ de points tendant vers :

$$\infty = \lim_{n\to\infty} |a_n|.$$

Inversement, étant donné une suite quelconque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ qui s'annule en ces points et nulle part ailleurs ? Le théorème de Weierstrass affirme que la réponse est *oui*, à condition de corriger le produit naïf :

$$\big(z - a_1\big)\,\big(z - a_2\big)\,\big(z - a_3\big)\,\cdots$$

par des facteurs appropriés afin de le rendre convergent.

Autre question : comment les fonctions holomorphes entières croissent-elles à l'infini ? Ici, la théorie va illustrer un principe général important : plus la croissance est grande, plus il peut y avoir de zéros.

D'ailleurs, ce principe se manifeste déjà clairement dans le cas simple des polynômes :

$$P(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d \qquad (a_0 \neq 0),$$

de croissance à l'infini :

$$\max_{|z|=\mathrm{R}} \big|P(z)\big| \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\sim} |a_0|\,\mathrm{R}^d,$$

et qui possèdent un nombre de zéros (comptés avec multiplicité) gouverné par cette croissance, d'après le théorème fondamental de l'algèbre.

Pour les fonctions entières générales (non nécessairement polynomiales), c'est la *formule de Jensen*, par laquelle nous allons commencer, qui va ouvrir un accès à des informations sur leurs zéros.

2. Formule de Jensen

Un court préliminaire s'impose. Soit $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0)$ un disque de rayon $\mathrm{R} > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit $h \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0)\big)$. Pour tout rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$, la formule de Cauchy donne :

$$h(z_0) \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta,$$

d'où en paramétrant $\zeta = z_0 + r\, e^{i\theta}$:

$$h(z_0) \,=\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta,$$

ce qui veut dire que la valeur au centre est égale à la moyenne sur (tout) le cercle $C_r(z_0)$.

En prenant la partie réelle, on obtient une *formule de la moyenne :*

$$\mathsf{Re}\, h(z_0) \,=\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathsf{Re}\, h\big(z_0 + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta. \tag{2.1}$$

Choisissons maintenant $z_0 := 0$, et abrégeons $\mathbb{D}_{\mathrm{R}} := \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)$ ainsi que $C_{\mathrm{R}} := C_{\mathrm{R}}(0)$. Le résultat suivant relie les zéros d'une fonction holomorphe à ce qu'on connaît d'elle sur le bord.

Théorème 2.2. [Formule de Jensen] *Soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \supset \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \cup C_{\mathrm{R}}$ satisfaisant :*

$$f(0) \,\neq\, 0 \qquad \textit{et} \qquad f\big|_{C_{\mathrm{R}}} \,\neq\, 0.$$

Si $z_1, \dots, z_{\mathrm{L}}$ avec $\mathrm{L} \geqslant 0$ entier, sont les zéros de f dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, comptés (répétés) avec multiplicités, alors :

$$\mathsf{log}\,\big|f(0)\big| \,=\, \sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \mathsf{log}\, \frac{|z_\ell|}{\mathrm{R}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathsf{log}\,\big|f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|\, d\theta.$$

En fait, le principe des zéros isolés assure que ce nombre de zéros $0 \leqslant \mathrm{L} < \infty$ est *fini* — il peut être nul ! —, et une autre manière d'exprimer cela est d'introduire les zéros *distincts* de f :

$$w_1, \dots, w_{\mathrm{K}} \qquad \text{de multiplicités} \qquad m_1, \dots, m_{\mathrm{K}} \,\geqslant\, 1,$$

avec $\mathrm{L} = m_1 + \cdots + m_{\mathrm{K}}$, de telle sorte qu'après renumérotation éventuelle :

$$\begin{aligned} z_1 \,=\, \cdots \,=\, z_{m_1} \,=\, w_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{\mathrm{L}-m_{\mathrm{K}}+1} \,=\, \cdots \,=\, z_{\mathrm{L}} \,=\, w_{\mathrm{K}}, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que dans la liste $z_1, \dots, z_{\mathrm{L}}$, on *répète* chaque zéro autant de fois que sa multiplicité l'exige.

Puisque $z_1, \dots, z_{\mathrm{L}} \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ *sont* les zéros de $f\big|_{\mathbb{D}_{\mathrm{R}} \cup C_{\mathrm{R}}}$, on a :

$$0 \,\neq\, f(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \cup C_{\mathrm{R}} \setminus \{z_1, \dots, z_{\mathrm{L}}\}).$$

Démonstration. Observons que si f_1 et f_2 sont deux fonctions satisfaisant les hypothèses et la conclusion du théorème, alors leur produit $f := f_1 f_2$ satisfait aussi les hypothèses, donc en utilisant $\mathsf{log}\,\big(x_1\, x_2\big) = \mathsf{log}\, x_1 + \mathsf{log}\, x_2$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, une simple addition des deux formules de Jensen pour f_1 et pour f_2 donne la formule désirée pour f.

Introduisons alors la fonction :

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_{\mathrm{L}})} \\ &= \frac{f(z)}{(z-w_1)^{m_1}\cdots(z-w_{\mathrm{K}})^{m_{\mathrm{K}}}}, \end{aligned}$$

définie et holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_1,\ldots,z_{\mathrm{L}}\} = \Omega\backslash\{w_1,\ldots,w_{\mathrm{K}}\}$. Mais comme on peut écrire au voisinage de chaque zéro :

$$f(z) = \big(z-w_k\big)^{m_k}\big[\alpha_k + \mathrm{O}(z-w_k)\big] \qquad (1\leqslant k\leqslant \mathrm{K}),$$

avec $\alpha_k \neq 0$, il est clair que g n'a que des singularités illusoires en les w_k, donc :

$$g \in \mathscr{O}(\Omega) \qquad \text{avec} \qquad g(z_1) \neq 0,\ \ldots,\ g(z_{\mathrm{L}}) \neq 0,$$

et comme ni le numérateur de g, ni son dénominateur ne s'annulent ailleurs, nous déduisons que :

$$g\big|_{\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\cup C_{\mathrm{R}}} \neq 0 \qquad \text{(partout)}.$$

Grâce à l'observation préliminaire, *en ré-écrivant :*

$$f(z) = g(z)\big(z-z_1\big)\cdots\big(z-z_{\mathrm{L}}\big),$$

il suffit d'établir la formule pour deux types de fonctions.

Assertion 2.3. *Si une fonction g, holomorphe dans un voisinage ouvert de $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\cup C_{\mathrm{R}}$, ne s'annule jamais, alors :*

$$\log\big|g(0)\big| = 0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big|g\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)\big|\,d\theta.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{R}' > \mathrm{R}$ assez proche avec $\mathbb{D}_{\mathrm{R}'} \supset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}\cup C_{\mathrm{R}}$ et avec $g \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}'}\big)$ jamais nulle dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}'}$. Puisque $\mathbb{D}_{\mathrm{R}'}$ est simplement connexe, un théorème déjà vu (à la fin du chapitre consacré aux séries de laurent) fournit un « logarithme » de g, à savoir une fonction $h \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}'}\big)$ telle que :

$$g(z) = e^{h(z)}.$$

Il vient :

$$\big|g(z)\big| = e^{\mathsf{Re}\,h(z)},$$

puis :

$$\log\big|g(z)\big| = \mathsf{Re}\,h(z),$$

et la formule de la moyenne (2.1) conclut. □

Assertion 2.4. *Pour $w \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ quelconque, la fonction $f(z) := z - w$ satisfait :*

$$\log|w| = \log\frac{|w|}{\mathrm{R}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big|\mathrm{R}\,e^{i\theta} - w\big|\,d\theta.$$

Notons que le membre de gauche est bien $\log|f(0)|$ ici.

Démonstration. Écrivons à droite $\mathrm{R}\left(e^{i\theta} - \frac{w}{\mathrm{R}}\right)$:

$$\log|w| \overset{?}{=} \log|w| - \log\mathrm{R} + \log\mathrm{R} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{i\theta} - \frac{w}{\mathrm{R}}\right|\,d\theta,$$

simplifions, et renommons $a := \frac{w}{\mathrm{R}}$ pour demander si on a bien :

$$\begin{aligned}
0 &\overset{?}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{i\theta}-a\right| d\theta \\
[|e^{i\theta}|=1] \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1-a\,e^{-i\theta}\right| d\theta \\
[\theta \longmapsto -\theta] \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1-a\,e^{i\theta}\right| d\theta \qquad (\forall\,|a|<1)?
\end{aligned}$$

Mais oui ! Car la fonction holomorphe :

$$g(z) := 1 - a\,z,$$

jamais nulle dans $\{|z| \leqslant 1\}$, satisfait les hypothèses de l'Assertion 2.3 précédente, où $\mathrm{R}=1$, avec $\log|g(0)| = \log 1 = 0$. □

Ceci conclut la démonstration du Théorème 2.2. □

Maintenant, toujours dans un disque $\mathbb{D}_{\mathrm{R}} = \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(0)$ de rayon $0 < \mathrm{R} < \infty$, sur tout sous-disque ouvert $0 \in \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ de rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$, introduisons une notation pour toute $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_{\mathrm{R}})$ avec $f \not\equiv 0$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_f(r) := {} & \text{nombre de zéros de } f \text{ dans } \mathbb{D}_r \\
& \text{comptés avec multiplicité.}
\end{aligned}$$

De manière dynamique, il faut s'imaginer que les disques $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ croissent, et voir $r \longmapsto \mathfrak{n}_f(r)$ comme une *fonction* à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Observation 2.5. *La fonction $r \longmapsto \mathfrak{n}_f(r)$ est croissante.* □

En termes de fonctions indicatrices, lorsque $\mathrm{R} < \infty$, en supposant comme dans le Théorème 2.2 que f n'a qu'un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 0$ de zéros $z_1, \ldots, z_{\mathrm{L}} \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, on a :

$$\mathfrak{n}_f(r) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ |z_\ell|<r}}^{\mathrm{L}} 1 = \sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \mathbf{1}_{]|z_\ell|,\infty[}(r), \tag{2.6}$$

et donc nous pouvons transformer comme suit la somme dans le membre de droite de la formule de Jensen (affectée d'un signe moins) :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \log\frac{\mathrm{R}}{|z_\ell|} &= \sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \int_{|z_\ell|}^{\mathrm{R}} \frac{dr}{r} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \int_0^{\mathrm{R}} \mathbf{1}_{]|z_\ell|,\infty[}(r)\,\frac{dr}{r} \\
&= \int_0^{\mathrm{R}} \left(\sum_{\ell=1}^{\mathrm{L}} \mathbf{1}_{]|z_\ell|,\infty[}(r)\right)\frac{dr}{r} \\
[\text{Reconnaître (2.6)}] \qquad &= \int_0^{\mathrm{R}} \mathfrak{n}_f(r)\,\frac{dr}{r}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.7. [Réexpression de Jensen] *Pour* $f \in \mathscr{O}\big(\Omega \supset \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \cup C_{\mathrm{R}}\big)$ *avec* $f(0) \neq 0$ *et* $f\big|_{C_{\mathrm{R}}} \neq 0$*, on a :*

$$\int_0^{\mathrm{R}} \mathfrak{n}_f(r)\,\frac{dr}{r} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big|f\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)\big|\,d\theta - \log|f(0)|. \qquad \square$$

Intuitivement, pour $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière, en considérant que la constante terminale $-\log|f(0)|$ devient négligeable, lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, cette égalité s'interprète comme établissant une relation entre le nombre de zéros, à gauche, et la « *croissance* », à droite.

Afin de préciser ce qu'on peut entendre par *croissance*, voici un concept — parmi d'autres.

Définition 2.8. On dit qu'une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ a un ordre de croissance $\leqslant \rho$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, s'il existe deux constantes $0 \leqslant \mathrm{A}, \mathrm{B} < \infty$ telles que :

$$\big|f(z)\big| \;\leqslant\; \mathrm{A}\,e^{\mathrm{B}\,|z|^\rho} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

L'*ordre de croissance* ρ_f de f est alors le plus petit de ces ρ :

$$\rho_f \;:=\; \inf \rho.$$

Il peut être infini — penser à e^{e^z} —, mais nous n'étudierons que les cas où $\rho_f < \rho < \infty$. Par exemple, e^z est d'ordre 1 (exercice), et e^{z^2} d'ordre 2 (exercice).

Le premier résultat intéressant de la théorie majore le nombre de zéros en termes de la croissance.

Théorème 2.9. *Si* $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ *a un ordre de croissance* $\leqslant \rho < \infty$*, alors il existe une constante* $0 \leqslant C < \infty$ *telle que :*

$$\mathfrak{n}_f(r) \;\leqslant\; C\,r^\rho \qquad (\forall\, r \geqslant 1).$$

De plus, si $z_1, z_2, z_3, \ldots$ *sont tous les zéros* non nuls *de* f*, alors pour tout* $\rho' > \rho$ *:*

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} \;<\; \infty.$$

Le cas où f n'a qu'un nombre fini de zéros, voire n'a aucun zéro, est inclus dans cet énoncé, mais devient trivial.

De plus, un zéro éventuel de f à l'origine ne perturbe rien, puisque l'objet d'étude est le comportement de f sur $\mathbb{D}_r$ quand $r \longrightarrow \infty$.

Démonstration. Soit $\nu := \nu_f(0)$ l'ordre de f à l'origine, d'où :

$$f(z) \;=\; z^\nu\,\big(\alpha + \mathrm{O}(z)\big),$$

avec $\alpha \neq 0$. Si nous introduisons la fonction :

$$F(z) \;:=\; \frac{f(z)}{z^\nu\,\alpha},$$

il vient :

$$\mathfrak{n}_F(r) \;=\; \mathfrak{n}_f(r) - \nu,$$

décalage par une constante devenant invisible quand $r \longrightarrow \infty$, quitte à augmenter la constante C de la majoration affirmée par le théorème. Nous pouvons donc supposer que :

$$f(0) \;=\; 1.$$

L'idée-clé est d'écrire la formule de Jensen — au centre ! — pour $\mathrm{R} = 2\,r$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_f(r)\log 2 &= \mathfrak{n}_f(r)\,\big[\log(2\,r) - \log(r)\big] \\
&= \mathfrak{n}_f(r)\int_r^{2r}\frac{ds}{s} \\
\text{[Croissance]} \qquad &= \int_r^{2r}\mathfrak{n}_f(s)\,\frac{ds}{s} + 0 \\
\text{[Jensen]} \qquad &\leqslant \int_0^{2r}\mathfrak{n}_f(s)\,\frac{ds}{s} + \underline{\log|f(0)|}_{\circ} \overset{\mathrm{J}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\big|f\big(2re^{i\theta}\big)\big|\,d\theta \\
\text{[Hypothèse]} \qquad &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\big|\mathrm{A}\,e^{\mathrm{B}\,|2r|^{\rho}}\big|\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{2\pi}\Big(\log\mathrm{A} + \mathrm{B}\,2^{\rho}\,r^{\rho}\Big) \\
[\forall\, r \geqslant 1] \qquad &\leqslant \mathsf{constante}\cdot r^{\rho},
\end{aligned}$$

et l'inégalité entre membres extrêmes donne bien $\mathfrak{n}_f(r) \leqslant C\,r^{\rho}$.

Ensuite, puisque tous les zéros z_ℓ, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$, de f sont non nuls, et deviennent de module $|z_\ell| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, avec $\rho' > \rho$ qui garantit :

$$2^{\rho'-\rho} > 1,$$

l'idée-clé est de décomposer $\{|z| \geqslant 1\}$ en anneaux dyadiques successifs en commençant par décomposer :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} = \underbrace{\sum_{|z_\ell|<1}\frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}}}_{<\infty} + \sum_{j=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{2^j\leqslant|z_\ell|<2^{j+1}}\frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}}\Bigg),$$

la première somme étant finie car il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$ d'après le principe des zéros isolés, afin de majorer la deuxième somme comme suit pour conclure :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{2^j\leqslant|z_\ell|<2^{j+1}}\frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}}\Bigg) &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\mathfrak{n}_f\big(2^{j+1}\big)\,\frac{1}{(2^j)^{\rho'}} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{\infty}C\,2^{(j+1)\rho}\,\frac{1}{2^{j\rho'}} \\
&= C\,2^{\rho}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{\rho'-\rho})^j} \\
&= C\,2^{\rho}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\rho'-\rho}}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

□

3. Produits infinis

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite quelconque de nombres complexes $a_n \in \mathbb{C}$. Dans l'étude des séries infinies $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, il est bien connu que la convergence nécessite que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, parfois rapidement. De manière analogue, si on souhaite élaborer une théorie des *produits* infinis convergents :

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n,$$

on s'attend à ce que les b_n tendent (rapidement) vers 1 — sinon le produit divergera ! C'est pourquoi on écrira dorénavant $b_n = 1 + a_n$, en ayant en tête que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + a_n\big) \;=\; \textbf{?}.$$

Les propriétés spéciales du nombre 0 relativement à la multiplication entraînent pour les produits infinis quelques particularités qui n'ont pas de contrepartie pour les séries : si $1 + a_{n_0} = 0$ pour un certain n_0, on a $\prod_{n=1}^{\mathrm{N}} (1 + a_n) = 0$ dès que $\mathrm{N} \geqslant n_0$, d'où la convergence triviale $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0$.

Formulons une première définition dans laquelle nous excluons tout facteur $1 + a_n$ qui pourrait être nul, définition qui est classique dans certains livres mais que nous n'utiliserons pas vraiment dans la théorie des fonctions holomorphes.

Définition 3.1. [Non utilisée] Pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes avec $a_n \neq -1$ pour tout n, si la limite :

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1 + a_n\big) \;=:\; \ell,$$

existe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire existe *et est non nulle*, on dit que le produit infini des $1 + a_n$ *converge*, et on le note :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + a_n\big) \;\in\; \mathbb{C}^*.$$

Il importe d'observer que ce produit infini est alors considéré comme *non convergent* lorsque la limite est égale à zéro :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1 + a_n\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{produit infini divergent.}$$

Ensuite, en abrégeant :

$$B_{\mathrm{N}} \;:=\; \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1 + a_n\big) \qquad (\mathrm{N} \geqslant 1),$$

lorsque le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = \ell \in \mathbb{C}^*$ converge donc vers une limite *non nulle*, il est clair que :

$$1 + a_{\mathrm{N}} \;=\; \frac{B_{\mathrm{N}}}{B_{\mathrm{N}-1}} \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} \;=\; 1,$$

et ainsi, une condition nécessaire pour la convergence dans $\mathbb{C}^*$ est que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; 0.$$

Comme la fonction logarithme transforme un produit en une somme, et comme $\log(1+z) \approx z$ pour $z \in \mathbb{C}$ petit :

$$\begin{aligned} \log \prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log\big(1+a_n\big) \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned}$$

on pourrait croire que la convergence d'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ équivaut à la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mais l'Exercice 1 montre qu'il n'en est rien :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge dans } \mathbb{C} \quad \not\Longrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) \quad \text{converge dans } \mathbb{C}^*.$$

De plus, dans la théorie des produits infinis, on souhaite absolument préserver la propriété suivante des produits finis :

« *Pour qu'un produit de nombres complexes soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.* »

Cependant, malheureusement, l'exemple des facteurs tous différents de zéro :

$$1+a_n := 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \qquad (n \geqslant 1),$$

montre, par télésco(do ?)page, que :

$$B_{\mathrm{N}} = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1+a_n\big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1} = \frac{1}{\mathrm{N}+1} \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ peut converger, *vers zéro*, *mais sans qu'aucun de ses facteurs soit nul*.

D'ailleurs, ce — mauvais (garçon ?), très mauvais (garçon de Marçay ?) — exemple pour lequel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -\infty,$$

montre aussi incidemment que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge dans } \mathbb{C} \quad \not\Longleftarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) \quad \text{converge dans } \mathbb{C},$$

et donc aucune implication n'est vraie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge dans } \mathbb{C} \quad \not\Longleftarrow \quad \not\Longrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) \quad \text{converge dans } \mathbb{C}\,!$$

Toutefois, l'intuition qu'un passage par le logarithme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\big(1+a_n\big) = \text{formellement} = \log \prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big),$$

permet de ramener l'étude des produits infinis à celle des séries est correcte, à condition d'imposer la convergence *absolue*, laquelle s'avère être *la* condition suffisante la plus utile dans toutes les applications.

Reformulons alors une définition plus adaptée dans laquelle nous autorisons les facteurs à être nuls.

Définition 3.2. [Utilisée] Pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes, si la limite :

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1+a_n\big) \;=:\; \ell,$$

existe dans $\mathbb{C}$, on dit que le produit infini des $1+a_n$ *converge*, et on le note :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) \;\in\; \mathbb{C}.$$

Voici l'énoncé élémentaire qui sera important pour la théorie des fonctions holomorphes.

Théorème 3.3. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$*, alors le produit infini :*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) \;=\; \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1+a_n\big) \;\in\; \mathbb{C}$$

converge vers une valeur finie. De plus :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1+a_n\big) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, n_0 \geqslant 1, \qquad 1+a_{n_0} \;=\; 0.$$

Démonstration. Comme $|a_n| \longrightarrow 0$ nécessairement, pour n assez grand, on a $|a_n| \leqslant \frac{1}{2}$. En éliminant les premiers facteurs du produit infini, on peut supposer que $|a_n| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Puisque seuls ces premiers facteurs pouvaient donc satisfaire $1+a_{n_0} = 0$, nous allons voir que, en fait, la limite :

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1+a_n\big) \;\overset{?}{\in}\; \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

existe et est *non nulle*. Autrement dit, un produit infini convergent ne peut valoir 0 que si l'un de ses *premiers* facteurs est nul.

En effet, avec le développement connu en série entière valable pour $|z| < 1$:

$$\log\big(1+z\big) \;=\; z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots,$$

si de plus $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, on peut majorer :

$$\begin{aligned} \big|\log\big(1+z\big)\big| \;&\leqslant\; |z| \Big(1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 + \cdots\Big) \\ &\leqslant\; |z| \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\Big) \\ &=\; 2\,|z|, \end{aligned} \tag{3.4}$$

pour assurer la convergence de la série :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\log\big(1+a_n\big)\Big| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\big|\log\big(1+a_n\big)\big| \\ &\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \\ \text{[Hypothèse]} \qquad &< \infty,\end{aligned}$$

vers un nombre que l'on note :

$$\ell := \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\log\big(1+a_n\big),$$

et comme l'exponentielle est continue :

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\mathrm{N}}\big(1+a_n\big) &= \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} e^{\log(1+a_n)} \\ &= e^{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\log(1+a_n)} \\ &\underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} e^{\ell} \neq 0,\end{aligned}$$

ceci montre bien la convergence des produits partiels vers un nombre qui est effectivement *non nul*, *parce qu'il est* exponentielle d'un nombre complexe. □

Terminologie 3.5. On dit qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+a_n\big)$ de nombres complexes *converge absolument* si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.

Ce critère de convergence *absolue* $\sum|a_n|<\infty$ est en effet approprié, car la plupart du temps, dans la théorie des fonctions holomorphes, on est en mesure, au moyen d'estimations souvent élémentaires, de garantir une convergence normale — donc uniforme — des séries de fonctions, ce qui préserve le caractère holomorphe de la limite.

Théorème 3.6. *Dans un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$, soit $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes $F_n\in\mathscr{O}(\Omega)$. S'il existe des constantes $c_n>0$ majorant dans Ω :*

$$\big|F_n(z)-1\big| \leqslant c_n \qquad \textit{telles que} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty,$$

alors les trois propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) *Le produit infini de fonctions holomorphes $\prod_{n=1}^{\infty}F_n(z)$ converge uniformément dans Ω vers une fonction holomorphe :*

$$F(z) := \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\prod_{n=1}^{\mathrm{N}}F_n(z).$$

(2) *En un point $w\in\Omega$, on a $F(w)=0$ si et seulement si il existe $n=n_w\geqslant 1$ avec $F_n(w)=0$.*

(3) *Si toutes les $F_n\neq 0$ ne s'annulent nulle part dans Ω, alors $F\neq 0$ aussi partout dans Ω, et de plus :*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

Démonstration. Puisque $c_n \longrightarrow 0$ nécessairement, il existe un entier $\mathrm{M} \geqslant 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant \mathrm{M}+1 \quad \Longrightarrow \quad c_n \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

En décomposant alors :

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) = \prod_{n=1}^{\mathrm{M}} F_n(z) \prod_{n=\mathrm{M}+1}^{\infty} F_n(z),$$

nous allons constater que le deuxième produit-reste ne s'annule en *aucun* point de Ω, et donc les zéros de la fonction-limite ne peuvent être présents que dans les premiers facteurs :

$$\big\{w \in \Omega\colon\ F(w) = 0\big\} = \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{M}} \big\{w \in \Omega\colon\ F_n(w) = 0\big\}.$$

En éliminant ces premiers facteurs, ce qui ne change rien à **(1)**, **(2)**, **(3)**, nous nous ramenons à $c_n \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Maintenant, en homologie avec les notations précédentes, ré-écrivons :

$$F_n(z) =: 1 + a_n(z).$$

Puisque $|a_n(z)| \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{2}$ dans Ω, l'hypothèse $\sum c_n < \infty$, suivie de l'estimation de convergence normale-uniforme :

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \log\big(1 + a_n(z)\big)\Big| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\log\big(1 + a_n(z)\big)\Big| \\
\text{[(3.4)]} \qquad &\leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \big|a_n(z)\big| \\
&\leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,
\end{aligned}$$

associée à un théorème connu (spectaculaire) de Cauchy offrent l'holomorphie de la fonction-série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\big(1 + a_n(z)\big) \in \mathscr{O}(\Omega),$$

donc :

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + a_n(z)\big) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n(z))} \in \mathscr{O}(\Omega),$$

et cette fonction holomorphe ne s'annule en aucun point de Ω — car c'est une exponentielle ! —, ce qui conclut **(1)**.

Pour l'équivalence **(2)**, on a ici :

$$\emptyset = \big\{w \in \Omega\colon\ F(w) = 0\big\},$$

ce qui est cohérent avec le fait que nous nous sommes ramenés à $c_n \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$, de telle sorte que les inégalités $\big|F_n(z) - 1\big| \leqslant \frac{1}{2}$ forçaient, à l'avance aussi :

$$\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{w \in \Omega\colon\ F_n(w) = 0\big\}.$$

Pour **(3)**, en notant :

$$G_{\mathrm{N}}(z) \ := \ \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} F_n(z) \ \overset{\text{uniformément}}{\underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow}} \ F(z) \qquad \text{(dans } \Omega\text{)},$$

un théorème connu (encore plus spectaculaire) de Cauchy offre la convergence des dérivées en tout point :

$$G'_{\mathrm{N}}(z) \ \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} \ F'(z) \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Mais les G_{N} sont uniformément minorées dans Ω, car $\big|F_n(z)-1\big| \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{2}$ donne :

$$\begin{aligned} \big|G_{\mathrm{N}}(z)\big| \ &= \ \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big|F_n(z)\big| \\ &\geqslant \ \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(1-c_n\big) \\ &\geqslant \ \prod_{n=1}^{\infty} \big(1-c_n\big) \\ &> \ 0, \end{aligned}$$

[Théorème 3.3]

donc on a aussi en tout point convergence uniforme :

$$\frac{1}{F(z)} \ \underset{\infty\leftarrow\mathrm{N}}{\longleftarrow} \ \frac{1}{G_{\mathrm{N}}(z)},$$

d'où la conclusion de **(3)** :

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} \ &\underset{\infty\leftarrow\mathrm{N}}{\longleftarrow} \ \frac{G'_{\mathrm{N}}(z)}{G_{\mathrm{N}}(z)} \\ &= \ \frac{\big(F_1(z)\cdots F_{\mathrm{N}}(z)\big)'}{F_1(z)\cdots F_{\mathrm{N}}(z)} \ = \ \frac{F'_1(z)}{F_1(z)} + \cdots + \frac{F'_{\mathrm{N}}(z)}{F_{\mathrm{N}}(z)}. \end{aligned}$$

□

Ainsi, la bonne condition suffisante pour la convergence d'un *produit* infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$, c'est la convergence normale de la *série* de fonctions holomorphes $\sum_{n=1}^{\infty} \big(F_n(z)-1\big)$.

Conceptualisons cela, quitte à nous restreindre à des compacts.

Définition 3.7. Un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ de fonctions holomorphes $F_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ est dit *normalement convergent sur les compacts* de Ω si, pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe une suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs $c_n = c_n(K) \geqslant 0$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ tels que :

$$\big|F_n(z)-1\big| \ \leqslant \ c_n \qquad (\forall\, z \in K,\ \forall\, n \geqslant 1).$$

On généralise alors aisément le théorème précédent.

Théorème 3.8. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une suite $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $F_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ converge normalement sur les compacts de Ω, alors :*

(1) *le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ définit une fonction holomorphe dans Ω :*

$$F(z) \ := \ \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} F_n(z);$$

(2) *en un point* $w \in \Omega$*, on a* $F(w) = 0$ *si et seulement si il existe* $n = n_w \geqslant 1$ *avec* $F_n(w) = 0$*;*

(3) *si toutes les* $F_n \neq 0$ *ne s'annulent nulle part dans* Ω*, alors* $F \neq 0$ *aussi partout dans* Ω*, et de plus :*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence normale de Cauchy sur des compacts arbitraires $K \subset \Omega$ à la même série $\sum \log\big(1 + a_n(z)\big)$ de fonctions holomorphes. □

4. Formule de produit d'Euler pour la fonction sinus

Avant de continuer à développer la théorie générale des produits de Weierstrass, établissons une formule de produit infini pour la fonction sinus, due à Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big),$$

qui est valable pour *tout* $z \in \mathbb{C}$.

Cette identité sera déduite de la représentation suivante de la fonction cotangente comme série de fractions rationnelles :

$$\begin{aligned}
\pi \operatorname{cotan} \pi z &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{|n|\leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{z+n} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,z}{z^2 - n^2},
\end{aligned}$$

qui sera valable pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. En fait, la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ doit être entendue comme limite, lorsque $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, de la somme symétrique $\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}}$, parce que aucune *moitié-somme* $\sum_{n=-\infty}^{0}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$ ne converge, à cause de $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

Heureusement, quand on interprète la somme de manière symétrique, des compensations réalisées dans la dernière formule écrite ci-dessus vont assurer la convergence.

Théorème 4.1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ *:*

$$\pi \operatorname{cotan} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,z}{z^2 - n^2}.$$

Démonstration. L'idée est d'exploiter le fait que cette série et la fonction $\pi \operatorname{cotan} \pi z$ ont les mêmes propriétés structurales. Notamment, avec $n \in \mathbb{Z}$ entier, et $z = n + w$ proche mais

différent de n, donc avec $w \neq 0$ petit, comme on a :

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \frac{\cos(\pi n + \pi w)}{\sin(\pi n + \pi w)} = \pi \frac{(-1)^n \cos \pi w}{(-1)^n \sin \pi w}$$
$$= \pi \frac{1 + \mathrm{O}(w^2)}{\pi w + \mathrm{O}(w^3)} = \frac{1}{z-n} + \text{reste holomorphe},$$

il est clair que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(1) $\pi \frac{\cos \pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$;

(2) $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ possède des pôles simples en tous les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus tous égaux à 1, et est holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$.

Alors nous affirmons que la série :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{z+n}$$

satisfait aussi exactement ces deux mêmes propriétés.

En effet, **(1)** revient simplement à observer que le passage de z à $z+1$ décale d'une unité les termes de la somme infinie :

$$\sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{z+1+n} = -\frac{1}{z-\mathrm{N}} + \sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z+\mathrm{N}+1},$$

et en faisant $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, les termes d'erreur parasites s'évanouissent :

$$\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{z+1+\mathrm{N}} = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{z+n}.$$

Par conséquent, la fonction-différence :

$$\Delta(z) := \pi \operatorname{cotan} \pi z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

satisfait, via **(1)**, la périodicité $\Delta(z+1) = \Delta(z)$, mais surtout, grâce à **(2)**, nous constatons que toutes les singularités de $\Delta(z)$ en les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$ sont illusoires, ce qui implique :

$$\Delta \in \mathscr{O}(\mathbb{C}).$$

Enfin, on vérifie l'imparité :

$$\Delta(-z) = -\Delta(z) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Afin d'établir la formule du théorème, qui équivaut à $\Delta(z) \equiv 0$, commençons par une

Assertion 4.2. *La fonction $\Delta \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est bornée dans le plan complexe tout entier.*

Preuve. Grâce à la 1-périodicité, il suffit de faire voir que Δ est bornée dans la bande infinie verticale :

$$\left\{ |x| \leqslant \tfrac{1}{2} \right\} \qquad (z = x + iy),$$

et grâce à l'imparité, il suffit de le faire dans le rectangle infini :

$$\left\{ |x| \leqslant \tfrac{1}{2},\ y \geqslant 0 \right\}.$$

Comme Δ est partout holomorphe, elle est bornée sur le carré $\big\{|x| \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\big\}$, donc on peut supposer $y \geqslant 1$, et alors on majore premièrement :

$$\begin{aligned}
\big|\pi \operatorname{cotan} \pi z\big| &= \left|\pi\, i\, \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| \\
&= \pi \left|\frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}\right| \\
&= \pi \left|\frac{e^{-2\pi y} + e^{-2i\pi x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2i\pi x}}\right| \\
[\tfrac{1}{|a-b|} \leqslant \tfrac{1}{-|a|+|b|} \text{ quand } |b| > |a|] \qquad &\leqslant \pi\, \frac{e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} + 1} \\
&\leqslant \pi\, \frac{e^{-2\pi} + 1}{-e^{-2\pi} + 1} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Deuxièmement, toujours avec $y \geqslant 1$ et avec $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,z}{z^2 - n^2}\right| &\leqslant \left|\frac{1}{x+iy}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2\,(x+iy)}{x^2 - y^2 - n^2 + 2i\,xy}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,y}{y^2 + n^2 - x^2} \\
&\leqslant 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2 - \frac{1}{4}} \\
[u > 1 \implies \tfrac{1}{u - \frac{1}{4}} < \tfrac{2}{u}] \qquad &\leqslant 1 + 2 \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2}.
\end{aligned}$$

Or comme la fonction $x \longmapsto \frac{y}{y^2+x^2}$ est décroissante, cette dernière somme est majorée par une intégrale finie indépendante de y :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} &\leqslant \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + x^2}\, dx \\
[x = yt] \qquad &= \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + y^2 t^2}\, y\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux constituants de la fonction-différence Δ sont bel et bien bornés dans $\big\{|x| \leqslant \frac{1}{2},\ y \geqslant 1\big\}$. $\square$

Pour terminer, le théorème de Liouville force $\Delta \equiv C$ à être constante, et puisqu'elle est impaire, $C = 0$, ce qui conclut :

$$0 \equiv \pi \operatorname{cotan} \pi z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}. \qquad \square$$

Comme promis, nous pouvons maintenant établir le célèbre :

Théorème 4.3. [Euler] *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a la représentation par un produit infini convergent :*

$$\sin \pi z \;=\; \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Démonstration. Abrégeons :

$$G(z) \;:=\; \frac{\sin \pi z}{\pi} \qquad \text{et} \qquad P(z) \;:=\; z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, le Théorème 3.6 montre que ce produit infini converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et que, en-dehors de l'ensemble $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,z}{z^2 - n^2}.$$

Mais comme $\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \operatorname{cotan} \pi z$, le développement en série rationnelle de la fonction cotangente que nous venons d'obtenir montre l'annulation identique :

$$\begin{aligned} \Big(\frac{P(z)}{G(z)}\Big)' \;&=\; \frac{P(z)}{G(z)} \Big[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)}\Big] \\ &\equiv\; 0, \end{aligned}$$

et donc $P(z) = c\,G(z)$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$. Enfin, puisque $P(z) = z + \mathrm{O}(z^2)$ et $G(z) = \frac{\pi z}{\pi} + \mathrm{O}(z^3)$, il est clair que $c = 1$. □

5. Formule produit d'Euler pour les nombres premiers

La *fonction zêta* de Riemann est définie, pour $s > 1$ réel, par la série :

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente d'après un critère connu, et elle se prolonge au domaine complexe.

Lemme 5.1. *Cette série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout demi-plan complexe :*

$$\big\{s \in \mathbb{C} \colon\; \operatorname{Re} s > 1 + \delta\big\},$$

avec $\delta > 0$ quelconque, et définit une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

Démonstration. Comme Riemann, écrivons le nombre complexe s sous la forme :

$$s \;=\; \sigma + it,$$

avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$, d'où en supposant $\sigma > 1 + \delta$:

$$\begin{aligned}
\big|\zeta(s)\big| \;=\; \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\Big| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{s \log n}|} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sigma \log n}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale, dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1 + \delta\}$, de cette série de fonctions holomorphes. Le théorème de Cauchy garantit alors que $s \longmapsto \zeta(s)$ est holomorphe dans tout demi-plan $\{\mathsf{Re}\, s > 1 + \delta\}$, donc dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$, puisque $\delta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. $\square$

Une application célèbre de la théorie des produits infinis est due à Euler. Elle établit un lien extrêmement profond avec la théorie des nombres. Notons :

$$\mathscr{P} \;:=\; \big\{p \geqslant 2 \,\text{entiers premiers}\big\} \;=\; \big\{2,\, 3,\, 5,\, 7,\, 11,\, 13,\, 17,\, 19,\, \dots\big\}.$$

Théorème 5.2. [Euler] *Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \;=\; \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

où le produit infini est normalement convergent dans tout demi-plan $\{\mathsf{Re}\, s > 1 + \delta\}$ avec $\delta > 0$ quelconque.

De plus, la fonction :

$$s \;\longmapsto\; \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

est holomorphe dans le demi-plan ouvert $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$.

Démonstration. Commençons par justifier la convergence de ce produit infini. Avec $z := \frac{1}{p^s}$ qui vérifie $0 < |z| \leqslant \frac{1}{2}$ car $p \geqslant 2$, en utilisant :

$$\Big|\frac{1}{1-z}\Big| \;\leqslant\; \frac{1}{1-|z|} \;\leqslant\; 1 + 2\,|z|,$$

majorons le produit infini par :

$$\Big|\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\Big| \;\leqslant\; \prod_{p \in \mathscr{P}} \Big(1 + \frac{2}{|p^s|}\Big) \;\overset{?}{<}\; \infty,$$

et constatons que le critère suffisant des Théorèmes 3.3 et 3.6 pour la convergence des produits infinis s'applique grâce à :

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{2}{|p^s|} \;=\; 2 \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^{\mathsf{Re}\, s}} \;\leqslant\; 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathsf{Re}\, s}} \;<\; \infty.$$

Ensuite, soient deux (grands) entiers $1 \leqslant \mathrm{N} \leqslant \mathrm{M}$. Puisque d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \leqslant \mathrm{N}$ s'écrit de manière unique $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\mu^{\alpha_\mu}$ avec $p_1, \ldots, p_\mu \in \mathscr{P}$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \geqslant 1$, et avec :

$$p_1, \ldots, p_\mu \leqslant \mathrm{N}, \qquad\qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \leqslant \mathrm{N} \leqslant \mathrm{M},$$

un développement du produit à droite de la première ligne ci-dessous donne une majoration dans laquelle on suppose $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1 + \delta$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^s} &\leqslant \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{\mathrm{M}s}}\Big) \\
&\leqslant \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{\mathrm{M}s}} + \cdots\Big) \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\
&\leqslant \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.
\end{aligned}$$

Grâce à la majoration (qui est en fait une égalité) $\left|\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, s}}$, la même ingégalité est vraie avec $s \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\mathrm{Re}\, s > 1 + \delta$.

En faisant $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, il vient :

$$\zeta(s) \leqslant \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Pour l'inégalité inverse, à nouveau d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, un développement du produit à gauche montre qu'on n'obtient pas tous les $\frac{1}{n^s}$:

$$\prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{\mathrm{M}s}}\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

d'où en faisant $\mathrm{M} \longrightarrow \infty$:

$$\prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leqslant \zeta(s),$$

et enfin via $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$:

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leqslant \zeta(s).$$

Tout ceci étant vrai dans $\big\{\mathrm{Re}\, s > 1 + \delta\big\}$ avec $\delta > 0$ arbitraire, nous concluons que la formule (incroyable !) d'Euler est vraie dans le demi-plan $\big\{\mathrm{Re}\, s > 1\big\}$. $\square$

6. Produits infinis de Weierstrass

Rappelons que si une fonction holomorphe non identiquement nulle $f(z)$ s'annule en un point $z = a$, la multiplicité $\nu_f(a) =: \nu$ est l'unique entier tel que l'on puisse factoriser :

$$f(z) = (z - a)^\nu \, g(z),$$

avec une fonction-reste holomorphe $g(z)$ satisfaisant $g(a) \neq 0$. On voit cela instantanément en factorisant la puissance maximale de $z - a$ dans le développement en série entière de f au point a.

Maintenant, si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque (infinie) de points dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une fonction holomorphe entière $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ayant exactement ces a_n comme zéros, et non nulle ailleurs ? À cause du principe des zéros isolés, il est nécessaire de supposer que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie, et donc que $|a_n| \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. Après réordonnancement, on pourrait supposer que $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ pour tout $n \geqslant 1$, mais cela n'est pas nécessaire.

Rappelons que nous autorisons des répétitions dans les suites de zéros, et donc il revient au même de se donner une suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points mutuellement distincts avec $|b_n| \longrightarrow \infty$, ainsi que des multiplicités $\nu_n \geqslant 1$, et de demander s'il existe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ayant ces b_n comme zéros d'ordres ν_n, et jamais nulle sur $\mathbb{C} \backslash \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.

Cette question est triviale pour un nombre fini de zéros prescrits, et pour un nombre infini, la réponse est toujours positive, aussi.

Théorème 6.1. [Weierstrass] *Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes $a_n \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|a_n| \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$, il existe $f(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière s'annulant en tous les $z = a_n$, et non nulle ailleurs.*

Toute autre fonction $\widetilde{f}(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfaisant cela est de la forme :

$$\widetilde{f}(z) \,=\, f(z)\, e^{g(z)},$$

avec $g(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière.

Démonstration. En effet, si a_n est un zéro prescrit, disons d'ordre 1 pour fixer les idées, alors au voisinage de $z = a_n$, on peut écrire :

$$f(z) \,=\, \big(z - a_n\big) \Big[\alpha + \mathrm{O}\big(z - a_n\big)\Big] \qquad {\scriptstyle (\alpha \neq 0)},$$

$$\widetilde{f}(z) \,=\, \big(z - a_n\big) \Big[\widetilde{\alpha} + \mathrm{O}\big(z - a_n\big)\Big] \qquad {\scriptstyle (\widetilde{\alpha} \neq 0)},$$

d'où il découle que $z = a_n$ est une singularité illusoire du quotient :

$$\frac{\widetilde{f}(z)}{f(z)} \,=\, \frac{(z - a_n)\,\big[\widetilde{\alpha} + \mathrm{O}(z - a_n)\big]}{(z - a_n)\,\big[\alpha + \mathrm{O}(z - a_n)\big]} \,=\, \frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha} + \mathrm{O}\big(z - a_n\big),$$

accompagné du fait que $\frac{\widetilde{f}(z)}{f(z)}$ ne s'annule pas au voisinage de $z = a_n$.

Le cas où a_n est répété un nombre $m \geqslant 1$ de fois est similaire, donc :

$$\frac{\widetilde{f}(z)}{f(z)} \,\in\, \mathscr{O}\big(\mathbb{C},\, \mathbb{C}^*\big)$$

est holomorphe entière, et ne s'annule jamais.

Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème connu montre qu'il existe bien une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ représentant :

$$\frac{\widetilde{f}(z)}{f(z)} \,=\, e^{g(z)}.$$

Ainsi, nous devons construire une fonction qui s'annule précisément en tous les $z = a_n$. La proposition naïve, suggérée par la formule de produit d'Euler :

$$f(z) \overset{?}{:=} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big),$$

se heurte à un problème de convergence, notamment lorsque $\sum \frac{1}{|a_n|} = \infty$. Afin d'y remédier, Weierstrass a eu l'idée d'insérer des facteurs exponentiels — jamais nuls — accélérant la convergence sans introduire de nouveaux zéros.

Pour chaque entier $k \geqslant 0$, introduisons en effet les *facteurs canoniques* de Weierstrass :

$$\begin{aligned} E_0(z) &:= 1 - z, \\ E_k(z) &:= \big(1 - z\big)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}} \qquad (k \geqslant 1). \end{aligned}$$

En localisant autour d'un zéro à prescrire $z = a_n$, nous serons intéressés par l'étude de ces $E_k(z)$ dans le disque $\big\{|z| \leqslant \frac{1}{2}\big\}$.

Lemme 6.2. *Il existe une constante universelle $0 < c < \infty$ telle que, pour tout $k \geqslant 0$:*

$$\big|1 - E_k(z)\big| \leqslant c\,|z|^{k+1} \qquad (\forall\, |z| \leqslant \tfrac{1}{2}).$$

On peut prendre $c = 2\,e^1$, qui est indépendante de k.

Preuve. Pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, le logarithme $\log(1 - z)$ est défini par la série connue $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, donc comme on peut écrire $1 - z = e^{\log(1-z)}$, il vient :

$$\begin{aligned} E_k(z) &= e^{\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}} \\ &=: e^w, \end{aligned}$$

en posant :

$$w := -\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Mais puisque $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, nous pouvons majorer de manière élémentaire :

$$\begin{aligned} |w| &\leqslant |z|^{k+1} \Big(\frac{1}{k+1} + \frac{|z|}{k+2} + \frac{|z|^2}{k+3} + \cdots\Big) \\ &\leqslant |z|^{k+1} \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\Big) \\ &= 2\,|z|^{k+1}. \end{aligned}$$

La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $h(t) := e^{tw}$ de la variable réelle $0 \leqslant t \leqslant 1$ ayant pour dérivée $h'(t) = w\,e^{tw}$ conclut :

$$\begin{aligned} \big|1 - E_k(z)\big| = \big|1 - e^w\big| &= \big|h(0) - h(1)\big| \\ &= 1 \cdot \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|h'(t)\big| \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |w|\, e^{t|w|} \\ &\leqslant 2\,|z|^{k+1}\, e^{|w|} \\ [|w| \leqslant 1] \qquad &\leqslant 2\,e^1\,|z|^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Supposons dorénavant qu'un zéro d'ordre $\nu \geqslant 0$ est prescrit en $z = 0$, et que les zéros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont tous non nuls. Définissons alors le *produit de Weierstrass* par :

$$\begin{aligned} f(z) &:= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_n\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \\ &= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n}, \end{aligned}$$

et vérifions qu'il remplit toutes les conditions, à savoir que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière avec un zéro d'ordre ν en $z = 0$, avec des zéros en chaque a_n, et que f est non nulle ailleurs.

Fixons $\mathrm{R} > 0$, supposons $z \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, et démontrons que toutes ces propriétés sont satisfaites dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Comme R est arbitraire, cela terminera la démonstration.

Décomposons le produit en deux morceaux :

$$f(z) \,=\, z^\nu \prod_{|a_n| \leqslant 2\mathrm{R}} E_n\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \prod_{|a_n| > 2\mathrm{R}} E_n\big(\tfrac{z}{a_n}\big).$$

Puisque $|a_n| \longrightarrow \infty$, il n'y a qu'un nombre fini de facteurs dans le premier produit, lequel s'annule clairement en tous les $z = a_n$ avec $|a_n| < \mathrm{R}$, mais nulle part ailleurs dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, ce qu'on voulait.

Dans le deuxième morceau qui est un produit infini, on a, toujours pour $|z| < \mathrm{R}$:

$$\Big|\frac{z}{a_n}\Big| \,\leqslant\, \frac{\mathrm{R}}{2\,\mathrm{R}} \,=\, \frac{1}{2},$$

et donc le Lemme 6.2 offre une estimation :

$$\begin{aligned} \Big|1 - E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big)\Big| &\leqslant c\,\Big|\frac{z}{a_n}\Big|^{n+1} \\ &\leqslant c\,\frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

montrant, puisque $\sum \frac{1}{2^{n+1}} < \infty$, en appliquant le Théorème 3.6, que le produit infini :

$$\prod_{|a_n| > 2\mathrm{R}} E_n\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\Big|_{\mathbb{D}_{\mathrm{R}}}$$

converge normalement dans le disque $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ et y définit une fonction holomorphe ne s'annulant jamais.

Au final, f possède toutes les propriétés voulues dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ avec $\mathrm{R} > 0$ arbitraire, donc dans $\mathbb{C}$. $\square$

7. Théorème de factorisation de Hadamard

Étant donné une fonction holomorphe entière $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle qui possède $\nu := \nu_f(0)$ zéros à l'origine suivis d'un nombre *infini* de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *non nuls*,

le Théorème 6.1 de Weierstrass construit un produit infini convergent :

$$\begin{aligned} E(z) &:= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_n\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \\ &= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\, e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n} \end{aligned}$$

qui a exactement les mêmes zéros que f, sans s'annuler ailleurs, et par conséquent, le quotient :

$$\frac{f(z)}{E(z)}$$

n'a que des singularités illusoires, car si w est un zéro, $w = 0$ ou $w = a_n$, et si m est la multiplicité de ce zéro, $m = \nu$ ou $m =$ nombre de fois que a_n est répété, alors au voisinage de w, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-w)^m \big[\alpha + \mathrm{O}(z-w)\big] && (\alpha \neq 0), \\ E(z) &= (z-w)^m \big[\beta + \mathrm{O}(z-w)\big] && (\beta \neq 0), \end{aligned}$$

d'où la compensation au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{E(z)} &= \frac{(z-w)^m \big[\alpha + \mathrm{O}(z-w)\big]}{(z-w)^m \big[\beta + \mathrm{O}(z-w)\big]} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{O}(z-w) && (\tfrac{\alpha}{\beta} \neq 0), \end{aligned}$$

montrant que $\frac{f(z)}{E(z)}$ est holomorphe, jamais égale à zéro, au voisinage de $z = w$. Comme $f(z) \neq 0 \neq E(z)$ partout ailleurs, ce quotient ne s'annule donc en *aucun* point de $\mathbb{C}$, et comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème connu permet de représenter ce quotient comme exponentielle :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)},$$

d'une certaine fonction $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ unique.

Corollaire 7.1. [Weierstrass] *Toute $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ayant un zéro d'ordre $\nu \geqslant 0$ à l'origine et une infinité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ non nuls s'écrit de manière unique avec $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$:*

$$f(z) = e^{g(z)}\, z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\, e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n}. \qquad \square$$

Or quand $n \longrightarrow \infty$, dans l'exponentielle, le degré n du polynôme en $\frac{z}{a_n}$ est non borné. Hadamard s'est posé la question de savoir si on peut raffiner ce théorème de représentation de Weierstrass lorsque $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est supposée être d'ordre de croissance *fini* $\leqslant \rho < \infty$:

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|^\rho} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}),$$

en s'assurant que les deux fonctions $g(z)$ et $Q(\frac{z}{a_n})$ dans les exponentielles soient elles aussi bornées par $C\,|z|^\rho$, voire éventuellement par $C\,|z|^{\rho'}$ avec $\rho < \rho' < \infty$.

Ici, rappelons que $\rho_f = \inf \rho$ est l'*ordre* de f, mais qu'il est souvent plus aisé de travailler avec un $\rho > \rho_f$, éventuellement arbitrairement proche de ρ_f.

Rappelons aussi que nous avons démontré à l'avance deux résultats qui vont s'avérer utiles, la borne supérieure :

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_f(r) &= \text{nombre de zéros de } f \text{ dans } \mathbb{D}_r \\ &\leqslant C\, r^\rho \qquad\qquad (\forall\, r \geqslant 1), \end{aligned}$$

ainsi que la convergence :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho} \ < \ \infty, \tag{7.2}$$

quel que soit $\rho > \rho_f$.

Terminologie 7.3. Pour $k \geqslant 0$ entier, on appelle *facteur canonique de degré* k la fonction :

$$E_k(z) \ := \ \big(1 - z\big)\, e^{\,z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}.$$

Rappelons que l'intérêt de ces $E_k(z)$ est qu'ils ont le même zéro que $1 - z$, tout en collant davantage à 1 pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ petit, comme l'exprime l'estimée déjà vue $\big|1 - E_k(z)\big| \leqslant c\,|z|^{k+1}$.

La réponse à la question, positive, s'exprime comme suit.

Théorème 7.4. [Hadamard] *Toute $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ avec $f \not\equiv 0$ d'ordre fini $\rho_f < \infty$ ayant un zéro d'ordre $\nu \geqslant 0$ à l'origine et une infinité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ non nuls s'écrit de manière unique comme produit infini convergent :*

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{P(z)}\, z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \\ &= e^{p_0 + p_1 z + \cdots + p_k z^k}\, z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\, e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}, \end{aligned}$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré $\leqslant k$, avec des facteurs canoniques de degrés constants k, où k est l'unique entier satisfaisant :

$$k \ \leqslant \ \rho_f \ < \ k + 1.$$

Le travail le plus exigeant, dans l'argumentation, sera d'établir que le facteur $e^{g(z)}$ est une exponentielle-polynôme de degré contrôlé.

Démonstration. Introduisons :

$$E(z) \ := \ z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big).$$

Grâce au Lemme 6.2, pour tous les $n \geqslant \mathrm{N} \gg 1$ assez grands afin que $\big|\frac{z}{a_n}\big| \leqslant \frac{1}{2}$, on a la majoration :

$$\big|1 - E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\big| \ \leqslant \ c\,\big|\tfrac{z}{a_n}\big|^{k+1} \qquad\qquad (n \geqslant \mathrm{N}).$$

Quitte à augmenter N, on peut supposer $|a_n| \geqslant 1$ lorsque $n \geqslant \mathrm{N}$. En intercalant alors un ρ avec :

$$k \ \leqslant \ \rho_f \ < \ \rho \ < \ k + 1,$$

nous constatons que le critère suffisant du Théorème 3.6 pour la convergence du produit infini $\prod_{n=\mathrm{N}}^{\infty}$ est vérifié :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \big|1 - E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\big| &\leqslant c\,|z|^{k+1} \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \\
&\leqslant c\,|z|^{k+1} \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho}} \\
\text{[(7.2)]} \qquad &< \infty.
\end{aligned}$$

Clairement, $E(z)$ possède exactement les mêmes zéros que f, et donc, le quotient ne s'annulant jamais :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)},$$

est l'exponentielle d'une certaine fonction holomorphe entière, puisque $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

Comment parvenir à démontrer que $g(z) = P(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant k$?

Le point délicat, ici, est qu'on *divise* par $E(z)$, ce qui peut perturber la croissance $|f(z)| \leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|^{\rho}}$, voire la détruire, notamment lorsque $z \approx a_n$ est proche d'un zéro de $E(z)$!

L'idée-clé de Hadamard a été d'établir des *minorations* de $|E(z)|$ d'où découlent des *majorations* de $\frac{1}{|E(z)|}$, au moins sur des suites de cercles :

$$\big\{|z| = r_m\big\} \qquad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

de rayons :

$$1 \leqslant r_{m-1} < r_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

ne contenant aucun zéro a_n, cercles qui soient « assez éloignés », en un certain sens, de ces a_n.

Lemme-clé 7.5. [Hadamard] *Il existe une suite de cercles $C_{r_m}(0)$ centrés à l'origine de rayons $1 \leqslant r_{m-1} < r_m \longrightarrow \infty$ tendant vers l'infini en restriction auxquels :*

$$\Big|\prod_{n=1}^{\infty} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\Big| \geqslant e^{-c\,|z|^{\rho}} \qquad (\forall\, z \in C_{r_m},\ \forall\, m \geqslant 1),$$

où $k \leqslant \rho_f < \rho < k+1$ est arbitrairement proche de ρ_f, pour une constante $0 < c < \infty$ dépendant seulement de f.

La démonstration, technique, étant repoussée à la Section **8** suivante, achevons l'argumentation.

Ainsi, sur tous ces cercles $\big\{|z| = r_m\big\}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, il vient :

$$\begin{aligned} e^{\mathsf{Re}\, g(z)} \;=\; \Big|\frac{f(z)}{E(z)}\Big| &\leqslant \frac{\mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|^\rho}}{e^{-c\,|z|^\rho}} \\ &= A\, e^{(B+c)\,|z|^\rho} \\ &= e^{\log A + (B+c)\,|z|^\rho} \\ &\leqslant e^{(|\log A| + B + c)\,|z|^\rho} \\ \text{[Changer } c\text{]} \qquad &=: e^{c\,|z|^\rho} \end{aligned}$$

c'est-à-dire en changeant la constante c sans changer de nom :

$$e^{\mathsf{Re}\, g(z)} \;\leqslant\; e^{c\,|z|^\rho} \qquad (\forall\, |z| = r_m,\ \forall\, m = 1, 2, 3, \ldots).$$

On sait qu'une fonction holomorphe satisfaisant $|g(z)| \leqslant c\,|z|^\rho$ pour $|z|$ grand doit être un polynôme de degré (entier) $\leqslant \rho$, et cela reste vrai si on a cette inégalité pour sa partie réelle seulement sur une suite de cercles grandissant indéfiniment.

Lemme 7.6. *Si une fonction entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfait :*

$$\mathsf{Re}\, g(z) \;\leqslant\; c\, r^\rho \qquad (\forall\, |z| = r_m),$$

sur une suite de cercles de rayons $1 \leqslant r_{m-1} < r_m \longrightarrow \infty$, alors g est un polynôme de degré $\leqslant \rho$.

Démonstration. Développons g à l'origine en série entière normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{C}$:

$$g(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n.$$

Comme $\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta}\, d\theta = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, nous savons que pour un rayon $r > 0$ arbitraire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(r\, e^{i\theta}\big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \;=\; \begin{cases} b_n\, r^n & \text{lorsque } n \geqslant 0, \\ 0 & \text{lorsque } n \leqslant -1. \end{cases}$$

Le cas $n = 0$, dont on prend la double partie réelle, donne :

$$2\,\mathsf{Re}\, b_0 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,\mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Ensuite, prenons la conjuguée de la deuxième ligne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g\big(r\, e^{i\theta}\big)}\, e^{-in\theta}\, d\theta \;=\; 0 \qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

d'où en additionnant avec la première ligne pour faire apparaître $2\,\mathsf{Re}\, g = g + \overline{g}$:

$$b_n\, r^n \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,\mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Ensuite, comme $0 = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\theta$ pour $n \geqslant 1$, insérons un terme nul :

$$b_n\, r^n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big[\underbrace{\mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big) - c\, r^\rho}_{\leqslant 0 \text{ quand } r = r_m}\Big]\, e^{-in\theta}\, d\theta,$$

et en restriction à la famille intéressante de cercles, déduisons une majoration :

$$\begin{aligned}\big|b_n\big| &\leqslant \frac{1}{\pi\,(r_m)^n}\int_0^{2\pi}\big[-\,\mathrm{Re}\,g\big(r_m\,e^{i\theta}\big)+c\,(r_m)^\rho\big]\,1\,d\theta\\ &\leqslant \frac{1}{\pi\,(r_m)^n}\Big[-\,2\pi\,\mathrm{Re}\,b_0+2\pi\,c\,(r_m)^\rho\Big],\end{aligned}$$

pour constater que le membre de droite converge vers zéro lorsque $r_m \longrightarrow \infty$ dès que $n > \rho$, d'où $b_n = 0$ pour tous les $n > \rho$, ce qui montre bien la polynomialité de $g(z) = \sum_{n\leqslant\rho} b_n\,z^n$. □

En conclusion, la fonction entière $g(z)$ du facteur $f(z) = e^{g(z)}\,E(z)$ est bien un polynôme de degré $\leqslant \rho < k+1$, donc de degré $\leqslant k$, ce qui termine la démonstration du Théorème 7.4, sous réserve du Lemme-clé 7.5. □

8. Démonstration du lemme-clé

Ainsi, toujours avec $k \leqslant \rho_f < \rho < k+1$, l'objectif est d'établir une minoration :

$$\Big|z^\nu\prod_{n=1}^{\infty}E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\Big| \geqslant e^{-c\,|z|^\rho},$$

pour $z \in C_{r_m}$ appartenant à une suite de cercles de rayons :

$$1 \leqslant r_{m-1} < r_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Convention 8.1. Les lettres c, C désigneront des constantes positives finies, modifiables, dépendant du contexte.

Lemme 8.2. *Les facteurs canoniques* $E_k(z) = (1-z)\,e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}$ *satisfont :*

$$\big|E_k(z)\big| \geqslant e^{-c\,|z|^{k+1}} \qquad (\forall\,|z|\leqslant\tfrac12),$$

ainsi que :

$$\big|E_k(z)\big| \geqslant |1-z|\,e^{-c\,|z|^k} \qquad (\forall\,|z|\geqslant\tfrac12).$$

La première constante c, ici, est universelle ; la seconde dépend de k, qui est de toute façon fixé.

Démonstration. Lorsque $|z| \leqslant \frac12$, nous pouvons utiliser la série entière qui définit le logarithme de $1-z$ pour écrire :

$$\begin{aligned}E_k(z) &= e^{\log(1-z)+z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}\\ &= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^n}{n}}\\ &=: e^w.\end{aligned}$$

Comme $|e^w| \geqslant e^{-|w|}$, et comme, grâce au Lemme 6.2, on a $|w| \leqslant c\,|z|^{k+1}$ dès que $|z| \leqslant \frac12$, la première minoration tombe :

$$\begin{aligned}\big|E_k(z)\big| = \big|e^w\big| &\geqslant e^{-|w|}\\ &\geqslant e^{-c\,|z|^{k+1}}.\end{aligned}$$

Pour la seconde, avec $|z| \geqslant \frac{1}{2}$, qui équivaut à $1 \leqslant 2\,|z|$, comme pour tout entier $1 \leqslant \ell \leqslant k$, on a :

$$1^{k-\ell} \cdot |z|^{\ell} \;\leqslant\; 2^{k-\ell}\,|z|^{k-\ell}\,|z|^{\ell},$$

nous pouvons minorer et conclure :

$$\begin{aligned}
\big|E_k(z)\big| \;&=\; |1-z|\,\Big|e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}\Big| \\
&\geqslant\; |1-z|\,e^{-\frac{|z|}{1}-\frac{|z|^2}{2}-\cdots-\frac{|z|^k}{k}} \\
&\geqslant\; |1-z|\,e^{-|z|^k\left(\frac{2^{k-1}}{1}+\frac{2^{k-2}}{2}+\cdots+\frac{2^0}{k}\right)} \\
&=:\; |1-z|\,e^{-c\,|z|^k}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Le point-clé est d'obtenir une minoration du produit infini des facteurs canoniques $\prod_{n=1}^{\infty} E_k\big(\frac{z}{a_n}\big)$ dans des lieux où z est assez éloigné des zéros a_n. Le facteur z^{ν} n'intervient pas, car il est de toute façon $\geqslant 1$ en module quand $|z| = r_m \geqslant 1$.

La première estimée, quelque peu subtile, a lieu hors d'une réunion de disques centrés en les a_n et de rayons quantitativement assez petits, égaux à $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$.

Lemme 8.3. *Pour tout ρ avec $k \leqslant \rho_f < \rho < k+1$, on a une minoration :*

$$\Big|\prod_{n=1}^{\infty} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\Big| \;\geqslant\; e^{-c\,|z|^{\rho}},$$

valable pour tout :

$$z \in \mathbb{C}\Big\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_{\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}\big(a_n\big) \qquad\qquad \textit{avec} \qquad\qquad |z| \;\geqslant\; 1.$$

Démonstration. Fixons z hors de ces disques, décomposons en deux types de facteurs, et minorons grâce au Lemme 8.2 :

$$\begin{aligned}
\Big|\prod_{n=1}^{\infty} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big)\Big| \;&=\; \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \prod_{|a_n|>2|z|} E_k\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \\
&\geqslant\; \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} \Big|1-\frac{z}{a_n}\Big| \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^k} \prod_{|a_n|>2|z|} e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1}}
\end{aligned}$$

C'est l'estimation du premier de ces trois produits qui requiert la restriction que z ne soit pas trop proche des a_n.

En effet, en supposant donc que $|z-a_n| \geqslant \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$, minorons :

$$\begin{aligned}
\prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} \Big|\frac{a_n-z}{a_n}\Big| \;&\geqslant\; \prod_{|a_n|\leqslant 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+2}} \\
&=\; e^{-(k+2)\,\sum_{|a_n|\leqslant 2|z|} \log|a_n|}.
\end{aligned}$$

Or le contrôle par le Théorème 2.9 du nombre de zéros de f dans le disque $\mathbb{D}_{2|z|}$ permet, pour tout $\rho_f < \rho' < \rho$, de majorer :

$$\begin{aligned}
(k+2) \sum_{|a_n| \leqslant 2|z|} \log |a_n| &\leqslant (k+2)\, \mathfrak{n}_f\big(2\,|z|\big) \log\big(2\,|z|\big) \\
&\leqslant c\,|z|^{\rho'} \log\big(2\,|z|\big) \\
[c \text{ change}] \qquad &\leqslant c\,|z|^{\rho},
\end{aligned}$$

puisque $|z| \geqslant 1$ par hypothèse et parce qu'il existe (exercice) une constante $c > 0$ telle que $r^{\rho'} \log(2r) \leqslant c\, r^{\rho}$ pour tout $r \geqslant 1$. Par exponentiation et inversion, toujours pour $|z - a_n| \geqslant \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ et $|z| \geqslant 1$, nous obtenons finalement :

$$\prod_{|a_n| \leqslant 2|z|} \Big|1 - \frac{z}{a_n}\Big| \geqslant e^{-c\,|z|^{\rho}}.$$

Il reste à traiter deux produits, et pour chacun d'entre eux, nous allons obtenir une minoration valable sans restriction, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

En effet, comme $|a_n| \leqslant 2\,|z|$ dans le deuxième produit (fini), et comme $k < \rho < k+1$, il vient :

$$\big|a_n\big|^{\rho-k} \leqslant 2^{\rho-k}\,|z|^{\rho-k} \leqslant 2^1\,|z|^{\rho-k},$$

d'où :

$$\frac{1}{|a_n|^k} = \frac{1}{|a_n|^{\rho}}\,\big|a_n\big|^{\rho-k} \leqslant \frac{1}{|a_n|^{\rho}}\,2\,|z|^{\rho-k},$$

ce qui permet, en utilisant (7.2), de minorer comme annoncé :

$$\begin{aligned}
\prod_{|a_n| \leqslant 2|z|} e^{-c\,\frac{|z|^k}{|a_n|^k}} &= e^{-c\,|z|^k \sum_{|a_n| \leqslant 2|z|} \frac{1}{|a_n|^k}} \\
&\geqslant e^{-c\,|z|^k\, 2\,|z|^{\rho-k} \sum_{|a_n| \leqslant 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{\rho}}} \\
[c \text{ change}] \qquad &\geqslant e^{-c\,|z|^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho}}} \\
[c \text{ change}] \qquad &= e^{-c\,|z|^{\rho}}.
\end{aligned}$$

Le troisième, et dernier, produit (infini) se traite de manière analogue, en partant de $|a_n| > 2\,|z|$ qui entraîne $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{|z|}$, d'où en tenant compte de $k < \rho < k+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|a_n|^{k+1-\rho}} &< \frac{1}{2^{k+1-\rho}}\,\frac{1}{|z|^{k+1-\rho}} \\
&< 1 \cdot |z|^{-k-1+\rho},
\end{aligned}$$

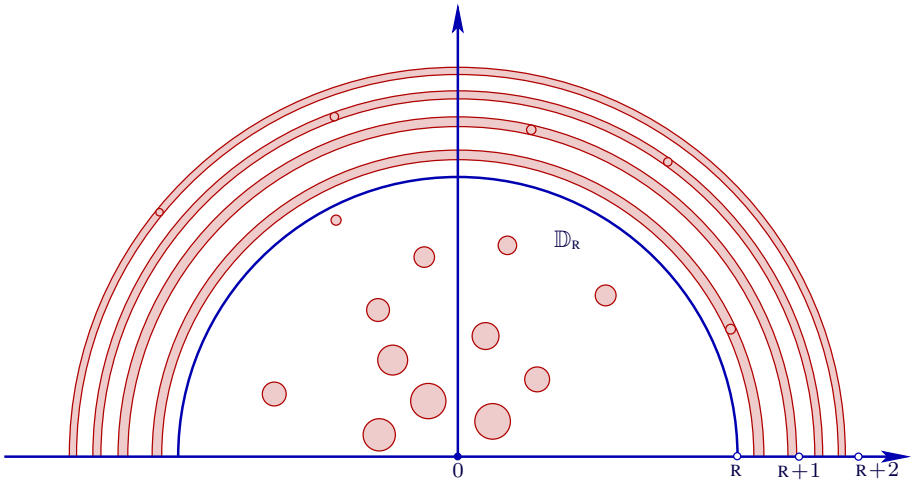
puis :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|a_n|^{k+1}} &= \frac{1}{|a_n|^{k+1-\rho}}\,\frac{1}{|a_n|^{\rho}} \\
&\leqslant |z|^{-k-1+\rho}\,\frac{1}{|a_n|^{\rho}},
\end{aligned}$$

ce qui permet, en utilisant à nouveau (7.2), de minorer comme annoncé :

$$\begin{aligned}
\prod_{|a_n|>2|z|} e^{-c\,\frac{|z|^{k+1}}{|a_n|^{k+1}}} &= e^{-c\,|z|^{k+1}\,\sum_{|a_n|>2|z|}\,\frac{1}{|a_n|^{k+1}}} \\
&\geqslant e^{-c\,|z|^{k+1}\,|z|^{-k-1+\rho}\,\sum_{|a_n|>2|z|}\,\frac{1}{|a_n|^{\rho}}} \\
&\geqslant e^{-c\,|z|^{\rho}\,\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{|a_n|^{\rho}}} \\
[c \text{ change}] \qquad &= e^{-c\,|z|^{\rho}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Intuitivement, les rayons $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ de ces disques centrés en les a_n tendent suffisamment vite vers zéro, grâce à $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty$, pour que l'on puisse s'imaginer que leur réunion devienne négligeable, pour $n \geqslant \mathrm{N} \gg 1$ grand, de manière à faire passer des grands cercles de rayons r_m qui ne rencontrent *aucun* de ces petits disques.



Fin de la démonstration du Lemme-clé 7.5. Prenons en effet $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \leqslant \frac{1}{3},$$

ainsi qu'un rayon $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand pour que :

$$\mathbb{D}_{\frac{1}{|a_1|^{k+1}}}\big(a_1\big) \cup \cdots \cup \mathbb{D}_{\frac{1}{|a_{\mathrm{N}}|^{k+1}}}\big(a_{\mathrm{N}}\big) \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}};$$

il n'est pas exclu que certains autres a_n avec $n \geqslant \mathrm{N}+1$ appartiennent aussi à $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$.

Insérons les disques restants dans les anneaux d'épaisseur totale $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ qu'ils balayent en tournant autour de l'origine :

$$\bigcup_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-a_n| < \tfrac{1}{|a_n|^{k+1}}\Big\} \subset \bigcup_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \Big\{w \in \mathbb{C}\colon\ |a_n|-\tfrac{1}{|a_n|^{k+1}} < |w| < |a_n|+\tfrac{1}{|a_n|^{k+1}}\Big\}.$$

Comme la réunion de ces anneaux pour $n \geqslant \mathrm{N}+1$ est d'épaisseur $\leqslant \frac{2}{3}$, pour chaque entier $m = 1, 2, 3, \ldots$, elle ne peut couvrir complètement chaque anneau-unité :

$$\big\{\mathrm{R}+m-1 < |w| < \mathrm{R}+m\big\},$$

d'épaisseur $1 > \frac{2}{3}$. Par conséquent, il existe bien une suite de cercles C_{r_m} centrés à l'origine de rayons :

$$\mathrm{R} + m - 1 \ < \ r_m \ < \ \mathrm{R} + m,$$

d'où $r_{m-1} < r_m \longrightarrow \infty$, qui ne rencontrent aucun de ces anneaux, donc aucun disque $\mathbb{D}_{\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}\big(a_n\big)$, y compris pour $1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$, par construction.

Ainsi s'achève la démonstration du Lemme-clé 7.5. □

9. Exercices

Exercice 1. Dans cet exercice, on applique la Définition 3.1 que la théorie des fonctions holomorphes n'utilise pas. Soit donc une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_n \neq -1$ pour tout n.

(a) Avec, pour $m \geqslant 1$ entier :

$$a_{2m-1} \ := \ -\frac{1}{\sqrt{m+1}} \qquad \text{et} \qquad a_{2m} \ := \ \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{m+1},$$

montrer que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + a_n\big) \ \in \ \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

converge vers un nombre complexe *non nul*, bien que la série de terme général a_n ne soit pas convergente.

(b) Trouver un exemple de suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sans que $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ converge dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Indication: Penser à une suite alternée $a_n = (-1)^n\, b_n$ avec $b_{n+1} \leqslant b_n$.

(c) Montrer, pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$, que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, et si $a_n \neq -1$ pour tout n, alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + a_n\big) \quad \text{converge.}$$

Exercice 2. EE

Transformée de Fourier et fonctions holomorphes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction régulière qui décroît suffisamment à l'infini, *i.e.* lorsque $|x| \longrightarrow \infty$, alors dans le cours d'*Analyse de Fourier*, la *transformée de Fourier* de $f(x)$ est définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}),$$

et c'est une fonction $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

En contrepartie, si $\widehat{f}(\xi)$ décroît elle aussi suffisamment à l'infini, *i.e.* lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, alors $f(x)$ est ré-obtenue comme *transformée de Fourier inverse* — noter le changement de signe dans l'exponentielle — de $\widehat{f}(\xi)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La transformation de Fourier joue un rôle fondamental en Analyse réelle, mais aussi en Analyse complexe. Dans ce chapitre, nous allons en effet dévoiler des liens intimes et illustrer diverses connections fructueuses qui existent entre d'une part la théorie de Fourier réelle, et d'autre part les fonctions holomorphes d'une variable complexe. Le thème principal est le suivant.

Pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ initialement définie sur la droite réelle $\mathbb{R} \times i\{0\} \subset \mathbb{C}$, la décroissance rapide (par exemple exponentielle) de sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est fortement liée à la possibilité de prolonger f holomorphiquement à certains *voisinages ouverts allongés* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Plus précisément, si f est à décroissance modérée au sens où $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ pour une constante $0 \leqslant \mathrm{C} < \infty$ de telle sorte que l'intégrale qui définit sa transformée de Fourier converge, *et si* f peut être prolongée holomorphiquement à une bande horizontale ouverte infinie centrée autour de l'axe réel, alors nous démontrerons que $\widehat{f}$ décroît exponentiellement à l'infini au sens où l'on a :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \mathrm{B}\, e^{-c|\xi|},$$

pour deux constantes $0 \leqslant \mathrm{B}, c < \infty$. Dans ces circonstances, la transformée de Fourier *inverse* peut être appliquée à $\widehat{f}$, puisque l'intégrale correspondante converge alors aussi.

De plus, on peut déduire de ces considérations la *formule sommatoire de Poisson :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \,=\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n),$$

déjà démontrée dans le cours d'*Analyse de Fourier*. De manière profonde, de nombreux théorèmes de la théorie de Fourier sont des conséquentes élégantes de la théorie de l'intégration sur des chemins complexes.

Dans un second temps, nous prendrons comme point de départ la validité de la formule d'inversion de Fourier lorsque f *et* $\widehat{f}$ sont suffisamment décroissantes à l'infini, mais sans faire l'hypothèse que f se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nous soulèverons alors une question simple et naturelle : *Quelles sont les conditions sur f pour que sa transformée de Fourier soit à support compact, disons dans un intervalle borné* $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$? Ce problème se formule en effet sans aucune référence aux concepts de l'Analyse complexe.

Cependant, cette question peut être résolue uniquement en termes des propriétés holomorphes « cachées » de f. La bonne condition nécessaire et suffisante sera exprimée par le *Théorème de Paley-Wiener*, d'après lequel :

$$\mathsf{supp}\,\widehat{f} \,\subset\, [-\mathrm{M}, \mathrm{M}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f \,\in\, \mathscr{O}(\mathbb{C}) \text{ se prolonge holomorphiquement à } \mathbb{C} \\ \text{et satisfait } |f(z)| \,\leqslant\, \mathsf{constante} \cdot e^{2\pi \mathrm{M}|z|}. \end{cases}$$

Les fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}$ tout entier qui satisfont ce contrôle de croissance sont dites *de type exponentiel*.

Intuitivement, la condition que $\widehat{f}$ s'annule identiquement en-dehors d'un intervalle compact $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}] \subset \mathbb{R}$ peut être vue comme une forme ultime (et même extrême) de décroissance à l'infini, et ainsi, le théorème de Paley-Wiener s'avère être une illustration supplémentaire des connexions intimes entre l'Analyse réelle et l'Analyse complexe.

Pour établir ces beaux résultats, la technique-clé va consister à *décaler verticalement* le chemin d'intégration, c'est-à-dire la droite réelle $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, pour produire des droites horizontales translatées vers le bas ou vers le haut, ce qui permettra de tirer avantage du comportement exponentiellement décroissant du facteur complexifié $e^{-2i\pi\xi z}$, dans lequel on remplace x par $z = x + i\,y$. En effet, lorsque $z = x \in \mathbb{R}$ est réel, on sait bien que ce facteur $e^{-2i\pi\xi x}$ oscille tout en restant borné en module (constant égale à 1), mais quand $z = x + i\,b$ est sur une droite horizontale de partie imaginaire $b \neq 0$ non nulle constante, ce facteur $e^{-2i\pi\xi x + 2\pi\xi b}$ devient de module $e^{2\pi\xi b}$ exponentiellement décroissant lorsque $\xi \longrightarrow \infty$ dès que $\mathsf{signe}\,(b) < 0$.

Ce sont ces *déplacements* de la droite réelle vers le haut et vers le bas dans le plan complexe qui vont permettre de découvrir des propriétés nouvelles de la transformation de Fourier.

2. Fonctions holomorphes de module décroissant dans des bandes

Une condition de décroissance simple que l'on peut imposer aux fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ afin que leur transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\xi) \,:=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx,$$

ait un sens, est celle qu'on appelle, dans un cours d'*Analyse de Fourier*, la *décroissance modérée* (à l'infini) :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2},$$

où $0 \leqslant \mathrm{C} < \infty$ est une constante. Si de plus on a :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2},$$

alors un théorème important montre qu'on retrouve la fonction de départ grâce à la *formule d'inversion de Fourier* — noter le changement de signe dans l'exponentielle :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi. \tag{2.1}$$

Ces résultats sont en particulier valables en supposant que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'*espace de Schwartz*, c'est-à-dire que *toutes* ses dérivées sont à décroissance plus rapide que l'inverse de toute puissance de x à l'infini :

$$\big|f^{(n)}(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}_{n,k}}{1+|x|^k} \qquad (\forall\, n, \forall\, k,\ \exists\, \mathrm{C}_{n,k}),$$

car on démontre alors que $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ satisfait *aussi* de telles inégalités.

Nous travaillerons plutôt avec l'hypothèse élémentaire de décroissance modérée. Plus généralement, le lecteur-étudiant vérifiera qu'on peut travailler avec des hypothèses du type :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+|x|^{1+\varepsilon}} \qquad \text{et} \qquad \big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+|\xi|^{1+\varepsilon}},$$

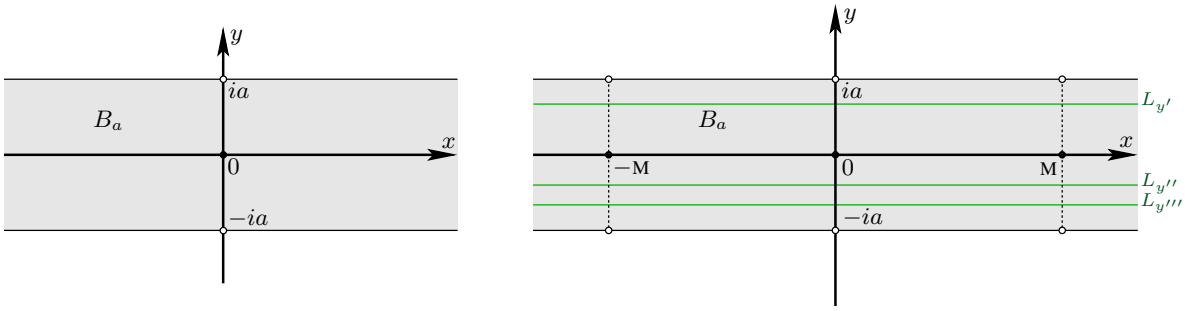
où $\epsilon > 0$ est fixe.

Dans le contexte de la décroissance modérée, introduisons maintenant une classe de fonctions *holomorphes* qui est particulièrement bien adaptée à l'objectif que nous nous sommes fixé : établir des théorèmes au sujet de la transformée de Fourier en exploitant la puissange (magique) de l'Analyse Complexe.

Définition-Notation 2.2. Pour $a > 0$ fixé, on note :

$$B_a := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |\mathsf{Im}\, z| < a\big\},$$

la bande horizontale ouverte infinie d'épaisseur $2a$, dont l'âme centrale est l'axe réel.



On introduit la classe de fonctions holomorphes :

$$\mathfrak{F}_a := \Big\{f \in \mathscr{O}(B_a) \colon\ \big|f(x+iy)\big| \leqslant \tfrac{\mathrm{C}}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } |y| < a\Big\}.$$

Les lettres C, $\widehat{\mathrm{C}}$, C_1, C_2, ..., désigneront des constantes de $\mathbb{R}_+$, modifiables, dont la valeur précise n'importe pas. En particulier, f est *bornée* dans les rectangles $B_a \cap \{|x| \leqslant \mathrm{M}\}$ où $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$.

En d'autres termes, $\mathfrak{F}_a$ consiste en les fonctions holomorphes dans B_a qui sont à décroissance modérée *uniforme* sur *chaque* droite horizontale contenue dans B_a :

$$L_{y'} := \big\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z = y'\big\} \qquad (-a < y' < a).$$

Comme suggéré intuitivement par la figure, sur toutes les droites horizontales $L_{y'}, L_{y''}, L_{y'''}, \cdots \subset B_a$, la décroissance modérée est *la même*.

Notons que pour toute « troncature rectangulaire horizontale », à savoir pour $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ quelconque, on a :

$$\left.\begin{array}{ll} |f(z)| \leqslant \mathrm{C}_1 & \text{dans } B_a \cap \{|x| \leqslant \mathrm{M}\} \\ |f(z)| \leqslant \frac{\mathrm{C}_2}{1+x^2} & \text{dans } B_a \cap \{|x| > \mathrm{M}\} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathfrak{F}_a \text{ avec } \big|f(z)\big| \leqslant \frac{\max(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)}{1+x^2}.$$

Exemples 2.3. **(1)** La fonction $f(z) := e^{-\pi z^2}$ appartient à $\mathfrak{F}_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, car en supposant $|y| < a$, il vient :

$$\Big|e^{-\pi(x+iy)^2}\Big| = e^{-\pi x^2 + \pi y^2} \leqslant \mathrm{C}\, e^{-\pi x^2} \qquad \text{avec } \mathrm{C} := e^{\pi a^2},$$

et on sait depuis la classe de terminal maternelle que $x \longmapsto e^{-\pi x^2}$ décroît beaucoup plus vite à l'infini que $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

(2) Avec $c > 0$ fixé, la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + z^2},$$

qui a deux pôles simples en $z = \pm ic$, appartient à $\mathfrak{F}_a$ pour tout $0 < a < c$, car :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| = \frac{c}{\pi} \left|\frac{1}{c^2 + x^2 + 2ixy - y^2}\right| &\leqslant \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + x^2 - y^2} \leqslant \frac{c}{\pi} \frac{1}{x^2 + c^2 - a^2} \\ \text{[Exercice]} \qquad\qquad &\leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(3) Un dernier exemple est fourni par la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{\cosh \pi z}.$$

Nous affirmons que $\frac{1}{\cosh \pi z}$ appartient à $\mathfrak{F}_a$ pour tout $0 < a < \frac{1}{2}$.

En effet, en utilisant $\frac{1}{|\alpha+\beta|} = \frac{|\overline{\alpha}+\overline{\beta}|}{(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}$, estimons :

$$\begin{aligned} \frac{2}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = \frac{2}{\big|e^{\pi x + i\pi y} + e^{-\pi x - i\pi y}\big|} &= \frac{2\,\big|e^{\pi x - i\pi y} + e^{-\pi x + i\pi y}\big|}{\big(e^{\pi x + i\pi y} + e^{-\pi x - i\pi y}\big)\big(e^{\pi x - i\pi y} + e^{-\pi x + i\pi y}\big)} \\ &= \frac{2\,\big|e^{\pi x - i\pi y} + e^{-\pi x + i\pi y}\big|}{e^{2\pi x} + e^{2i\pi y} + e^{-2i\pi y} + e^{-2\pi x}} \\ &\leqslant \frac{2\,e^{\pi x} + 2\,e^{-\pi x}}{e^{2\pi x} + 2\cos 2\pi y + e^{-2\pi x}}. \end{aligned}$$

Or, puisque l'hypothèse $|y| < a < \frac{1}{2}$ implique :

$$0 < 2\cos 2\pi a \leqslant 2\cos 2\pi y,$$

nous obtenons :

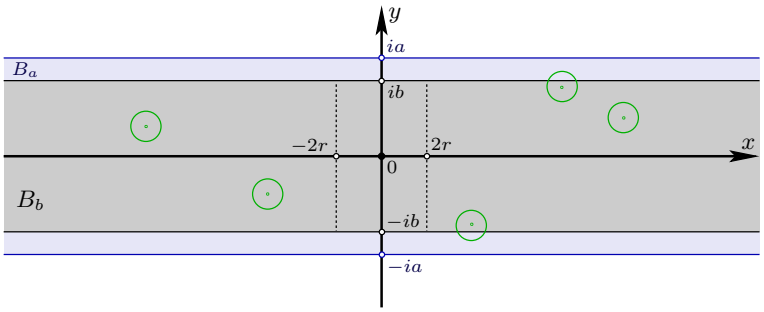
$$\Big|\frac{1}{\cosh \pi z}\Big| \;\leqslant\; 2\,\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{2\pi x}+2\cos 2\pi a+e^{-2\pi x}}.$$

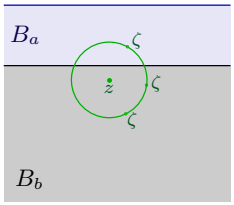
Ce majorant indépendant de $y = \operatorname{Im} z$ est borné, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction de x avec $-\infty < x < \infty$, de l'ordre $\sim \frac{2}{e^{\pi x}}$ quand $x \longrightarrow \infty$, de l'ordre $\sim \frac{2}{e^{-\pi x}}$ quand $-\infty \longleftarrow x$, donc certainement majoré par $\frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$. Δ

Notation 2.4. On note $\mathfrak{F}$ la classe des fonctions qui appartiennent à une $\mathfrak{F}_a$ pour au moins un $a > 0$:

$$\mathfrak{F} := \bigcup_{a>0} \mathfrak{F}_a.$$

Une application naturelle des inégalités de Cauchy montre que si $f \in \mathscr{F}_a$ pour un $a > 0$, alors quitte à passer à une sous-bande, la collection de *toutes* les dérivées de f est aussi à décroissance modérée uniforme.





Proposition 2.5. *Si $f \in \mathfrak{F}_a$ pour un $a > 0$, alors pour tout $0 < b < a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$f^{(n)} \;\in\; \mathfrak{F}_b.$$

Démonstration. Fixons un rayon $0 < r < a - b$, éventuellement très proche de $b - a$. Pour tout $z \in B_b$ dans la sous-bande, donc avec $|\operatorname{Im} z| < b$, le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r \subset B_a$ est contenu dans la bande originale — de quel film ?

Tout d'abord, il est clair, puisque $f^{(n)} \in \mathscr{O}(B_a)$ est continue, que l'on a :

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \;\leqslant\; \mathrm{C}_1 \;<\; \infty \qquad \text{sur le compact} \qquad \big\{|x| \leqslant 2r,\ |y| \leqslant b\big\}.$$

Enuite, une formule connue due à Cauchy exprime la dérivé n-ième par une intégrale :

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2i\pi}\int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

d'où découle une *inégalité de Cauchy :*

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \;\leqslant\; \frac{n!}{2\pi}\max_{|\zeta-z|=r}\frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}}\;2\pi r.$$

Mais par hypothèse, on a :

$$\big|f(\zeta)\big| \;\leqslant\; \frac{\mathrm{C}}{1+(\operatorname{Re}\zeta)^2}.$$

Or $\zeta = z + r\,e^{i\theta}$ donne $\operatorname{Re}\zeta - r \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re}\zeta + r$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, d'où :

$$|\operatorname{Re}\zeta| \;\geqslant\; |\operatorname{Re} z| - r.$$

En supposant $|\mathsf{Re}\, z| > 2r$ en-dehors du compact ci-dessus, nous avons :

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+(|\mathsf{Re} z|-r)^2} \leqslant \frac{\mathrm{C}'}{1+(\mathsf{Re}\, z)^2},$$

avec une nouvelle constante $\mathrm{C}' < \infty$ (exercice), donc toujours pour $|x| = |\mathsf{Re}\, z| > 2r$:

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant \frac{n!}{r^n}\,\frac{\mathrm{C}'}{1+x^2} =: \frac{\mathrm{C}_2}{1+x^2}.$$

En conclusion, nous obtenons bien l'inégalité de décroissance modérée uniforme pour $z \in B_b$:

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant \frac{\mathsf{max}\,(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)}{1+x^2}. \qquad \square$$

3. Décroissance exponentielle de la transformée de Fourier, et inversion

Dans cette section, nous commençons à démontrer des théorèmes au sujet de fonctions holomorphes définies dans des bandes horizontales, qui sont à décroissance modérée uniforme.

L'idée-clé derrière toutes les démonstrations, y compris celles qui vont suivre dans des sections ultérieures, c'est de passer au champ complexe, et d'effectuer des intégrations sur des contours bordant des domaines de Jordan 2-dimensionnels appropriés. Ainsi, cette (nouvelle) approche de la transformation de Fourier va nous dévoiler des propriétés qui demeuraient insoupçonnables lorsqu'on se cantonnait à intégrer $\int_{-\infty}^{\infty} (\bullet)\, dx$ seulement sur la droite réelle.

La première manifestation de cette idée-clé est un phénomène de décroissance exponentielle de la transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Théorème 3.1. *Si une fonction f appartient à la classe $\mathfrak{F}_a$ pour un certain $a > 0$, alors pour tout $0 \leqslant b < a$, il existe une constante $\mathrm{C}' < \infty$ telle que :*

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{C}'\, e^{-2\pi b|\xi|}.$$

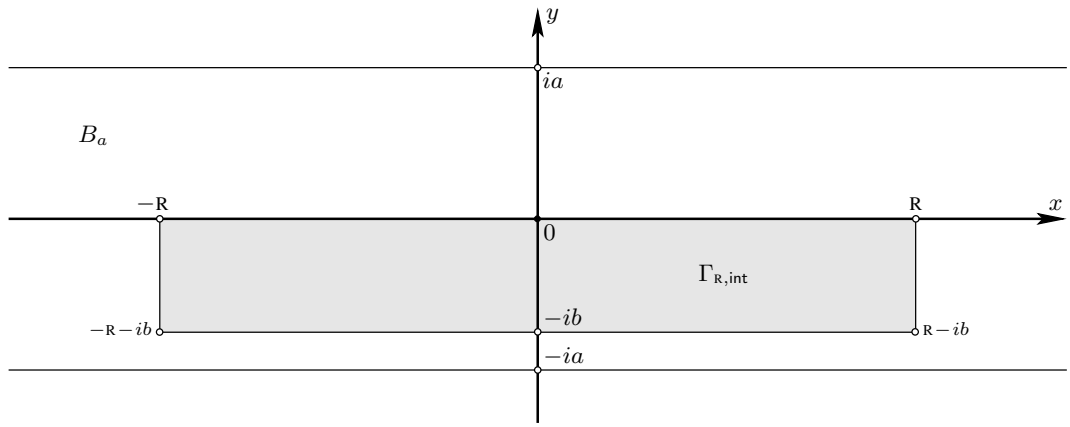
En partant de $|f(z)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ dans B_a, on trouvera $\mathrm{C}' = \mathrm{C}\,\pi$.

Démonstration. Le cas $b = 0$ dit seulement que $\widehat{f}$ est bornée, ce que le cours d'*Analyse de Fourier* avait déjà montré, comme suit :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\big|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, dx = \mathrm{C}\,\pi < \infty.$$

Supposons donc $0 < b < a$. Montrons d'abord l'estimée dans le cas $\xi \geqslant 0$.

L'idée principale consiste à descendre/abaisser le contour d'intégration, c'est-à-dire la droite réelle $]-\infty, \infty[$, d'une hauteur $-b < 0$.



Plus précisément, avec $\mathrm{R} \gg 1$ qui tendra vers ∞, considérons le contour rectangulaire Γ_{R}, de sommets $-\mathrm{R} - ib$, $\mathrm{R} - ib$, R, $-\mathrm{R}$, orienté positivement, et introduisons la fonction :

$$g(z) \,:=\, f(z)\, e^{-2i\pi z\xi}.$$

Estimons son intégrale sur le segment vertical droit :

$$\begin{aligned}
\Big| -\int_{-\mathrm{R}-ib}^{\mathrm{R}} g(z)\, dz \Big| \,&=\, \Big| \int_{-b}^{0} f(\mathrm{R}+it)\, e^{-2i\pi(\mathrm{R}+it)\xi}\, i\, dt \Big| \\
&\leqslant\, \max_{-b\leqslant t\leqslant 0} \big| f(\mathrm{R}+it) \big| \int_{-b}^{0} e^{-2\pi t\xi}\, dt \\
&\leqslant\, \frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{R}^2} \Big[\frac{e^{-2\pi t\xi}}{-2\pi\xi} \Big]_{-b}^{0} \\
&=\, \frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{R}^2}\, \frac{1}{2\pi\xi} \big(e^{2\pi b\xi} - 1 \big) \quad \xrightarrow{\mathrm{R}\to\infty} \quad 0.
\end{aligned}$$

Une estimation similaire montre (exercice) que l'intégrale de $g(z)$ sur le segment vertical gauche est aussi un $\mathrm{O}\big(\frac{1}{\mathrm{R}^2}\big)$.

La fonction $g \in \mathscr{O}(B_a)$ étant holomorphe dans un voisinage ouvert de ces contours Γ_{R} qui dépendent de R, un théorème connu de Cauchy donne :

$$0 \,=\, \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} g(z)\, dz.$$

En faisant $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, nous obtenons :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib)\, e^{-2i\pi(x-ib)\xi}\, dx. \tag{3.2}$$

Cette formule alternative pour $\widehat{f}(\xi)$ permet d'atteindre la décroissance exponentielle dans le cas $\xi \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\big| \widehat{f}(\xi) \big| \,&\leqslant\, \int_{-\infty}^{\infty} \big| f(x-ib) \big|\, e^{-2\pi b\xi}\, dx \\
&\leqslant\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, dx \cdot e^{-2\pi b\xi} \\
&=\, \mathrm{C}\, \pi\, e^{-2\pi b\xi}.
\end{aligned}$$

Une argumentation similaire existe lorsque $\xi \geqslant 0$, cette fois-ci en décalant la droite réelle vers le haut d'une hauteur $b > 0$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Ce résultat exprime que toute $f \in \mathfrak{F}$ a une transformée de Fourier $\widehat{f}$ qui décroît très rapidement à l'infini. Faisons remarquer que, plus on peut prolonger holomorphiquement f dans de bandes grandes, c'est-à-dire plus on peut augmenter $a > 0$, donc aussi $b < a$, plus la rapidité de décroissance du majorant $e^{-2\pi b|\xi|}$ augmente. Nous reviendrons sur cet ordre d'idées dans la Section **5**, où nous décrirons toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ jouit de la décroissance rapide maximale et ultime, à savoir, $\widehat{f}$ est à support compact.

Puisque nous savons maintenant que $\widehat{f}$ décroît exponentiellement rapidement, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$ qui définit la transformée de Fourier inverse a du sens. Nous pouvons établir la formule d'inversion de Fourier, déjà vue dans un cours d'*Analyse de Fourier* avec des méthodes purement réelles.

Théorème 3.3. [Inversion de Fourier] *Si* $f \in \mathfrak{F} = \bigcup_{a>0} \mathfrak{F}_a$, *alors :*

$$f(x) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Démonstration. Outre une intégration le long d'un contour dans le champ complexe, la preuve requiert la valeur d'une intégrale définie élémentaire.

Lemme 3.4. *Si* $\mathrm{A} > 0$ *et si* $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$, *alors :*

$$\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\, d\xi \,=\, \frac{1}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}.$$

Preuve. Puisque $\left|e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\right| = e^{-\mathrm{A}\,\xi}$, l'intégrale converge. Elle vaut effectivement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\, d\xi \,&=\, \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^{\mathrm{R}} e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\, d\xi \\
&=\, \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \left[\frac{e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}}{-\mathrm{A}-i\mathrm{B}}\right]_0^{\mathrm{R}} \\
&=\, \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \left(-\,\frac{e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\mathrm{R}}}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}} + \frac{1}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}\right) \,=\, -0 + \frac{1}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nous pouvons commencer la preuve de la formule d'inversion de Fourier. À nouveau, le signe de ξ va intervenir, donc décomposons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \,=\, \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi + \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Pour la seconde intégrale, argumentons comme suit. Soit $f \in \mathfrak{F}_a$, avec $a > 0$, et soit $0 < b < a$. En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 3.1, *voir* notamment (3.2), nous obtenons :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(u-ib)\, e^{-2i\pi(u-ib)\xi}\, du.$$

Grâce à la convergence de l'intégration par rapport à ξ qui garantit l'applicabilité du théorème de Fubini, calculons :

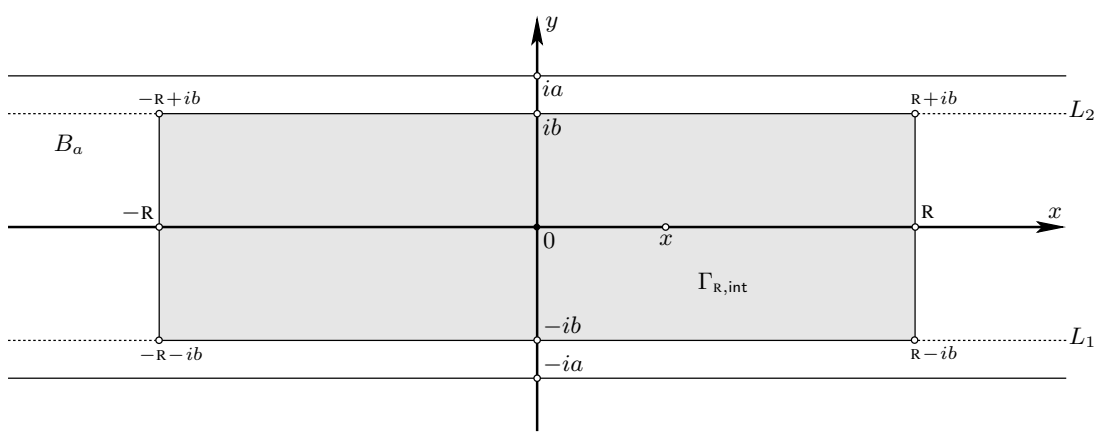
$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u-ib)\, e^{-2i\pi(u-ib)\xi}\, e^{2i\pi x\xi}\, du\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(u-ib) \int_0^\infty e^{-2\pi b - 2i\pi(u-x)}\, d\xi\, du \\
\text{[Lemme 3.4]} \qquad &= \int_{-\infty}^\infty f(u-ib)\, \frac{1}{2\pi b + 2i\pi(u-x)}\, du \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(u-ib)}{u-ib-x}\, du \\
&=: \frac{1}{2i\pi} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta,
\end{aligned}$$

où L_1 désigne la droite $\{u - ib\colon\ u \in \mathbb{R}\}$, parcourue de la gauche vers la droite, c'est-à-dire que L_1 est l'axe réel $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ descendu de la hauteur $-b < 0$.

Pour ce qui est de l'intégrale portant sur $\xi < 0$, un calcul similaire conduit (exercice) à :

$$\int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \;=\; -\frac{1}{2i\pi} \int_{L_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta,$$

où L_2 est l'axe réel surelevé de la hauteur $b > 0$, et orienté lui aussi de la gauche vers la droite.



Ensuite, soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque, et pour $\mathrm{R} > |x|$ avec $\mathrm{R} \gg 1$ qui tendra vers l'infini, considérons le contour représenté sur la figure.

Puisque la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - x}$ a un unique pôle simple de résidu $f(x)$ en le point $\zeta = x$, le théorème des résidus donne :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta.$$

Si nous laissons s'évader $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, le lecteur scrupuleux pourra vérifier (exercice) que les intégrales sur les deux segments verticaux du rectangle tendent toutes deux vers 0.

À la limite, il ne reste plus que deux intégrales horizontales, et nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta \\ &= \int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi + \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi. \end{aligned}$$

□

4. Formule sommatoire de Poisson : Approche holomorphe

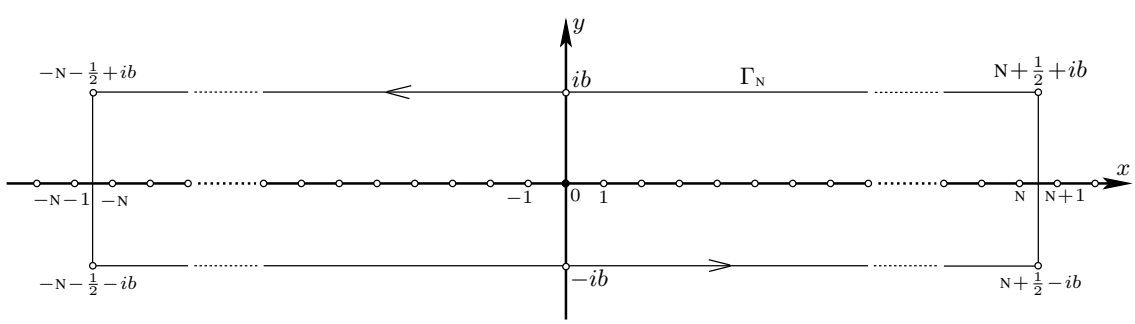
Le prochain résultat est une formule sommatoire due à Poisson, que l'on peut aussi démontrer dans un cours d'*Analyse de Fourier* avec des méthodes purement réelles.

Théorème 4.1. *Si $f \in \mathfrak{F}$ est holomorphe dans une bande autour de l'axe réel et est à décroissance modérée uniforme, alors :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

Notons que la première série converge grâce à la décroissance modérée, et que la seconde converge aussi grâce au Théorème 3.1.

Démonstration. Soit donc $f \in \mathfrak{F}_a$ avec $a > 0$, et choisissons un réel b avec $0 < b < a$. La fonction 1-périodique $1\big/(e^{2i\pi z}-1)$ a des pôles simples en tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus tous égaux au résidu en $z = n = 0$, qui vaut $1\big/2i\pi$. Donc la fonction $f(z)\big/(e^{2i\pi z}-1)$ a des pôles simples aux entiers $n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus égaux à $f(n)\big/2i\pi$.



Nous pouvons donc appliquer le théorème des résidus au contour rectangulaire Γ_{N} de sommets $-\mathrm{N}-\frac{1}{2}-ib$, $\mathrm{N}+\frac{1}{2}-ib$, $\mathrm{N}+\frac{1}{2}+ib$, $-\mathrm{N}-\frac{1}{2}+ib$, où $\mathrm{N} \geqslant 0$ est un entier quelconque. Ceci nous donne :

$$\sum_{-\mathrm{N}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} f(n) \;=\; \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz.$$

En laissant tendre $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, et en nous souvenant que f est à décroissante modérée, la somme à gauche converge vers $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$.

De plus, à nouveau grâce à la décroissance modérée (uniforme), on peut se convaincre (exercice) que les deux intégrales sur les deux segments verticaux tendent vers 0 lorsque

N $\longrightarrow \infty$. Par conséquent, à la limite, il reste :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \;=\; \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz, \tag{4.2}$$

où $L_1 = \mathbb{R} - i\,b$ et $L_2 = \mathbb{R} + i\,b$ sont deux droites horizontales obtenues en décalant $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ d'une hauteur $-b$ vers le bas, et $+b$ vers le haut, respectivement.

Maintenant, utilisons le fait que pour $|w| > 1$, on a :

$$\frac{1}{w-1} \;=\; w^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n},$$

pour développer sur L_1, où $|e^{2i\pi z}| = e^{2\pi b} > 1$, en série entière normalement convergente :

$$\frac{1}{e^{2i\pi z}-1} \;=\; e^{-2i\pi z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2i\pi n z}.$$

De même, puisque pour $|w| < 1$, on a :

$$\frac{1}{w-1} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} w^{n},$$

nous pouvons développer sur L_2 où $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi b} < 1$:

$$\frac{1}{e^{2i\pi z}-1} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi n z}.$$

Maintenant, en substituant ces développements dans (4.2), nous trouvons :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \;&=\; \int_{L_1} f(z)\left(e^{-2i\pi z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2i\pi n z}\right)dz + \int_{L_2} f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi n z}\right)dz \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}\int_{L_1} f(z)\,e^{-2i\pi(n+1)z}\,dz + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{L_2} f(z)\,e^{2i\pi n z}\,dz.\end{aligned}$$

Enfin, en re-déplaçant les droites L_1 et L_2 vers la droite réelle centrale $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ grâce à (3.2), nous atteignons la conclusion :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2i\pi(n+1)x}\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{2i\pi n x}\,dx \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(-n) \\ &=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n).\end{aligned}$$

□

La formule sommatoire de Poisson possède de nombreuses conséquences intéressantes, et nous allons maintenant en dériver quelques unes avant de terminer cette section.

Tout d'abord, souvenons-nous que la fonctions $e^{-\pi x^2}$ est un point fixe pour la transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,e^{-2i\pi\xi x}\,dx \;=\; e^{-\pi\xi^2}.$$

Pour des paramètres réels fixés t et $a > 0$, le changement de variable $x \longmapsto t^{1/2}(x+a)$ dans cette intégrale montre que :

$$f(x) \,=\, e^{-\pi t(x+a)^2} \qquad \text{a pour transformée} \qquad \widehat{f}(\xi) \,=\, \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi}{t}\xi^2}\, e^{2i\pi a\xi}.$$

Alors une application de la formule sommatoire de Poisson à ce couple $(f, \widehat{f})$ — deux fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{F}$ — donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(n+a)^2} \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi}{t}n^2}\, e^{2i\pi na}. \tag{4.3}$$

Cette identité possède des conséquences remarquables. Par exemple, le cas spécial $a = 0$ est une relation fonctionnelle satisfaite par la *fonction thêta* :

$$\vartheta(t) \,:=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2},$$

à savoir :

$$\vartheta(t) \,=\, \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, \vartheta\big(\tfrac{1}{t}\big) \qquad (t>0).$$

Cette équation sera utilisée lorsque, dans un prochain chapitre, nous démontrerons une équation fonctionnelle célèbre satisfaite par la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Souvenons-nous que dans le chapitre consacré au théorème des résidus, nous avons démontré que la fonction $\frac{1}{\cosh \pi x}$ est *aussi* un point fixe pour la transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh \pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \,=\, \frac{1}{\cosh \pi\xi}.$$

Toujours avec deux paramètres $t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, un changement de variable approprié (exercice) montre que :

$$f(x) \,=\, \frac{e^{-2i\pi a x}}{\cosh \frac{\pi}{t} x} \qquad \text{a pour transformée} \qquad \widehat{f}(\xi) \,=\, \frac{t}{\cosh \pi(\xi+a)t}.$$

Alors la formule sommatoire de Poisson donne ici :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi a n}}{\cosh \frac{\pi}{t} n} \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{\cosh \pi(n+a)t}.$$

5. Théorème de Paley-Wiener

Dans cette section, nous prenons un autre point de départ. Nous ne supposons pas que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se prolonge holomorphiquement à une bande horizontale centrée sur l'axe réel, mais nous supposons la validité de la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \qquad \text{si} \qquad \widehat{f}(\xi) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx,$$

sous les *deux* hypothèses élémentaires de croissance modérée :

$$\big|f(x)\big| \,\leqslant\, \frac{\mathrm{C}}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad \big|\widehat{f}(\xi)\big| \,\leqslant\, \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2}.$$

Une démonstration de cette formule d'inversion sous ces hypothèses apparaît dans le cours d'*Analyse de Fourier*.

Commençons par présenter une réciproque partielle du Théorème 3.1, qui obtenait :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{C}' \, e^{-2\pi b|\xi|}.$$

Théorème 5.1. *Si la transformée de Fourier $\widehat{f}$ satisfait $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{-2\pi a|\xi|}$, pour deux constantes $0 < a, \mathrm{A} < \infty$, alors $f(x)$ est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction $f(z)$ holomorphe, pour tout $0 < b < a$ arbitrairement proche de a, dans la bande :*

$$\big\{z \in \mathbb{C} \colon \ |\mathsf{Im}\, z| < b\big\}.$$

Démonstration. Nous affirmons que notre fonction $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$ se prolonge holomorphiquement à la bande $\{|\mathsf{Im}\, z| < b\}$ *via* la formule :

$$f(z) \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

En effet, pour $z = x \in \mathbb{R}$, on retrouve $f(x)$. Ensuite, grâce à l'hypothèse principale du théorème, cette intégrale converge normalement dans la bande, car en majorant :

$$\big|e^{2i\pi z\xi}\big| \ = \ \big|e^{2i\pi(x+iy)\xi}\big| \ = \ \big|e^{-2\pi y\xi}\big| \ \leqslant \ e^{2\pi b|\xi|},$$

il vient :

$$\bigg|\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi\bigg| \ \leqslant \ \mathrm{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi(a-b)|\xi|}\, d\xi \ < \ \infty.$$

Enfin, le fait que l'intégrande $z \longmapsto \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}$ de cette formule soit holomorphe par rapport à z garantit intuitivement que $f(z)$ est holomorphe — mais nous n'intégrons pas sur un compact, donc il faut encore travailler un peu.

Pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ introduisons donc la suite d'intégrales « tronquées » :

$$f_n(z) \ := \ \int_{-n}^{n} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

D'après le théorème des intégrales à paramètre vu dans un chapitre qui précède, ces fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes pour $z \in \mathbb{C}$, dans *tout* le plan complexe.

De plus, en prenant z avec $|\mathsf{Im}\, z| < b$, il vient :

$$\big|f(z) - f_n(z)\big| \ \leqslant \ \int_{|\xi| \geqslant n} \Big|\widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\Big|\, d\xi \ \leqslant \ \mathrm{A} \int_{|\xi| \geqslant n} e^{-2\pi(a-b)|\xi|}\, d\xi \ \xrightarrow{n \to \infty} \ 0.$$

Donc la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément dans la bande, et un théorème connu dû à Cauchy assure que la limite f est bien holomorphe dans cette bande. □

Observons qu'en faisant tendre $b \xrightarrow{<} a$, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande $\{|\mathsf{Im}\, z| < a\}$.

Une conséquence immédiate du principe des zéros isolés est le

Corollaire 5.2. *Si $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{O}\big(e^{-2\pi a|\xi|}\big)$ pour un réel $a > 0$ et si f s'annule sur un sous-intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, alors $f \equiv 0$ dans la bande $\{|\mathsf{Im}\, z| < a\}$.* □

Le théorème de Paley-Wiener va plus loin que le Théorème 5.1 qui précède, car il décrit précisément les fonctions dont la transformée de Fourier est à support dans un intervalle compact (symétrique) $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Les fonctions $\widehat{f}(\xi)$ qui deviennent identiquement nulles lorsque $|\xi| \gg 1$ est grand sont certainement à décroissance modérée, et d'ailleurs à décroissance maximale possible.

Théorème 5.3. [Paley-Wiener] *Soit* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue à décroissance modérée,* i.e. $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$, *et soit* $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx$ *sa transformée de Fourier. Alors on a équivalence entre :*

$$\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}) \text{ se prolonge holomorphiquement à } \mathbb{C} \\ \text{et satisfait } |f(z)| \leqslant \text{constante} \cdot e^{2\pi\mathrm{M}|z|}. \end{cases}$$

Démonstration. L'implication $\Longrightarrow$ est simple. Supposons en effet que $\widehat{f}$ est à support dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, donc trivialement à décroissance modérée. Ainsi, la formule d'inversion de Fourier s'applique et donne :

$$f(x) = \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Mais comme on intègre sur un compact, nous pouvons remplacer x par la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ pour introduire la fonction :

$$f(z) := \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

Grâce au théorème des intégrales à paramètre holomorphe que nous avons utilisé il y a un instant, cette fonction est holomorphe entière, *i.e.* holomorphe dans l'ouvert maximal $\Omega = \mathbb{C}$. Évidemment, on a $f(z)|_{z=x} = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Enfin, une majoration « simple et brutale » conclut :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| &\leqslant \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \big|\widehat{f}(\xi)\big|\, \big|e^{2i\pi(x+iy)\xi}\big|\, d\xi \\ &\leqslant \max_{|\xi|\leqslant \mathrm{M}} \big|\widehat{f}(\xi)\big| \cdot \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} e^{-2\pi y\xi}\, d\xi \\ &\leqslant \max_{|\xi|\leqslant \mathrm{M}} \big|\widehat{f}(\xi)\big| \cdot 2\,\mathrm{M} \cdot e^{2\pi\mathrm{M}|y|} \\ &\leqslant \text{constante} \cdot e^{2\pi\mathrm{M}|z|}. \end{aligned}$$

La réciproque $\Longleftarrow$ requiert beaucoup plus de travail. Supposons donc que f se prolonge comme $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ et satisfait $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi\mathrm{M}|z|}$. D'après la troisième ligne des inégalités que nous venons de détailler ci-dessus, si $\widehat{f}$ était à support dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, la borne plus forte $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi\mathrm{M}|y|}$ serait satisfaite. Comme précédemment, la lettre C désigne une constante modifiable.

Pour établir la réciproque $\Longleftarrow$, l'idée va être d'essayer de se ramener à une meilleure situation où cette borne plus forte serait satisfaite. Toutefois, cela n'est vraiment pas suffisant, car nous aurons besoin aussi d'une décroissance modérée lorsque $|x| \longrightarrow \infty$, afin d'assurer la convergence des intégrales considérées.

C'est pour cette raison que nous allons commencer par faire des hypothèses supplémentaires, pour ensuite les supprimer pas à pas.

Étape 1. Supposons que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfait la condition suivante concernant la décroissance modérée en x et la croissance en y :

$$\big|f(x+iy)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, e^{2\pi\mathrm{M}|y|}. \tag{5.4}$$

L'objectif est de montrer que $\widehat{f}(\xi) = 0$ lorsque $|\xi| > \mathrm{M}$. En fait, l'argument se décompose en deux parties :

$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \tfrac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, e^{-2\pi \mathrm{M} y} \quad \forall\, y \leqslant 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{pour } \xi > \mathrm{M}\Big),$$
$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \tfrac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, e^{2\pi \mathrm{M} y} \quad \forall\, y \geqslant 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{pour } \xi < -\mathrm{M}\Big).$$

Traitons la première implication. Supposons donc que $\xi > \mathrm{M}$ et pour $y \leqslant 0$, écrivons :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)\, e^{-2i\pi\xi(x+iy)}\, dx,\end{aligned}$$

où nous avons déplacé la droite réelle $]-\infty, \infty[$ vers le bas d'une hauteur $y \leqslant 0$, en appliquant un argument déjà utilisé, *voir* (3.2). Il en découle la majoration :

$$\begin{aligned}\big|\widehat{f}(\xi)\big| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x+iy)\big|\, e^{2\pi\xi y}\, dx \\ &\leqslant \mathrm{C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\; e^{-2\pi \mathrm{M} y}\, e^{2\pi\xi y} \\ &= \mathrm{C}\, \pi\, e^{2\pi y(\xi - \mathrm{M})}.\end{aligned}$$

Comme $\xi - \mathrm{M} > 0$, en laissant s'échapper $y \longrightarrow -\infty$, il vient sans effort $\widehat{f}(\xi) = 0$.

Évidemment, lorsque $\xi < -\mathrm{M}$, la deuxième implication se démontre en déplaçant la droite réelle vers le haut d'une hauteur $y \geqslant 0$.

Étape 2. Maintenant, relaxons la condition (5.4) en supposant seulement que f satisfasse :

$$\big|f(x+iy)\big| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi \mathrm{M}|y|}. \tag{5.5}$$

Cette condition est toujours plus forte que celle du Théorème 5.3, mais elle est plus faible que celle que nous venons d'utiliser. L'objectif est également de démontrer que $\widehat{f}(\xi) = 0$ lorsque $|\xi| > \mathrm{M}$. À nouveau, l'argument se décompose en deux parties :

$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \mathrm{C}\, e^{-2\pi \mathrm{M} y} \quad \forall\, y \leqslant 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{pour } \xi > \mathrm{M}\Big),$$
$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi \mathrm{M} y} \quad \forall\, y \geqslant 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{pour } \xi < -\mathrm{M}\Big).$$

Traitons la première implication. Pour $\varepsilon > 0$, introduisons à cette fin les fonctions auxiliaires :

$$f_\varepsilon(z) := \frac{f(z)}{(1+i\varepsilon z)^2}.$$

Cette collection de fonctions nous permet de nous ramener à l'Étape 1. En effet, dans le demi-plan fermé *inférieur* $\{\mathrm{Im}\, z \leqslant 0\}$, comme $y \leqslant 0$ implique $1 - \varepsilon y \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} \big|f_\varepsilon(x+iy)\big| \;=\; \frac{1}{|1-\varepsilon y + i\varepsilon x|^2}\,\big|f(z)\big| \;&=\; \frac{1}{(1-\varepsilon y)^2 + (\varepsilon x)^2}\,\big|f(z)\big| \\ &\leqslant\; \frac{1}{1+\varepsilon^2 x^2}\,\mathrm{C}\, e^{-2\pi \mathrm{M} y} \\ &\leqslant\; \frac{\mathrm{C}\,\varepsilon^{-2}}{1+x^2}\, e^{-2\pi \mathrm{M} y}, \end{aligned}$$

avec la constante C de (5.4) remplacée par la nouvelle constante $\mathrm{C}\,\varepsilon^{-2} < \infty$. Donc la première implication de l'Étape 1 s'applique, et nous offre $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = 0$ pour $\xi > \mathrm{M}$. Nous voulons en déduire la même annulation pour $\widehat{f}(\xi)$, donc nous devons bien comprendre comment ce facteur $\frac{1}{(1+i\varepsilon z)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$ va devenir négligeable.

Observons que le facteur astucieux en question $1\big/(1+i\varepsilon z)^2$ est de module $\leqslant 1$ dans le demi-plan fermé inférieur $\{\mathrm{Im}\, z \leqslant 0\}$, car $1 - \varepsilon y \geqslant 1$ implique :

$$\frac{1}{|1+i\varepsilon z|^2} \;=\; \frac{1}{|1-\varepsilon y + i\varepsilon x|^2} \;=\; \frac{1}{(1-\varepsilon y)^2 + (\varepsilon x)^2} \;\leqslant\; 1.$$

De plus, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, ce facteur converge vers 1 normalement sur les compacts $K \subset \mathbb{C}$, donc en particulier sur les intervalles $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \subset \mathbb{R}$.

Nous affirmons alors que ces observations garantissent que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}(\xi)$, grâce à l'inégalité :

$$\begin{aligned} \Big|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f_\varepsilon}(\xi)\Big| \;&=\; \bigg|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big(1 - \frac{1}{(1+i\varepsilon x)^2}\Big)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx\bigg| \\ &\leqslant\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\Big|1 - \frac{1}{(1+i\varepsilon x)^2}\Big|\, dx \;\xrightarrow{\;\varepsilon\to 0\;}\; 0, \end{aligned}$$

et grâce à l'hypothèse que $f(x) \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ — exercice de révision : découper l'intégrale comme $\int_{|x|\leqslant \mathrm{R}} + \int_{|x|>\mathrm{R}}$ et faire $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, ou penser au théorème de convergence dominée.

En appliquant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\bullet)$, nous en déduisons comme désiré que $\widehat{f}(\xi) = 0$ pour $\xi > \mathrm{M}$.

Quant à la deuxième implication ci-dessus, elle se démontre d'une manière analogue en introduisant, pour $\varepsilon > 0$, les fonctions auxiliaires :

$$f_\varepsilon(z) \;:=\; \frac{f(z)}{(1-i\varepsilon z)^2},$$

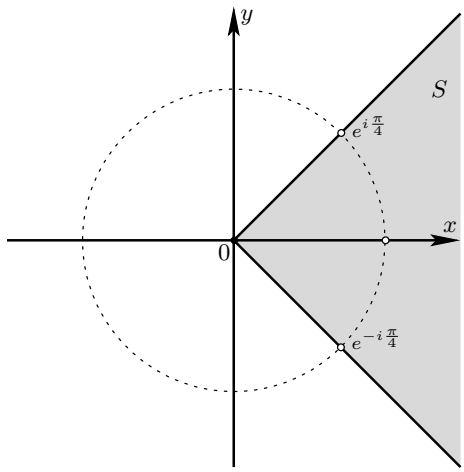
et en travaillant dans le demi-plan fermé *supérieur* $\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$.

Étape 3. Pour terminer la démonstration, nous devons faire voir que l'hypothèse $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi \mathrm{M}|z|}$ du Théorème 5.3 est impliquée par la condition $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi \mathrm{M}|y|}$ que nous venons d'employer.

Comme la fonction f est à décroissance modérée, *i.e.* satisfait $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$, donc est bornée sur $\mathbb{R}$, après division par une constante appropriée, nous pouvons supposer que $|f(x)| \leqslant 1$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}$. Nous allons alors démontrer que l'on a, *sans* constante C :

$$\left.\begin{aligned} \big|f(z)\big| \;&\leqslant\; e^{2\pi \mathrm{M}|z|} \\ |f(x)| \;&\leqslant\; 1 \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|f(x+iy)\big| \;\leqslant\; e^{2\pi \mathrm{M}|y|}. \tag{5.6}$$

Cette implication va découler d'un argument général ingénieux dû à Phragmén et Lindelöf, qui permet d'adapter le principe du maximum du module à certains domaines *non bornés* de $\mathbb{C}$. Une version particulière de ce résultat qui sera suffisante pour notre objectif s'énonce comme suit.



Théorème 5.7. [Phragmén-Lindelöf] *Soit F une fonction holomorphe dans le secteur angulaire :*

$$S := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ -\tfrac{\pi}{4} < \mathsf{Arg}\, z < \tfrac{\pi}{4}\big\},$$

qui est continue dans l'adhérence $\overline{S} = \big\{-\frac{\pi}{4} \leqslant \mathsf{Arg}\, z \leqslant \frac{\pi}{4}\big\}$. On suppose que :

- $|F(z)| \leqslant 1$ *sur les deux demi-droites du bord $\partial S = \big\{\mathsf{Arg}\, z = \pm\frac{\pi}{4}\big\}$;*
- *il existe deux constantes $0 < c, \mathrm{C} < \infty$ telles que $|F(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{c|z|}$ pour tout $z \in S$.*

Alors :

$$|F(z)| \leqslant 1 \qquad (\forall\, z \in \overline{S}).$$

En d'autres termes, si F est bornée par 1 en module sur le bord de S, et si sa croissance reste raisonnable, *i.e.* d'ordre exponentiel au plus égal à 1, alors F est en fait partout bornée par 1 dans le secteur.

Mais comme le montre la fonction $F(z) := e^{z^2}$, il est nécessaire d'imposer une restriction sur la croissance de F à l'infini. En effet, cette fonction est bornée par 1 au bord, puisque pour $z = r\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ on constate que $e^{z^2} = e^{r^2 e^{\pm i\frac{\pi}{2}}} = e^{\pm i r^2}$ est de module unité, mais $F(x) = e^{x^2}$ est (vraiment) non bornée sur la demi-droite médiane $\mathbb{R}_+^* \subset S$ du secteur lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Démonstration. L'idée est de détourner à notre avantage cette « fonction ennemie » e^{z^2}. Il s'agit de la modifier et de la remplacer par e^{z^α} avec n'importe quel $0 < \alpha < 2$. Pour fixer les idées, prenons $\alpha := \frac{3}{2}$.

Pour $\varepsilon > 0$, introduisons :

$$F_\varepsilon(z) := F(z)\, e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}.$$

Ici, nous avons choisi la *branche principale* de la fonction logarithme $\log z$, holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ avec $\log x \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, et nous avons défini $z^{3/2} := e^{\frac{3}{2}\log z}$, de telle sorte que pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, on a $z^{3/2} = r^{3/2}\, e^{3i\theta/2}$. Ainsi, F_ε est holomorphe dans le secteur S, et continue jusqu'à son bord, *i.e.* continue dans $\overline{S} = S \cup \partial S$.

De plus, on a :

$$\left|e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}\right| \,=\, \left|e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+i\sin\frac{3\theta}{2}\right)}\right| \,=\, e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\cos\frac{3\theta}{2}}.$$

Puisque $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ dans le secteur fermé, il vient $-\frac{3\pi}{8} \leqslant \frac{3\theta}{2} \leqslant \frac{3\pi}{8}$, ce qui garantit la positivité stricte de :

$$\cos\frac{3\,\theta}{2} \,\geqslant\, \cos\frac{3\,\pi}{8} \,>\, 0.$$

Ceci, allié à l'hypothèse du théorème :

$$\left|F(r\,e^{i\theta})\right| \,\leqslant\, \mathrm{C}\, e^{c\,r},$$

implique que F_ε décroît rapidement à l'infini dans le secteur fermé $\overline{S}$ lorsque $|z| = r \longrightarrow \infty$ comme le montre l'estimation :

$$\begin{aligned}\left|F_\varepsilon(r\,e^{i\theta})\right| \,&=\, \left|F(r\,e^{i\theta})\right|\,\left|e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}\right| \\ &\leqslant\, \mathrm{C}\, e^{c\,r}\, e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\cos\frac{3\theta}{2}} \\ &\leqslant\, \mathrm{C}\, e^{c\,r-\varepsilon\cos\frac{3\pi}{8}\, r^{3/2}} \quad\xrightarrow{r\to\infty}\quad 0.\end{aligned}$$

En particulier, ceci implique que F_ε est bornée dans $\overline{S}$.

Assertion 5.8. *En fait,* $\left|F_\varepsilon(z)\right| \leqslant 1$ *pour tout* $z \in \overline{S}$.

Preuve. Posons :

$$\mathrm{M} \,:=\, \sup_{z\in\overline{S}}\left|F_\varepsilon(z)\right|.$$

Nous pouvons supposer que $F \not\equiv 0$, donc $\mathrm{M} > 0$. Soit $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ une suite de points $w_j \in \overline{S}$ telle que $|F_\varepsilon(w_j)| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{M}$.

Comme $\mathrm{M} > 0$ et comme $F_\varepsilon(z)$ tend vers 0 lorsque $|z| = r \longrightarrow \infty$, il est clair que cette suite maximisante ne peut s'évader vers l'infini dans l'ouverture du secteur. Donc cette suite $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ est forcée de rester dans un compact de la forme $\overline{S} \cap \{|z| \leqslant \mathrm{R}\}$ avec $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand. Après extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer la convergence :

$$w_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w_* \,\in\, \overline{S}.$$

Ce point w_* ne peut appartenir à l'intérieur connexe $S = \mathsf{Int}\,\overline{S}$, sinon, F_ε devrait être une constante à cause du principe du maximum, non nulle puisque $\mathrm{M} > 0$, ce qui contredirait l'annulation de F_ε vers l'infini. Donc ce point $w_* \in \partial S$ doit se trouver au bord.

Mais sur le bord, on a tout d'abord par hypothèse dans le théorème $\left|F|_{\partial S}\right| \leqslant 1$, puis par prestidigitation astucieuse préparée à l'avance aussi :

$$\left|e^{-\varepsilon\,(r\,e^{\pm i\frac{\pi}{4}})^{3/2}}\right| \,=\, \left|e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\cos\pm\frac{3\pi}{8}}\right| \,\leqslant\, 1,$$

ce qui implique $\left|F_\varepsilon|_{\partial S}\right| \leqslant 1$, donc force $|F_\varepsilon(w_*)| \leqslant 1$, et donc en définitive $\mathrm{M} \leqslant 1$, exactement ce qui était asserté ! $\square$

Pour conclure la démonstration du Théorème 5.7, il suffit de faire tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans l'inégalité $\left|F(z)\, e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}\right| \leqslant 1$ que nous venons d'établir dans tout $\overline{S}$. $\square$

Fin de la démonstration du Théorème 5.3. Nous pouvons maintenant montrer la dernière implication restante (5.6).

Observons que le secteur d'ouverture $\frac{\pi}{2}$ dans le Théorème 5.7 de Phragmén-Lindelöf peut être rotationné, et que le résultat demeure valable, par exemple dans le quadrant positif $Q := \{x > 0,\, y > 0\}$. Introduisons alors :

$$F(z) \,:=\, f(z)\, e^{2i\pi \mathrm{M} z}.$$

Grâce aux *deux* hypothèses (5.6), cette fonction $F(z)$ est bornée par 1 en module sur l'axe réel positif :

$$|F(x)| \,=\, \big|f(x)\, e^{2i\pi \mathrm{M} x}\big| \,=\, |f(x)| \,\leqslant\, 1 \qquad (x \geqslant 0),$$

et aussi sur l'axe imaginaire positif :

$$|F(iy)| \,=\, \big|f(iy)\, e^{-2\pi \mathrm{M} y}\big| \,=\, \big|f(iy)\, e^{-2\pi \mathrm{M}|iy|}\big| \,\leqslant\, 1 \qquad (y \geqslant 0).$$

Comme nous avons aussi dans ce quadrant le contrôle :

$$|F(z)| \,=\, \big|f(z)\, e^{2i\pi \mathrm{M} z}\big| \,\leqslant\, e^{2\pi \mathrm{M}|z|}\, e^{2\pi \mathrm{M}|z|} \,\leqslant\, \mathrm{C}\, e^{c|z|},$$

le Théorème 5.7 de Phragmén-Lindelöf s'applique et nous donne $|F(z)| \leqslant 1$ dans le quadrant fermé $\overline{Q}$, c'est-à-dire $\big|f(z)\, e^{2i\pi \mathrm{M} z}\big| \leqslant 1$, d'où pour tout $z = x + iy$ avec $x, y \geqslant 0$:

$$|f(z)| \,\leqslant\, \big|e^{-2i\pi \mathrm{M}(x+iy)}\big| \,=\, e^{2\pi \mathrm{M}|y|} \qquad (y \geqslant 0),$$

ce qui était le but de (5.6), restreint à ce quadrant.

Des arguments similaires peuvent être rédigés (exercice) pour obtenir, dans les 3 autres quadrants :

$$\{x < 0,\, y > 0\}, \qquad \{x < 0,\, y < 0\}, \qquad \{x > 0,\, y > 0\},$$

la même estimée $|f(z)| \,\leqslant\, e^{2\pi \mathrm{M}|y|}$ est satisfaite. La démonstration du Théorème 5.3 est achevée. □

Terminons ce chapitre par une autre illustration des idées analytico-géométriques qui se trouvent derrière les arguments de type Paley-Wiener. Il s'agit de caractériser les fonctions dont la transformée de Fourier est identiquement nulle pour $\xi \leqslant 0$. Soit $\mathbb{H} := \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ le demi-plan supérieur, d'adhérence $\overline{\mathbb{H}} = \{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$.

Théorème 5.9. *Soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue à décroissance modérée,* i.e. $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$, *et soit $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx$ sa transformée de Fourier. On suppose que $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2}$ est aussi à décroissance modérée. Alors on a équivalence entre :*

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, 0 \quad \forall\, \xi \,\in\,]-\infty, 0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f \text{ se prolonge comme } f \,\in\, \mathscr{O}(\mathbb{H}) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{H}}) \\ \text{et est borné sur } \overline{\mathbb{H}}. \end{cases}$$

Démonstration. Traitons l'implication $\Longrightarrow$. La formule d'inversion de Fourier devient :

$$f(x) \,=\, \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Nous pouvons prolonger $f(x)$ à des $z = x + i\, y$ avec $y \geqslant 0$ *via* la formule :

$$f(z) \,:=\, \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi,$$

car cette intégrale converge grâce à $|e^{2i\pi(x+iy)\xi}| = e^{-2\pi y\xi} \leqslant 1$, et grâce à l'hypothèse que $\widehat{f}$ est à décroissance modérée. Les théorèmes standard du cours d'*Intégration* garantissent que $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{H}})$.

Pour justifier l'holomorphie, avec $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, introduisons la suite :

$$f_n(z) \,:=\, \int_0^n \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

Ces fonctions sont holomorphes pour $z \in \mathbb{H}$ grâce au théorème des intégrales à paramètre holomorphe sur un intervalle compact, et elles convergent uniformément vers f sur $\overline{\mathbb{H}}$, puisque :

$$\begin{aligned} \big|f(z) - f_n(z)\big| &\leqslant \int_n^\infty \big|\widehat{f}(\xi)\big|\, e^{-2\pi y\xi}\, d\xi \\ &\leqslant \int_n^\infty \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2}\, d\xi \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0. \end{aligned}$$

Un théorème connu dû à Cauchy offre alors l'holomorphie de la limite $f \in \mathscr{O}(\mathbb{H})$.

L'implication inverse $\Longleftarrow$ est plus délicate. Contentons-nous d'en résumer les idées principales. Pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, introduisons :

$$f_{\varepsilon,\delta}(z) \,:=\, \frac{f(z+i\delta)}{(1-i\varepsilon z)^2}.$$

Ces fonctions $f_{\varepsilon,\delta}$ sont toutes holomorphes dans un certain domaine $\Omega \supset \overline{\mathbb{H}}$ contenant le demi-plan supérieur fermé.

Comme dans la démonstration du Théorème 5.3 de Paley-Wiener, en utilisant le théorème de Cauchy, le lecteur pourra se convaincre que $\widehat{f_{\varepsilon,\delta}}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \leqslant 0$.

Alors, en passant à $\lim\limits_{\delta\to 0}(\bullet)$, le lecteur déduira $\widehat{f_{\varepsilon,0}}(\xi) = 0$ pour $\xi \leqslant 0$, puis en passant à $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\bullet)$, il conclura que :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, \widehat{f_{0,0}}(\xi) \,=\, 0 \qquad {\scriptstyle (\forall\, \xi \in]-\infty,0])}. \qquad \square$$

6. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. La fonction $\Gamma(z)$

Existe-t-il une manière naturelle d'*interpoler* la fonction factorielle $\mathbb{N} \ni n \longmapsto n!$ entre deux entiers n et $n+1$ quelconques ? La réponse est oui !

Pour $x > 0$ réel, la *fonction Gamma* est définie par :

$$\Gamma(x) \,:=\, \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

Cette intégrale converge près de $t = 0$, puisque la fonction t^{x-1} y est intégrable d'après le critère de Riemann, et elle converge aussi pour $t \longrightarrow \infty$, simplement parce que la décroissance de e^{-t} neutralise toute croissance polynomiale. En intégrant par parties, le lecteur pourra vérifier que l'on a $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, mais il peut s'en dispenser, puisque nous allons aussi faire ce calcul dans un instant. Sans attendre, décollons vers l'imaginaire !

Quelques observations simples permettent en effet d'étendre le domaine de définition.

Théorème 2.1. *La fonction $\mathbb{R}_+^* \ni x \longmapsto \Gamma(x)$ se prolonge comme fonction holomorphe dans le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$, par la formule :*

$$\Gamma(z) \,:=\, \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Évidemment, on note :

$$z \,=\, x + i\, y.$$

Démonstration. Commençons par observer que :

$$\left|e^{-t}\, t^{z-1}\right| \,=\, e^{-t}\left|e^{(z-1)\log t}\right| \,=\, e^{t}\, e^{(x-1)\log t} \,=\, e^{-t}\, t^{x-1},$$

de telle sorte que cette intégrale complexe converge effectivement lorsque $\operatorname{Re} z = x > 0$, puisqu'elle est majorée par :

$$\begin{aligned}\left|\Gamma(z)\right| \,=\, \left|\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\right| \,&\leqslant\, \int_0^\infty \left|e^{-t}\, t^{z-1}\right| dt \\ &=\, \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \,=\, \Gamma(x) \,<\, \infty.\end{aligned}$$

Mais pourquoi l'application $z \longmapsto \Gamma(z)$ serait-elle de surcroît holomorphe ?

Il suffit de faire voir, pour tous nombres positifs $0 < \delta < \mathrm{M} < \infty$, que cette intégrale définit une fonction qui est holomorphe dans la bande verticale :

$$B_{\delta,\mathrm{M}} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \delta < \mathsf{Re}\, z < \mathrm{M}\big\}.$$

Puisqu'elle peut être envisagée comme $\lim_{\varepsilon \overset{>}{\to} 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}$, introduisons :

$$\Phi_\varepsilon(z) := \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t}\, e^{(z-1)\log t}\, dt.$$

D'après un théorème connu, puisque l'intégrande est visiblement holomorphe par rapport à z, cette fonction $z \longmapsto \Phi_\varepsilon(z)$ est holomorphe dans la bande $B_{\delta,\mathrm{M}}$. En prenant $\varepsilon := \frac{1}{n}$, il suffit alors de montrer que la suite $\big(\Phi_{\frac{1}{n}}(z)\big)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes dans $B_{\delta,\mathrm{M}}$ converge uniformément vers $\Gamma(z)$, car un théorème connu de Cauchy garantira alors que la limite y est holomorphe.

À cette fin, estimons :

$$\big|\Gamma(z) - \Phi_\varepsilon(z)\big| \leqslant \int_0^{\varepsilon} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad (z \in B_{\delta,\mathrm{M}}).$$

La première intégrale converge uniformément vers 0 lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, puisqu'on peut la majorer par :

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \leqslant 1 \cdot \int_0^{\varepsilon} t^{x-1}\, dt = \Big[\tfrac{1}{x}\, t^x\Big]_0^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^x}{x} \leqslant \frac{\varepsilon^\delta}{\delta}.$$

Quant à la seconde :

$$\bigg|\int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\bigg| \leqslant \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t}\, t^{\mathrm{M}-1}\, dt \leqslant \mathsf{constante} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t/2}\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Malgré le fait que l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ n'est *pas* absolument convergente pour les valeurs de z telles que $\mathsf{Re}\, z \leqslant 0$, nous allons pouvoir prolonger méromorphiquement Γ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier, avec peu de pôles, seulement aux point entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$. L'unicité de ce prolongement méromorphe sera alors garantie par le principe d'unicité pour les fonctions holomorphes, en-dehors de cet ensemble discret de pôles. Nous continuerons à noter $\Gamma \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ ce prolongement méromorphe.

L'existence de pôles aux points entiers négatifs provient en fait d'une identité fonctionnelle importante.

Lemme 2.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $x = \mathsf{Re}\, z > 0$, on a :*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$

et :

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Une simple intégration par parties dans le domaine de convergence $\{\mathsf{Re}\, z > 0\}$ explique l'identité :

$$\begin{aligned} z\,\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t}\, z\, t^{z-1}\, dt \\ &= \underline{\Big[e^{-t}\, t^z\Big]_0^{\infty}}_{\circ} - \int_0^{\infty} -e^{-t}\, t^z\, dt \\ &= 0 + \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

et comme :

$$\Gamma(1) \,=\, \int_0^\infty e^{-t}\,dt \,=\, \Big[-\,e^{-t}\Big]_0^\infty \,=\, 1,$$

une récurrence instantanée donne $\Gamma(n+1) = n!$ — point d'exclamation de plaisir ! $\square$

C'est la division nécessaire par le facteur z dans la formule quasi-équivalente $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\,\Gamma(z+1)$ qui va introduire des pôles — heureusement simples !

Théorème 2.3. *La fonction $\Gamma(z)$, initialement définie dans $\{\mathsf{Re}\,z > 0\}$, bénéficie d'un prolongement méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier dont les seules singularités sont des pôles* simples *aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, où elle a pour résidus :*

$$\mathsf{res}_{z=-n}\,\Gamma \,=\, \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Il suffit de prolonger Γ à tout demi-plan de la forme $\{\mathsf{Re}\,z > -m\}$ avec un entier $m \geqslant 1$ quelconque.

Pour $\mathsf{Re}\,z > -1$, définissons :

$$\Phi_1(z) \,:=\, \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Puisque $\Gamma(z+1)$ est holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\,z > -1\}$, il est clair que Φ_1 est méromorphe dans ce demi-plan, et qu'elle y a une unique singularité, un pôle d'ordre 1 en $z = 0$. Comme $\Gamma(1) = 1$, son résidu y vaut $1 = \frac{(-1)^0}{0\,!}$. De plus, dans le sous-demi-plan $\{\mathsf{Re}\,z > 0\} \subset \{\mathsf{Re}\,z > -1\}$, l'identité fondamentale montre que cette fonction :

$$\Phi_1(z) \,=\, \frac{\Gamma(z+1)}{z} \,=\, \Gamma(z)$$

coïncide bien avec la fonction à prolonger.

Pour un entier $m \geqslant 1$ quelconque, définissons dans le demi-plan $\{\mathsf{Re}\,z > -m\}$ la fonction :

$$\Phi_m(z) \,:=\, \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)\cdots(z+n+1)(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z}.$$

Visiblement, cette fonction est méromorphe avec des pôles simples en $z = -m+1, \ldots, -1, 0$, et en un point entier négatif $z = -n$ avec $0 \leqslant n \leqslant m-1$ quelconque, elle y a pour résidu :

$$\begin{aligned}
\mathsf{res}_{z=-n}\,\Phi_m(z) \,&=\, \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)\cdots(1)\,\emptyset\,(-1)\cdots(-n+1)(-n)} \\
&=\, \frac{(m-n+1)\,!}{(m-n+1)\,!\,(-1)^n\,n!} \\
&=\, \frac{(-1)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

De plus, dans le sous-demi-plan $\{\mathsf{Re}\,z > 0\} \subset \{\mathsf{Re}\,z > -m\}$, une itération de l'identité fondamentale du Lemme 2.2 :

$$\Gamma(z+m) \,=\, (z+m-1)\cdots(z+1)z\,\Gamma(z)$$

montre aussitôt que $\Phi_m(z) = \Gamma(z)$ coïncide bien avec la fonction à prolonger.

D'ailleurs, le principe d'identité garantit aussi que $\Phi_m = \Phi_n$ pour tous entiers $1 \leqslant n \leqslant m$, dans $\{\mathsf{Re}\,z > -n\}\big\backslash\mathbb{Z}_-$. $\square$

L'identité fondamentale $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ continue d'être satisfaite (exercice mental) dans l'ouvert connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ — c'est-à-dire en-dehors des pôles — parce que (solution) les deux côtés de cette formule coïncident dans $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.

On peut même se convaincre (exercice) qu'en un entier négatif quelconque $z = -n$ avec $n \geqslant 1$, les deux membres de l'identité $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ sont infinis, et que :

$$\mathrm{res}_{z=-n}\,\Gamma(z+1) \;=\; (-n)\,\mathrm{res}_{z=-n}\,\Gamma(z).$$

Enfin, en $z = 0$, notons que :

$$\Gamma(1) \;=\; \lim_{z\to 0} z\,\Gamma(z).$$

Voici une démonstration alternative du Théorème 2.3, encore plus éclairante, dont les idées se recontreront aussi plus tard. Elle consiste à décomposer l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ pour $\mathrm{Re}\, z > 0$ en deux morceaux :

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt.$$

Grâce à la décroissance forte de e^{-t}, la deuxième intégrale définit une fonction holomorphe entière, définie sur $\mathbb{C}$. Quant au premier morceau, développons-y en série entière l'exponentielle, justifions la convergence normale (exercice), et intégrons terme à terme :

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \;=\; \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!}\, t^{z-1}\, dt \;=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)}.$$

Ceci nous permet d'écrire formellement :

$$\Gamma(z) \;=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0).$$

Assertion 2.4. *Cette série infinie* $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)}$ *définit une fonction méromorphe dans* $\mathbb{C}$ *ayant pour seules singularités des pôles simples aux entiers négatifs* $z = -n$ *où elle a pour résidus* $\frac{(-1)^n}{n\,!}$.

Démonstration. Pour un grand rayon $\mathrm{R} \gg 1$, et pour un entier $\mathrm{N} > 2\,\mathrm{R}$, décomposons-la en :

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)} \;=\; \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)}.$$

La première somme, qui est finie, définit une fonction méromorphe dans le disque $\{|z| < \mathrm{R}\}$ avec les pôles et les résidus annoncés, tout à fait en accord avec ce que la première démonstration a déjà fait voir.

Pour ce qui est de la deuxième somme portant sur des entiers $n > \mathrm{N} > 2\,\mathrm{R}$, toujours pour $|z| < \mathrm{R}$, comme $|n+z| \geqslant \mathrm{R}$ implique :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)}\right| \leqslant \frac{1}{n\,!\,\mathrm{R}},$$

nous voyons instantanément qu'elle converge normalement sur le disque $\{|z| < \mathrm{R}\}$, donc y définit une fonction holomorphe grâce à un théorème de Cauchy.

Comme $\mathrm{R} \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, tout ceci montre que la représentation de $\Gamma(z)$ sous la forme d'une série méromorphe infinie suivie d'une intégrale est valable dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ tout entier. $\square$

En définitive, nous avons pour *tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$:

$$\Gamma(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt. \tag{2.5}$$

Présentons maintenant d'autres propriétés de la fonction Γ. Voici une identité qui dévoile une symétrie fondamentale de Γ par rapport à la droite $\{\mathsf{Re}\, z = \frac{1}{2}\}$.

Théorème 2.6. [Formule des compléments] *En tout* $z \in \mathbb{C}$ *:*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) \,=\, \frac{\pi}{\sin \pi\, z}.$$

Observons que $\Gamma(1-z)$ a des pôles simples aux entiers naturels $z = 1, 2, 3, \ldots$, de telle sorte que le produit $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)$, une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, possède des pôles simples en *tous* les entiers relatifs $\in \mathbb{Z}$, tout aussi bien que la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi\, z}$.

Démonstration. Il suffit d'établir cette identité en des points *réels* $0 < x < 1$, car alors le principe d'identité garantira aussitôt qu'elle est vraie dans tout l'ouvert connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Lemme 2.7. *Pour un paramètre réel* $0 < a < 1$ *quelconque, on a :*

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, dv \,=\, \frac{\pi}{\sin \pi\, a}.$$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $v = e^x$ et de se souvenir de l'intégration, déjà vue dans un chapitre qui précède, de la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ le long de rectangles de sommets $-\mathrm{R}$, R, $\mathrm{R} + 2i\pi$, $-\mathrm{R} + 2i\pi$ avec $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, pour calculer l'intégrale qui apparaît :

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, dv \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx \,=\, \frac{\pi}{\sin \pi\, a}. \qquad \square$$

Pour établir le théorème, avec un paramètre $t > 0$ quelconque, en effectuant le changement de variable $v\,t = u$, préparons :

$$\Gamma(1-x) \,=\, \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{-x}\, du \,=\, t \int_0^{\infty} e^{-vt}\, \big(v\,t\big)^{-x}\, dv,$$

et grâce à cette astuce, calculons, puis concluons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,\Gamma(1-x)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\left(t\int_0^\infty e^{-vt}\,\big(v\,t\big)^{-x}\,dv\right)dt \\
&= \int_0^\infty v^{-x}\left(\int_0^\infty e^{-t\,(1+v)}\,dt\right)dv \\
&= \int_0^\infty v^{-x}\left[\frac{e^{-t\,(1+v)}}{-1-v}\right]_0^\infty dv \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{-x}}{1+v}\,dv \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi\,(1-x)} \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi\,x}. \qquad \square
\end{aligned}$$

En particulier, au point $z=\frac{1}{2}$, en observant que $\Gamma(x)>0$ quand $x\in\mathbb{R}_+^*$, nous trouvons la valeur spéciale :

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Poursuivons notre étude de la fonction Gamma en regardant son inverse, fonction qui devient entière et à croissance contrôlée.

Théorème 2.8. *La fonction $z\longmapsto\Gamma(z)$ d'Euler jouit des propriétés suivantes.*
(1) $\frac{1}{\Gamma(z)}\in\mathscr{O}(\mathbb{C})$ *est holomorphe entière, avec des zéros simples aux entiers négatifs $z=0,-1,-2,\ldots$, et aucun zéro ailleurs.*
(2) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *a pour croissance :*

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \;\leqslant\; c_1\,e^{c_2\,|z|\,\log|z|} \qquad (\forall\,z\in\mathbb{C}),$$

où $0<c_1,c_2<\infty$ sont des constantes universelles.

Une telle inégalité doit en fait s'interpréter quand $|z|\longrightarrow\infty$. On dit alors que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est *d'ordre (exponentiel)* $\leqslant 1$, au sens où, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $0<c_{1,\varepsilon}<\infty$ telle que :

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \;\leqslant\; c_{1,\varepsilon}\,e^{c_2\,|z|^{1+\varepsilon}}.$$

L'Exercice 1 montre que l'on ne peut pas ici se dispenser d'un $\varepsilon>0$ dans la puissance $|z|^{1+\varepsilon}$.

Rappelons que les seuls zéros de $\sin\pi z=\frac{1}{2i}\big(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}\big)$ sont les $z\in\mathbb{C}$ tels que $e^{2i\pi z}=1$, d'où $z=k\in\mathbb{Z}$, comme on doit s'en souvenir.

Démonstration. Grâce au Théorème 2.6 qui précède, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \;=\; \frac{\sin\pi z}{\pi}\,\Gamma(1-z),$$

et à droite, les pôles simples de $\Gamma(1-z)$ situés aux entiers $z=1,2,3,\ldots$ sont annihilés par les zéros simples de $\sin\pi z$, donc $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe entière avec des zéros simples

aux zéros restants de $\sin \pi z$, c'est-à-dire en $z = 0, -1, -2, \ldots$. De plus, $\frac{1}{\Gamma(z)} \neq 0$ ailleurs, car les seuls zéros de $\sin \pi z$ sont les $z = k \in \mathbb{Z}$.

Pour établir l'estimée de croissance, avec un réel $x \geqslant 0$ quelconque, et avec l'entier positif unique $x \leqslant n < x + 1$, commençons par :

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty e^{-t}\, t^x\, dt &\leqslant \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\, dt \\
&= n\,! \\
&\leqslant n^n \\
&= e^{n \log n} \\
&\leqslant e^{(x+1) \log (x+1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité (2.5) écrite pour $\Gamma(1 - z)$, nous avons :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_1^\infty e^{-t}\, t^{-z}\, dt,$$

Ensuite, comme $\left|e^w\right| \leqslant e^{|w|}$, et comme pour $t \geqslant 0$:

$$\left|t^{-z}\right| = \left|e^{-z \log t}\right| = e^{-\mathrm{Re}\, z\, \log t} \leqslant e^{|\mathrm{Re}\, z| \log t} \leqslant e^{|z| \log t} = t^{|z|},$$

nous pouvons estimer la croissance du deuxième terme :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i\,\pi}\right| \left|\int_1^\infty e^{-t}\, t^{-z}\, dt\right| &\leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} \int_1^\infty e^{-t}\, t^{|z|}\, dt \\
&\leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{\pi}\, e^{(|z|+1) \log (|z|+1)} \\
&\leqslant c_1\, e^{c_2\, |z| \log |z|}.
\end{aligned}$$

Quant au premier terme :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)},$$

dans un premier cas où $|\mathrm{Im}\, z| \geqslant 1$, puisqu'on a alors pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\left|n + 1 - z\right| \geqslant 1,$$

il se majore aisément :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sin \pi\, z}{\pi}\right| \left|\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)}\right| &\leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n\,! \cdot 1} \\
&= \frac{e^{\pi|z|+1}}{\pi}.
\end{aligned}$$

Dans l'autre cas où $|\mathrm{Im}\, z| < 1$, introduisons l'unique entier $k = k_z$ avec $k - \frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z < k + \frac{1}{2}$, et distinguons deux sous-cas.

Lorsque $k \geqslant 1$, mettons en exergue, dans la somme infinie, le terme $n = k - 1$:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!\,(k-z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)},$$

et démontrons que les deux expressions à droite sont bornées.

Pour la première expression, avec la constante :

$$\max_{|w|\leqslant 3/2} \left| \frac{\sin \pi w}{\pi\, w} \right| =: c < \infty,$$

finie parce que $w \longmapsto \frac{\sin \pi w}{\pi\, w}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car en 0 on a $\sin \pi w = \pi w + \mathrm{O}(w^2)$, estimons la par cette constante :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!\,(k-z)} \right| &= \left| \frac{\sin \pi\,(k-z)}{\pi\,(k-z)} \right| \frac{1}{(k-1)!} \\ [w := k-z] \qquad\qquad &\leqslant \max_{|w|\leqslant 3/2} \left| \frac{\sin \pi w}{\pi\, w} \right| = c, \end{aligned}$$

sachant que l'on a ici :

$$|w| = \big|k - z\big| \leqslant \big|k - \mathsf{Re}\, z\big| + |\mathsf{Im}\, z| \leqslant \tfrac{1}{2} + 1.$$

Ensuite, grâce à :

$$\begin{aligned} n \leqslant k-2 \quad \Longrightarrow \quad |n+1-z| \geqslant |n+1-\mathsf{Re}\, z| &= \mathsf{Re}\, z - n - 1 \\ &\geqslant k - \tfrac{1}{2} - n - 1 \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}, \\ n \geqslant k \quad \Longrightarrow \quad |n+1-z| \geqslant |n+1-\mathsf{Re}\, z| &= n+1-\mathsf{Re}\, z \\ &\geqslant n+1-k-\tfrac{1}{2} \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

constatons que le second terme est lui aussi borné :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n\neq k-1} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)} \right| &\leqslant \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}{2i\pi} \right| \sum_{n\neq k-1} \frac{1}{n\,!\cdot \frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{e^{\pi|y|}}{\pi}\, 2\, e^1 \\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\, e^{\pi+1}. \end{aligned}$$

Enfin, lorsque $k \leqslant 0$, d'où $\mathsf{Re}\, z < \frac{1}{2}$ d'après notre supposition, il devient inutile de mettre un terme en exergue, car alors on a toujours :

$$\big|n+1-z\big| \geqslant n+1-\mathsf{Re}\, z \geqslant n+1-\tfrac{1}{2} \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

d'où similairement :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)} \right| &\leqslant \frac{e^{\pi|y|}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!\,\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\, e^{\pi+1}. \end{aligned}$$

□

Le fait que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ satisfasse une condition d'ordre exponentiel du type qui a été discuté dans le chapitre sur les fonctions entières conduit naturellement à une factorisation de Hadamard.

Rappelons auparavant que la *constante d'Euler :*

$$\gamma := \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \log \mathrm{N},$$

est bien définie, car :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \log \mathrm{N} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx + \frac{1}{\mathrm{N}} - \int_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{\mathrm{N}},\end{aligned}$$

avec, lorsque $n \leqslant x < n+1$:

$$0 \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x\,n} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \log \mathrm{N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} a_n + \frac{1}{\mathrm{N}},$$

avec $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, ce qui fait voir la convergence, grâce à $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Théorème 2.9. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Démonstration. Grâce au théorème de factorisation de Hadamard, et au fait que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est entière d'ordre $\leqslant 1$, avec des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \ldots$, nous pouvons représenter cette fonction sous la forme d'un produit de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\mathrm{A}z+\mathrm{B}}\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

dans lequel il reste à déterminer les deux constantes $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{C}$.

Mais si nous nous souvenons que $z\,\Gamma(z) \longrightarrow 1$ quand $z \longrightarrow 0$, nous trouvons $\mathrm{B} = 0$, ou n'importe quel multiple entier de $2i\pi$, ce qui ne change rien.

Ensuite, assignons $z := 1$ et utilisons $\Gamma(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
e^{-\mathrm{A}} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} e^{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} [\log(1+1/n) - 1/n]} \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} e^{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} [\log(n+1) - \log n] - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/n} \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} e^{\log(\mathrm{N}+1) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/n} \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} e^{\log(1+1/\mathrm{N}) + \log \mathrm{N} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/\mathrm{N}} \\
&= e^{-\gamma}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{A} = \gamma + 2ik\pi$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$, mais comme $\Gamma(x)$ est réelle pour $x > 0$ réel, il faut $k = 0$, ce qui conclut. □

Ces arguments montrent que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est essentiellement caractérisée, à des constantes normalisatrices près, comme la fonction holomorphe entière :

- qui a des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \ldots$ et ne s'annule nulle part ailleurs ;
- est d'ordre de croissance $\leqslant 1$.

Observons que $\sin \pi z$ a des propriétés analogues, excepté le fait qu'elle s'annule en *tous* les entiers $z = k \in \mathbb{Z}$. Cependant, tandis que $\sin \pi z$ jouit d'une propriété de croissance de la forme $\sin \pi z = \mathrm{O}\big(e^{c|z|}\big)$, l'Exercice 1 montre que tel n'est *pas* le cas pour $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

3. La fonction $\zeta(s)$

La *fonction zêta* de Riemann est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ complexe avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente et définit, comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre consacré aux produits infinis, une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.

Comme la fonction $\Gamma(z)$ d'Euler, cette fonction $\zeta(s)$ de Riemann peut être prolongée méromorphiquement au plan complexe tout entier, avec un unique pôle, simple, en $s = 1$. En fait, il existe de nombreuses démonstrations de ce prolongement, et nous en présentons une qui dévoile une équation fonctionnelle importante satisfaite par $\zeta(s)$.

Toutefois, le prolongement de $\zeta(s)$ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier est plus délicat que celui de la fonction $\Gamma(z)$. La voie argumentative que nous choisissons relie $\zeta(s)$ et $\Gamma(z)$ à une autre fonction importante en théorie analytique des nombres. Commençons par quelques préliminaires.

D'après le cours d'*Analyse de Fourier*, on sait que la fonction $x \longmapsto e^{-\pi x^2}$ — qui appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance (très) rapide à l'infini — coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \,=\, e^{-\pi\xi^2}.$$

Avec un paramètre réel $t > 0$, le changement de variable dans cette intégrale :

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{t}}$$

donne que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := e^{-\pi t x^2}$ est $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}}$.

Rappelons aussi la *formule sommatoire de Poisson*, valable pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n),$$

qui donne ici :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} \,=\, \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.$$

Si donc nous introduisons la fonction ϑ définie, pour $t > 0$ réel, par :

$$\vartheta(t) \,:=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

nous voyons qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\vartheta(t) \,=\, \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, \vartheta\big(\tfrac{1}{t}\big). \tag{3.1}$$

L'information dont nous aurons besoin concerne la décroissance exponentielle de cette fonction :

$$\vartheta(t) \,=\, 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

lorsque $t \longrightarrow \infty$, ainsi que son comportement singulier quand $t \overset{>}{\longrightarrow} 0$.

Lemme 3.2. *Il existe une constante universelle* $0 < C < \infty$ *telle que :*

$$(0 \leqslant) \quad \vartheta(t) - 1 \,\leqslant\, C\, e^{-t} \qquad (\forall\, t \geqslant 1),$$

et :

$$\vartheta(t) \,\leqslant\, C\, \tfrac{1}{\sqrt{t}} \qquad (\forall\, 0 < t \leqslant 1).$$

Démonstration. Comme $\big\{n^2 \colon n \geqslant 1\big\} \subset \{m \geqslant 1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) - 1 \,=\, 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \,&\leqslant\, 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m t} \\
&=\, 2\, e^{-\pi t} \Big[1 + e^{-\pi t} + e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t} + \cdots\Big] \\
&=\, 2\, e^{-\pi t}\, \frac{1}{1 - e^{-\pi t}},
\end{aligned}$$

et pour $t \geqslant 1$, puisque $e^{-\pi t} \leqslant e^{-\pi}$, nous obtenons bien :

$$\vartheta(t) - 1 \leqslant 2\,\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

Ensuite, grâce à l'équation fonctionnelle (3.1), pour $0 < t \leqslant 1$, d'où $1 \leqslant \frac{1}{t} < \infty$, en recyclant ce que nous venons de faire :

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\,\vartheta\Big(\frac{1}{t}\Big) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t}}\Big)\\
&\leqslant\; \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Big(1 + 2\,\frac{e^{-\pi\frac{1}{t}}}{1-e^{-\pi\frac{1}{t}}}\Big)\\
&\leqslant\; \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Big(1 + 2\,\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\Big).
\end{aligned}$$

Tout ceci montre qu'on peut prendre comme constante universelle $C := 1+2\,\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$. $\square$

Nous sommes maintenant en position d'établir une relation importante entre les trois fonctions ζ, Γ, ϑ.

Théorème 3.3. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec* $\mathsf{Re}\, s > 1$*, on a :*

$$\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\,\Big[\frac{\vartheta(u)-1}{2}\Big]\,du \;=\; \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s).$$

Démonstration. Comme $\frac{\vartheta(u)-1}{2}$ consiste en la sommation des termes $e^{-\pi n^2 u}$ pour $n = 1, \ldots, \infty$, calculons les intégrales suivantes dans lesquelles nous effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{\pi n^2}\,t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\,e^{-\pi n^2 u}\,du \;&=\; \int_0^{\infty} \frac{\underline{\pi n^2}_{\circ}}{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}}\,t^{\frac{s}{2}-1}\,e^{-t}\,\frac{dt}{\underline{\pi n^2}_{\circ}}\\
&=\; \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\frac{1}{n^s}\int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1}\,e^{-t}\,dt\\
\text{[Reconnaître }\Gamma\text{]}\qquad &=\; \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\frac{1}{n^s}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big).
\end{aligned}$$

Les estimées du Lemme 3.2 justifient alors l'interversion entre sommation infinie et intégration dans le calcul conclusif suivant :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\,\Big[\frac{\vartheta(u)-1}{2}\Big]\,du \;&=\; \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\,\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}\Big)\,du\\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\,e^{-\pi n^2 u}\,du\\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\frac{1}{n^s}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\\
&=\; \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\zeta(s)\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big).
\end{aligned}$$

$\square$

Au vu de cela, introduisons une certaine modification de la fonction ζ, appelée *fonction xi*, définie pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ comme étant le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\xi(s) \;:=\; \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\Gamma\Big(\tfrac{s}{2}\Big)\,\zeta(s),$$

et qui met en lumière une symétrie fondamentale.

Théorème 3.4. *Cette fonction $\xi(s)$ est holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.*

De plus, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\xi(s) \;=\; \xi(1-s).$$

Bien entendu, en $s = 0$ et 1, on a $\xi(0) = \infty = \xi(1)$.

Démonstration. Soit la fonction auxiliaire $\psi(u) \;:=\; \frac{\vartheta(u)-1}{2}$, déjà considérée plus haut. L'équation fonctionnelle $\vartheta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\,\vartheta\big(\frac{1}{u}\big)$ se transmet à ψ :

$$2\,\psi(u) + 1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{u}}\,\Big[2\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big) + 1\Big],$$

c'est-à-dire :

$$\psi(u) \;=\; \frac{1}{\sqrt{u}}\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}.$$

En partant du Théorème 3.3, découpons l'intégrale, insérons, changeons de variable, transformons, et calculons (patiemment) pour $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s) \;&=\; \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\
&=\; \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\
&=\; \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\,\Big[\frac{1}{\sqrt{u}}\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}\Big]\,du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\
&=\; \int_0^1 \frac{u^{\frac{s}{2}}}{u\sqrt{u}}\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big)\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - u^{\frac{s}{2}-1}\Big)\,du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\
[u = \tfrac{1}{v}] \qquad &=\; \int_1^\infty v^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,\psi(v)\,dv + \frac{1}{2}\,\Big[\frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}\Big]_0^1 + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\
&=\; \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \Big(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\Big)\,\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\xi(s) \;=\; \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \Big(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\Big)\,\psi(u)\,du.$$

Or puisque la fonction ψ décroît exponentiellement à l'infini, cette dernière intégrale à paramètre définit une fonction holomorphe entière, ce qui fait clairement voir que :

$$\xi \;\in\; \mathscr{M}(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}\big),$$

avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.

De plus, il est visible que $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ est invariant lorsqu'on remplace $s \longmapsto 1-s$, et on se convainc aisément que l'intégrale est aussi invariante à travers $s \longmapsto 1-s$. En définitive, on a bien $\xi(s) = \xi(1-s)$. $\square$

Grâce à cette identité qui montre la symétrie de $\xi(s)$ à travers la réflexion d'axe $\big\{\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\big\}$, nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction zêta de Riemann : son prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, ainsi que son équation fonctionnelle célèbre.

Théorème 3.5. *La fonction $\zeta(s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu égal à 1, et elle satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\zeta(s) \,=\, 2^s\, \pi^{s-1} \sin\big(\tfrac{1}{2}\,\pi\, s\big)\, \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

Démonstration. Le prolongement méromorphe de $\zeta(s)$ est fournit instantanément par la formule :

$$\zeta(s) \,=\, \pi^{\frac{s}{2}}\, \frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Mais comme $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ est holomorphe entière, d'après le Théorème 2.8, avec des zéros simples en $s = 0, -2, -4, \ldots$, le pôle simple de $\xi(s)$ en $s = 0$ est annihilé par le zéro correspondant de $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$. Par conséquent, il ne reste, comme singularité pour $\zeta(s)$, que le pôle simple de ξ en $s = 1$.

Ensuite, l'équation fonctionnelle pour $\xi(s)$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\, \zeta(s) \,=\, \xi(s) \,=\, \xi(1-s) \,=\, \pi^{\frac{-1+s}{2}}\, \Gamma\big(\tfrac{1-s}{2}\big)\, \zeta(1-s),$$

donne :

$$\zeta(s) \,=\, \pi^{s-\frac{1}{2}}\, \frac{\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)}\, \zeta(1-s),$$

et il nous faut encore remplacer ici $\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)$. Or avec $z := \frac{1-s}{2}$, la formule de l'Exercice 3 :

$$\Gamma(z) \,=\, \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{1-2z}\, \frac{\Gamma(2\,z)}{\Gamma\big(z+\frac{1}{2}\big)}$$

devient :

$$\Gamma\big(\tfrac{1-s}{2}\big) \,=\, \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^s\, \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}.$$

Nous pouvons donc remplacer, réorganiser et appliquer au final la formule des compléments :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) \,&=\, \pi^{s-\frac{1}{2}}\, \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\, 2^s\, \Gamma(1-s)}{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\, \Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}\, \zeta(1-s) \\
&=\, 2^s\, \pi^{s-1}\, \frac{\pi}{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\, \Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}\, \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s) \\
&=\, 2^s\, \pi^{s-1} \sin\big(\pi\, \tfrac{s}{2}\big)\, \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s). \qquad \square
\end{aligned}$$

[Théorème 2.6]

4. Exercices

Exercice 1. **(a)** Montrer qu'il n'existe pas de constantes $0 < c_1, c_2 < \infty$ telles que :

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leqslant c_1\, e^{c_2|z|} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Indication: Aux points $z = -k - \frac{1}{2}$ avec $k \geqslant 1$ entier, constater que :

$$\left|\frac{1}{\Gamma(-k-\frac{1}{2})}\right| \geqslant \frac{k\,!}{\pi}.$$

(b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe entière $F \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ de croissance $|F(z)| \leqslant c_1 e^{c_2|z|}$ ayant des zéros simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, \ldots$, et qui ne s'annule nulle part ailleurs.

Exercice 2. Montrer que la fonction Gamma (réelle) d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \qquad (x > 0),$$

est *logarithmiquement convexe*, c'est-à-dire satisfait :

$$\Gamma'(x)\,\Gamma'(x) \leqslant \Gamma(x)\,\Gamma''(x) \qquad (\forall\, x > 0).$$

Exercice 3. **(a)** Montrer que la formule classique de Wallis peut s'écrire sous la forme :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}\,\big(2n+1\big)^{1/2}.$$

(b) En déduire l'identité satisfaite par la fonction méromorphe Gamma :

$$\Gamma(z)\,\Gamma\big(z+\tfrac{1}{2}\big) = \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{1-2z}\,\Gamma\big(2\,z\big) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 4. EE

Exercice 5. EE

Théorème des nombres premiers

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

On note :

$$\mathscr{P} := \big\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \dots\big\}$$

l'ensemble des nombres entiers positifs premiers. Pour $x \geqslant 1$ réel, soit :

$$\pi(x) := \mathsf{Card}\big\{p \in \mathscr{P}\colon\ 1 \leqslant p \leqslant x\big\}.$$

L'objectif de ce chapitre est d'établir le

Théorème 1.1. [des nombres premiers] *Asymptotiquement lorsque $x \longrightarrow \infty$:*

$$\pi(x) \ \sim\ \frac{x}{\log x}.$$

La démonstration s'organise en une série de 7 lemmes '*capitaux*', accompagnés d'un théorème de type '*taubérien*' dû à D.J. Newman, montrant qu'une certaine intégrale dépendant d'un paramètre réel $0 \leqslant \mathrm{T} < \infty$ a une limite quand $\mathrm{T} \longrightarrow \infty$.

Convention 1.2. La lettre p désignera toujours un nombre premier.

2. Sept lemmes capitaux

Les 7 lemmes dévoilent progressivement des propriétés de 3 fonctions, la *fonction zêta de Riemann :*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

holomorphe en $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, puis la fonction dérivée :

$$\begin{aligned}\Phi(s) &:= -\ \frac{d}{ds}\Big(\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s}\Big)\\ &= \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s},\end{aligned}$$

elle aussi holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$, et enfin la fonction, positive et croissante par sauts, d'un réel $x \geqslant 1$:

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant x}} \log p.$$

En effet, on se convainc aisément (exercice de révision) que les séries définissant $\zeta(s)$ et $\Phi(s)$ sont normalement, donc uniformément, convergentes sur les demi-plans fermés $\{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1+\delta\}$, quel que soit $\delta > 0$, d'où leur holomorphie.

Lemme 2.1. [Euler] *Pour* $\mathsf{Re}\, s > 1$*, on a la formule de produit d'Euler :*

$$\zeta(s) \,=\, \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Démonstration. La factorisation unique des entiers $n \geqslant 1$, et la convergence justifient le calcul formel :

$$\begin{aligned}\zeta(s) \,=\, \sum_{r_2,r_3,r_5,\cdots\geqslant 0} \frac{1}{\big(2^{r_2}\,3^{r_3}\,5^{r_5}\,\cdots\big)^s} \,&=\, \prod_{p\in\mathscr{P}} \Big(\sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{p^{rs}}\Big)\\ &=\, \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},\end{aligned}$$

les détails étant laissés au lecteur — qui n'a pas l'interdiction de s'aider du fait que ces détails ont déjà été fournis dans un chapitre qui précède ! □

En $s=1$, il y a divergence de $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, mais après soustraction d'un pôle simple :

Lemme 2.2. *La fonction* $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ *se prolonge holomorphiquement à* $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Démonstration. En effet, avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, il apparaît dans la différence une série :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} dx \Big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\Big)}_{=:\, a_n(s)}$$

de fonctions holomorphes qui sont majorables grâce à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}\big|a_n(s)\big| \,=\, \Big|\int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{s\,du}{u^{s+1}}\Big| \,&\leqslant\, 1\cdot \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} \Big|\frac{s}{u^{s+1}}\Big|\\ &=\, \frac{|s|}{n^{1+\mathsf{Re}\, s}},\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ vers une fonction-limite holomorphe. □

Lemme 2.3. *Il existe une constante universelle* $C < \infty$ *telle que, pour tout* $x \geqslant 1$ *:*

$$(0 \leqslant) \qquad \vartheta(x) \,=\, \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant x}} \log p \,\leqslant\, C\,x.$$

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$ entier, il est clair que :

$$\begin{aligned}4^n \,=\, \big(1+1\big)^{2n} \,=\, \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{n} + \cdots + \binom{2n}{2n} \,\geqslant\, \binom{2n}{n} \,\geqslant\, \prod_{n<p\leqslant 2n} p\\ =\, e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)},\end{aligned}$$

puisque les nombres premiers $n < p \leqslant 2n$ au numérateur de $\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{1\cdots n}$ ne peuvent être effacés par le dénominateur.

Ainsi :

$$n \log 4 \;\geqslant\; \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

Or une sommation téléscopique :

$$\begin{aligned} \vartheta\big(2^{k+1}\big) - \vartheta(2^k) \;&\leqslant\; 2^k \log 4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta(4) - \vartheta(2) \;&\leqslant\; 2^1 \log 4, \\ \vartheta(2) - \underline{\vartheta(1)}_{\circ} \;&\leqslant\; 2^0 \log 4, \end{aligned}$$

donne :

$$\vartheta\big(2^{k+1}\big) \;\leqslant\; 2^{k+1} \log 4,$$

et comme pour tout $x \geqslant 1$ réel, il existe un unique entier $k_x \geqslant 1$ encadrant :

$$2^{k_x} \;\leqslant\; x \;<\; 2^{k_x+1},$$

il vient par croissance de ϑ :

$$\vartheta(x) \;\leqslant\; \vartheta\big(2^{k_x+1}\big) \;\leqslant\; 2^{k_x}\, 2 \log 4 \;\leqslant\; x\, 4 \log 2. \qquad \square$$

La formule d'Euler $\zeta(s) = \prod_p \big(1 - \frac{1}{p^s}\big)^{-1}$ garantit, grâce aux propriétés générales des produits infinis convergents de fonctions holomorphes, que $\zeta(s) \neq 0$, quel que soit $\mathrm{Re}\, s > 1$. L'énoncé suivant est un point-clé.

Lemme 2.4. *Hors du pôle* $\{s = 1\}$*, la fonction* ζ*, holomorphe dans* $\{\mathrm{Re}\, s > 0\} \backslash \{1\}$*, ne s'annule jamais sur* $\{\mathrm{Re}\, s = 1\}$ *:*

$$\zeta\big(1 + it\big) \;\neq\; 0 \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}^*).$$

Rappelons que :

$$\Phi(s) \;:=\; \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1).$$

Démonstration. Pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, une dérivée logarithmique du produit $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$ donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{p \in \mathscr{P}} \Big(\log\big(1 - e^{-s \log p}\big)\Big)' \;&=\; \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\ &=\; \Phi(s) + \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s (p^s - 1)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour tout $c > \frac{1}{2}$, cette dernière somme converge normalement-uniformément sur $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant c\}$, donc définit une fonction-reste holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}\}$.

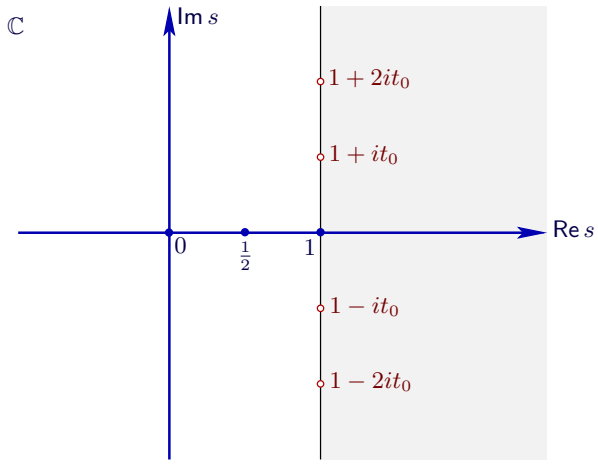
Dans l'éventualité où $\zeta(s)$ a un zéro en un point $s_0 = 1 + it_0$ avec $t_0 \neq 0$:

$$\zeta(s) \;=\; (s - s_0)^{\mu_0}\, \eta(s),$$

avec $\mu_0 \geqslant 1$ entier, et avec $\eta(s)$ holomorphe au voisinage de s_0 satisfaisant $\eta(s_0) \neq 0$, il vient :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; -\frac{\mu_0}{s - s_0} + \text{reste holomorphe} \qquad (s \sim s_0).$$

Par conséquent, $\Phi(s)$ se prolonge méromorphiquement à un voisinage ouvert de $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}$, avec des pôles d'ordre 1 en tous les zéros de ζ sur $\{\mathrm{Re}\, s = 1\}\backslash\{1\}$, et aussi un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, puisque $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$, d'où $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$.



Pour aboutir à une contradiction, un raisonnement particulièrement astucieux consiste à regarder aussi le point $1 + 2it_0$, en lequel ζ a un certain ordre d'annulation $\nu_0 \geqslant 0$.

Puisque la relation $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$, valable pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, est héritée par continuité via le Lemme 2.2 sur la droite épointée $\{\mathrm{Re}\, s = 1\}\backslash\{1\}$, la fonction ζ a les mêmes ordres d'annulation en $1 + it$ et en $1 - it$, quel que soit $t \neq 0$. Ainsi :

$$1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Big(- \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} \Big), \qquad \begin{aligned} -\mu_0 &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Big(- \frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm it_0)}{\zeta(1+\varepsilon \pm it_0)} \Big), \\ -\nu_0 &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Big(- \frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm 2it_0)}{\zeta(1+\varepsilon \pm 2it_0)} \Big), \end{aligned}$$

d'où par holomorphie du reste dans (2.5) :

$$1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon\, \Phi(1+\varepsilon), \qquad \begin{aligned} -\mu_0 &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon\, \Phi\big(1+\varepsilon \pm it_0\big), \\ -\nu_0 &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon\, \Phi\big(1+\varepsilon \pm 2it_0\big). \end{aligned}$$

Le point-clé de l'astuce est alors la reconstitution algébrique d'une puissance quatrième positive :

$$\begin{aligned} \sum_{-2 \leqslant l \leqslant 2} \binom{4}{2+l} \Phi\big(1+\varepsilon+ilt_0\big) &= \sum_{-2 \leqslant l \leqslant 2} \binom{4}{2+l} \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ilt_0}} \\ &= \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \sum_{-2 \leqslant l \leqslant 2} \binom{4}{2+l} \Big(\frac{1}{p^{it_0/2}}\Big)^{l+2} \Big(\frac{1}{p^{-it_0/2}}\Big)^{-l+2} \\ &= \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \Big(p^{it_0/2} + p^{-it_0/2}\Big)^4 \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

car en appliquant alors $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} (\cdot)$ à cette inégalité :

$$-\nu_0 - 4\,\mu_0 + 6 - 4\,\mu_0 - \nu_0 \ \geqslant\ 0,$$

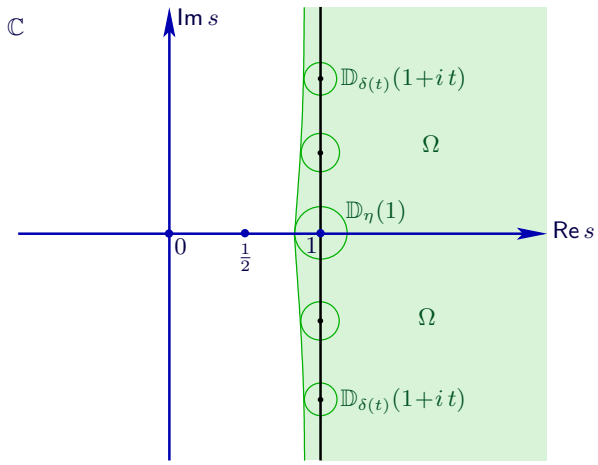
on déduit que $\mu_0 = 0$ nécessairement (exercice visuel). En définitive, $\zeta(1+it) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. $\square$

Maintenant, récrivons (2.5) sous la forme :

$$\Phi(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \mathscr{R}(s),$$

avec une fonction-reste $\mathscr{R}(s)$ qui est holomorphe dans $\big\{\mathsf{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$. Nous venons de démontrer que $\zeta(s) \neq 0$ dans $\big\{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1\big\}\big\backslash\{1\}$, et donc $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ puis $\Phi(s)$ sont holomorphes au voisinage de tout point appartenant à $\big\{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1\big\}\big\backslash\{1\}$.

Mais comme $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ pour $s \sim 1$, d'où $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$ pour $s \sim 1$, en soustrayant cette partie singulière, on élimine la singularité en $s = 1$ et on obtient une fonction qui est aussi holomorphe au voisinage de $s = 1$.



Lemme 2.6. *La fonction :*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1} \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} - \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

est holomorphe dans un certain voisinage ouvert :

$$\Omega \;\supset\; \{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1\}.$$

Démonstration. Comme on a éliminé la partie singulière de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, il existe un rayon $\eta > 0$ tel que cette fonction est holomorphe dans $\mathbb{D}_\eta(1)$. Comme $\zeta(s)$ n'a aucun zéro dans $\big\{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1\big\}\big\backslash\{1\}$, et comme la fonction-reste $\mathscr{R}(s)$ est holomorphe dans $\big\{\mathsf{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$, pour tout nombre $1 + i\,t$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, il existe un rayon $\delta(t) > 0$ tel que $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\delta(t)}\big(1+i\,t\big)$. Alors la fonction incriminée est bel et bien holomorphe dans l'ouvert :

$$\begin{aligned}\Omega \;&:=\; \big\{\mathsf{Re}\, s > 1\big\} \cup \mathbb{D}_\eta(1) \bigcup_{t \in \mathbb{R}^*} \mathbb{D}_{\delta(t)}\big(1+i\,t\big)\\ &\supset\; \big\{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1\big\}.\end{aligned}$$

$\square$

Avant de poursuivre, faisons remarquer qu'il est tout à fait possible qu'il existe une suite $\big(\rho_n\big)_{n=1}^{\infty}$ de zéros de $\zeta(s)$ avec :

$$\mathsf{Im}\,\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \qquad\qquad \text{tandis que} \qquad\qquad \mathsf{Re}\,\rho_n \underset{n\to\infty}{\overset{<}{\longrightarrow}} 1,$$

ce qui force alors $\partial\Omega$ à devenir de plus en plus « plaqué » contre $\big\{\mathsf{Re}\,s = 1\big\}$ quand $|t| \longrightarrow \infty$, car $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ n'est *pas* holomorphe au voisinage de tout $\rho \in \mathbb{C}$ en lequel $\zeta(\rho) = 0$.

En vérité, la région la plus grande contenue dans $\big\{\mathsf{Re}\,s > \frac{1}{2}\big\}$ où on sait actuellement démontrer que $\zeta(s)$ n'a aucun zéro est de la forme :

$$\sigma \,>\, 1 - \frac{C}{\big(\log|t|\big)^{\frac{2}{3}}\,\big(\log\log|t|\big)^{\frac{1}{3}}},$$

pour $|t| \geqslant t_*$, où $C > 0$ est une constante, et une région de cette forme « épouse » asymptotiquement $\big\{\mathsf{Re}\,s \geqslant 1\big\}$ lorsque $|t| \longrightarrow \infty$.

En résumé, dès que $\zeta(s_0) = 0$ possède un zéro de partie réelle $0 < \mathsf{Re}\,s_0 < 1$ éventuellement très proche de 1, la fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ possède un *pôle* en $s = s_0$, donc les raisonnements précédents ne produisent aucun contrôle explicite sur le voisinage ouvert $\Omega \supset \{\mathsf{Re}\,s \geqslant 1\}$ dans lequel le Lemme 2.6 affirme que $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-137}, \ldots$, personne sur Terre n'est jamais parvenu jusqu'à présent à démontrer que $\zeta(s)$ n'a *aucun* zéro dans un demi-plan ε-décalé $\big\{\mathsf{Re}\,s > 1 - \varepsilon\big\}$, bien que ceci semble *a priori* moins difficile qu'établir l'*Hypothèse de Riemann*, d'après laquelle tous les zéros de $\zeta(s)$ dans la *bande critique* $\big\{0 < \mathsf{Re}\,s < 1\big\}$ devraient être situés sur la droite médiane $\big\{\mathsf{Re}\,s = \frac{1}{2}\big\}$.

Mais reprenons le cours de nos raisonnements en direction du théorème des nombres premiers.

Lemme 2.7. *L'intégrale :*

$$\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\,dx \,=\, \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_1^{\mathrm{T}} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\,dx$$

converge.

Démonstration. Pour $\mathsf{Re}\,s > 1$, une intégration par parties dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes donne :

$$\begin{aligned}
\Phi(s) \,&=\, \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s} \,=\, \int_1^{\infty} \frac{d\vartheta(x)}{x^s} \\
\text{[Lemme 2.3]} \qquad &=\, \underline{\left[\frac{\vartheta(x)}{x^s}\right]_1^{\infty}}^{\circ} + s\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,dx \\
[x = e^t] \qquad &=\, 0 + s\int_0^{\infty} e^{-st}\,\vartheta\big(e^t\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Introduisons la fonction :

$$f(t) \,:=\, \frac{\vartheta(e^t)}{e^t} - 1 \qquad\qquad (t\in\mathbb{R}_+),$$

discontinue sur un ensemble de mesure nulle puisque $\vartheta(e^t)$ est constante par morceaux, donc localement (Riemann-)intégrable, et bornée en vertu du Lemme 2.3 :

$$f \,\in\, L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}_+).$$

Introduisons aussi, pour $\mathsf{Re}\, z > 0$:

$$g(z) \,:=\, \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Le Lemme 2.6 garantit que g se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ de $\{\mathsf{Re}\, z \geqslant 0\}$. De plus, un calcul simple fait voir, pour $\mathsf{Re}\, z > 0$, que :

$$\begin{aligned} g(z) \,=\, \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \,&=\, \int_0^\infty e^{-(z+1)\,t}\, \vartheta\big(e^t\big)\, dt - \int_0^\infty e^{-zt}\, dt \\ &=\, \int_0^\infty \Big(\vartheta\big(e^t\big)\, e^{-t} - 1\Big)\, e^{-zt}\, dt \\ &=\, \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème suivant, dont la démonstration est repoussée à une section ultérieure, sont vérifiées.

Théorème 2.8. *Sur* $[0, \infty[$, *soit* $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. *Si la fonction :*

$$g(z) \,:=\, \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, z > 0\}$, *se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans* $\mathbb{C}$ *du demi-plan fermé* $\{\mathsf{Re}\, z \geqslant 0\}$, *alors* $\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt$ *existe et vaut :*

$$g(0) \,=\, \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

On conclut alors bien que l'intégrale :

$$\begin{aligned} g(0) \,=\, \int_0^\infty f(t)\, dt \,&=\, \int_0^\infty \Big(\vartheta\big(e^t\big)\, e^{-t} - 1\Big)\, dt \\ &=\, \int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

existe. □

Le septième et dernier lemme capital précise ce que cachait la constante C du Lemme 2.3.

Lemme 2.9. *Asymptotiquement quand* $x \longrightarrow \infty$, *on a :*

$$\vartheta(x) \,\sim\, x.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que pour un $\lambda > 1$, il existe une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ avec $x_n \longrightarrow \infty$ telle que :

$$\vartheta(x_n) \,\geqslant\, \lambda\, x_n \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Comme ϑ croît, pour tout $t \geqslant x_n$, on a $\vartheta(t) \geqslant \vartheta(x_n) \geqslant \lambda\, x_n$, ce qui conduit à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$0 \,\underbrace{\longleftarrow}_{\infty \leftarrow n}\, \int_{x_n}^{\lambda\, x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \,\geqslant\, \int_{x_n}^{\lambda\, x_n} \frac{\lambda\, x_n - t}{t^2}\, dt \,=\, \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2}\, du \,>\, 0.$$

Lemme 2.7

De manière similaire, si pour un $\lambda < 1$, avec $x_n \longrightarrow \infty$, on avait $\vartheta(x_n) \leqslant \lambda\, x_n$ quel que soit $n \geqslant 1$, d'où $\vartheta(t) \leqslant \vartheta(x_n) \leqslant \lambda\, x_n$ pour $t \leqslant x_n$, ceci impliquerait aussi contradiction :

$$0 \underbrace{\longleftarrow}_{\substack{\infty \leftarrow n \\ \text{Lemme 2.7}}} \int_{\lambda\, x_n}^{x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \;\leqslant\; \int_{\lambda\, x_n}^{x_n} \frac{\lambda\, x_n - t}{t^2}\, dt \;=\; \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - u}{u^2}\, du \;<\; 0. \qquad \square$$

Fin de la démonstration du Théorème 1.1. En partant de l'inégalité (non fine) :

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log p \;\leqslant\; \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log x \;=\; \pi(x) \log x,$$

il vient premièrement grâce à l'information cruciale $x \sim \vartheta(x)$ du Lemme 2.9 :

$$\frac{x}{\log x} \;\sim\; \frac{\vartheta(x)}{\log x} \;\leqslant\; \pi(x).$$

Pour l'inégalité inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit :

$$\begin{aligned} \vartheta(x) \;\geqslant\; \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} \log p \;&\geqslant\; \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} \log x^{1-\varepsilon} \\ &=\; \Big[\pi(x) - \pi\big(x^{1-\varepsilon}\big)\Big]\, (1-\varepsilon) \log x \\ [-\,\pi(y) \geqslant -y] \qquad &\geqslant\; \Big[\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\Big]\, (1-\varepsilon) \log x, \end{aligned}$$

et donc deuxièmement :

$$\frac{x}{\log x} \;\sim\; \frac{\vartheta(x)}{\log x} \;\geqslant\; (1-\varepsilon)\, \Big[\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\Big],$$

et comme $x^{1-\varepsilon}$ est négligeable devant $\frac{x}{\log x}$ lorsque $x \longrightarrow \infty$, ceci conclut. $\square$

3. Démonstration du théorème analytique

Il ne reste plus qu'à démontrer le Théorème 2.8, dont nous recopions l'énoncé.

Théorème 3.1. *Sur* $[0, \infty[$, *soit* $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. *Si la fonction :*

$$g(z) \;:=\; \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

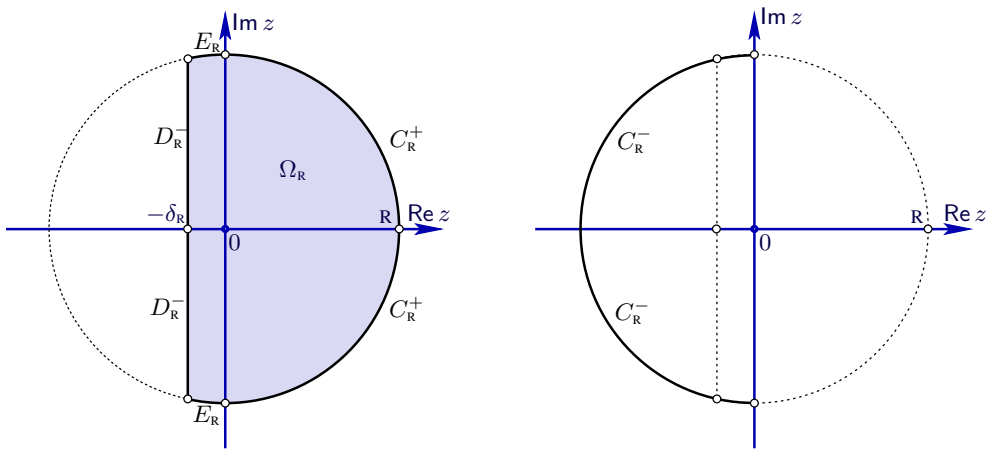
holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, z > 0\}$, *se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans* $\mathbb{C}$ *du demi-plan fermé* $\{\mathsf{Re}\, z \geqslant 0\}$, *alors* $\lim_{\mathrm{T} \to \infty} \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt$ *existe et vaut :*

$$g(0) \;=\; \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

Démonstration. Pour $\mathrm{T} > 0$, la fonction :

$$g_{\mathrm{T}}(z) \;:=\; \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

est clairement holomorphe entière en $z \in \mathbb{C}$. On doit montrer que $\lim_{\mathrm{T} \to \infty} g_{\mathrm{T}}(0)$ existe, et vaut $g(0)$.



Soit un rayon $\mathrm{R} \gg 1$, et soit l'ouvert :

$$\Omega_{\mathrm{R}} := \big\{ z \in \mathbb{C} \colon\ |z| < \mathrm{R},\ \operatorname{Re} z > -\delta_{\mathrm{R}} \big\},$$

où $\delta_{\mathrm{R}} > 0$ est choisi assez petit pour que g soit holomorphe au voisinage de sa fermeture $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}$. Sa frontière $\partial\Omega_{\mathrm{R}} = D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}} \cup C_{\mathrm{R}}^+$ se décompose en :

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{R}}^- &:= \big\{ |z| \leqslant \mathrm{R},\ \operatorname{Re} z = -\delta_{\mathrm{R}} \big\}, \\ E_{\mathrm{R}} &:= \big\{ |z| = \mathrm{R},\ -\delta_{\mathrm{R}} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0 \big\}, \\ C_{\mathrm{R}}^+ &:= \big\{ |z| = \mathrm{R},\ \operatorname{Re} z \geqslant 0 \big\}. \end{aligned}$$

Avec le poids astucieux utile plus tard $e^{z\mathrm{T}} \big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\big)$ sans pôle, le théorème des résidus de Cauchy donne :

$$\begin{aligned} g(0) - g_{\mathrm{T}}(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_{\mathrm{R}}} \big(g(z) - g_{\mathrm{T}}(z)\big)\, e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big) \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \bigg(\int_{D_{\mathrm{R}}^-} + \int_{E_{\mathrm{R}}} + \int_{C_{\mathrm{R}}^+} \bigg). \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que ces trois intégrales tendent vers 0 quand $\mathrm{T} \longrightarrow \infty$.

Lemme 3.2. *Sur le demi-cercle $C_{\mathrm{R}}^+ \ni z$, l'intégrande est borné par :*

$$\bigg| \big(g(z) - g_{\mathrm{T}}(z)\big)\, e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big) \frac{1}{z} \bigg| \ \leqslant\ \frac{2\, \|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}}.$$

Démonstration. En tout point $z \in C_{\mathrm{R}}^+$ avec $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\begin{aligned} \big|g(z) - g_{\mathrm{T}}(z)\big| &= \bigg| \int_{\mathrm{T}}^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt \bigg| \ \leqslant\ \|f\|_{L^\infty} \int_{\mathrm{T}}^{\infty} e^{-t \operatorname{Re} z}\, dt \\ &= \|f\|_{L^\infty} \frac{e^{-\mathrm{T} \operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\frac{z}{\mathrm{R}} = e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \bigg| e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big) \frac{1}{z} \bigg| &= \big|e^{z\mathrm{T}}\big| \cdot \big|1 + e^{2i\theta}\big| \cdot \frac{1}{\mathrm{R}} = e^{\mathrm{T} \operatorname{Re} z} \big|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\big| \frac{1}{\mathrm{R}} = e^{\mathrm{T} \operatorname{Re} z} \Big|2 \operatorname{Re} \frac{z}{\mathrm{R}}\Big| \frac{1}{\mathrm{R}} \\ &\leqslant \frac{2\, e^{\mathrm{T} \operatorname{Re} z} \operatorname{Re} z}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}}. \end{aligned}$$

Une multiplication de ces deux majorations conclut. □

Grâce à cela, avec $\int_{C_{\mathrm{R}}^+} |dz| = \pi\,\mathrm{R}$, on majore la troisième intégrale par une quantité qui tend vers zéro :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\mathrm{R}}^+} \right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\pi\,\mathrm{R}\,\frac{2\,\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}} \\ &= \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Maintenant, pour les deux intégrales sur D_{R}^- et sur E_{R}, on traite $g(z)$ et $g_{\mathrm{T}}(z)$ séparément dans $\big(g(z) - g_{\mathrm{T}}(z)\big)$.

Puisque $g_{\mathrm{T}}(z) = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,e^{-zt}\,dt$ est holomorphe entière, grâce à Cauchy, le contour d'intégration $D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}$ peut être remplacé par le demi-cercle :

$$C_{\mathrm{R}}^- := \big\{|z| = \mathrm{R},\ \mathsf{Re}\,z \leqslant 0\big\},$$

à savoir :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}} \big(-g_{\mathrm{T}}(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big)\,\frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\mathrm{R}}^-} \big(\text{même intégrande}\big).$$

Or pour $\mathsf{Re}\,z < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \big|g_{\mathrm{T}}(z)\big| &\leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-t\,\mathsf{Re}\,z}\,dt \leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{\mathrm{T}} e^{-t\,\mathsf{Re}\,z}\,dt \\ &= \|f\|_{L^\infty}\,\frac{e^{-\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z}}{|\mathsf{Re}\,z|}, \end{aligned}$$

et alors exactement la même estimée qu'à l'instant donne :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\mathrm{R}}^-} \big(-\,g_{\mathrm{T}}(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big)\,\frac{dz}{z} \right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_{L^\infty} \int_{C_{\mathrm{R}}^-} \frac{e^{-\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z}}{|\mathsf{Re}\,z|}\,\frac{2\,e^{\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z}\,|\mathsf{Re}\,z|}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}}\,|dz| \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_{L^\infty}\,\frac{2}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}}\,\pi\,\mathrm{R} \\ &= \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il reste à contrôler :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}} \big(g(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big)\,\frac{dz}{z}.$$

Il y a ici le produit d'une fonction indépendante de T, holomorphe au voisinage de $D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}$, donc intégrable, par la fonction $e^{z\mathrm{T}}$ dépendant de T, de module $\leqslant 1$, et satisfaisant :

$$\big|e^{z\mathrm{T}}\big| \leqslant e^{\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z} \underset{\mathrm{T}\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\forall\,\mathsf{Re}\,z < 0),$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne :

$$0 = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_{D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}} \big(g(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}} \Big(1 + \frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\Big)\,\frac{dz}{z}. \tag{3.5}$$

Au total, ces trois majorations (3.3), (3.4), (3.5) offrent :

$$\limsup_{\mathrm{T}\to\infty} \big|g(0) - g_{\mathrm{T}}(0)\big| \leqslant \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} + \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} + 0,$$

et comme $\mathrm{R} \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, c'est terminé ! $\square$

4. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

Éléments introductifs sur le Théorème de Dirichlet

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Depuis l'époque antique reculée d'Euclide, il est bien connu que l'ensemble des nombres premiers :

$$\mathscr{P} := \big\{p \in \mathbb{N}\colon\ p \geqslant 2,\ p \text{ premier}\big\}$$

est de cardinal infini, bien que non connaissable mathématiquement en totalité. Pour un nombre entier quelconque $q \geqslant 2$ et un nombre $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ premier avec q :

$$1 \,=\, \ell \wedge q,$$

il est alors natural de s'imaginer aussi, après quelques expérimentations numériques confortantes, que la progression arithmétique infinie :

$$\big\{\ell + k\,q\big\}_{k\in\mathbb{N}} \,=\, \big\{\ell,\ \ell+q,\ \ell+2q,\ \ell+3q,\ \dots\big\}$$

contient *toujours* une infinité de nombres premiers. Évidemment, lorsque ℓ et q ne sont pas premiers entre eux, tous ces $\ell + kq$ sont multiples de $\mathsf{pgcd}\,(\ell, q) \geqslant 2$, donc jamais premiers.

Dans la circonstance-limite $q = 1$, avec $\ell = 0$ ou 1, l'ensemble :

$$\big\{\ell + k\big\}_{k\in\mathbb{N}} \,=\, \mathbb{N} \,\supset\, \mathscr{P}$$

contient donc une infinité de nombres premiers. Le cas général s'énonce comme suit.

Théorème 1.1. [de Dirichlet] *Si deux entiers $q \geqslant 2$ et $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ sont premiers entre eux, alors il existe une* infinité *de nombres premiers de la forme :*

$$\ell + k\,q \qquad\qquad (k \in \mathbb{N}),$$

i.e. :

$$\infty \,=\, \mathsf{Card}\,\mathscr{P} \cap \big\{\ell + k\,q\big\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Grâce au produit infini de fonctions holomorphes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \,=\, \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

valable pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, Euler a démontré de manière élémentaire que :

$$\mathsf{log}\,\frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1) \,=\, \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} \qquad\qquad (s \longrightarrow 1,\ \mathsf{Re}\, s > 1),$$

d'où il découle que :

$$\infty \;=\; \lim_{s \searrow 1} \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^s},$$

et enfin $\infty = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p}$, ce qui redémontre l'infinitude des nombres premiers. C'est ce raisonnement d'Euler que Dirichlet est parvenu à généraliser aux progressions arithmétiques quelconques $\big\{\ell + k\,q\big\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Plus généralement, soit φ la *fonction indicatrice d'Euler :*

$$\varphi(q) \;:=\; \mathsf{Card}\,\big\{1 \leqslant \ell \leqslant q\colon\; \ell \wedge q = 1\big\}.$$

Une deuxième version plus quantitative du théorème classique de Dirichlet sera obtenue au cours des raisonnements.

Théorème 1.2. *Lorsque $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$ tend vers 1, on a :*

$$\sum_{\substack{p \,\in\, \mathscr{P} \\ p \,\equiv\, \ell \,\mathsf{mod}\, q}} \frac{1}{p^s} \;=\; \frac{1}{\varphi(q)} \log\Big(\frac{1}{s-1}\Big) + \mathrm{O}(1),$$

indépendamment *du choix de* $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$.

De cet énoncé découle immédiatement qu'il y a un nombre infini de nombres premiers congrus à ℓ modulo q.

Pour être plus éclairant sur le plan intuitif, il se trouve que la proportion des entiers premiers congrus à ℓ modulo q :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathsf{Card}\,\big\{p \leqslant x\colon\; p \in \mathscr{P},\, p \equiv \ell \,\mathsf{mod}\, q\big\}}{\mathsf{Card}\,\big\{p \leqslant x\colon\; p \in \mathscr{P}\big\}}.$$

tend asymptotiquement vers une limite *indépendante* de ℓ. comme vont le dévoiler des énoncés plus avancés.

Tout d'abord, pour tout réel $x \geqslant 1$, introduisons la fonction de comptage :

$$\pi(x) \;:=\; \mathsf{Card}\,\big\{p \in \mathscr{P}\colon\; p \leqslant x\big\}.$$

La démonstration du théorème suivant, due indépendamment à Hadamard et à de la Vallée Poussin, constitue l'une des plus belles pierres philosophales de l'alchime arithmétique au contact de l'Analyse Complexe.

Théorème 1.3. [des nombres premiers] *Asymptotiquement lorsque $x \longrightarrow \infty$, on a :*

$$\pi(x) \;\sim\; \frac{x}{\log x}.$$

Mais alors, qu'en est-il de la répartition quantitative des nombres premiers congrus à $\ell \,\mathsf{mod}\, q$? Introduisons à cet effet les diverses fonctions similaires de comptage suivantes :

$$\pi\big(x, \ell, q\big) \;:=\; \mathsf{Card}\,\big\{p \in \mathscr{P}\colon\; p \leqslant x,\; p \equiv \ell \,\mathsf{mod}\, q\big\},$$

dont les comportements n'ont rien de chaotique.

Théorème 1.4. [de Dirichlet quantitatif] *Asymptotiquement lorsque $x \longrightarrow \infty$, on a indépendamment de l'entier ℓ premier avec q :*

$$\pi\big(x, \ell, q\big) \;\sim\; \frac{1}{\varphi(q)}\, \frac{x}{\log x}.$$

Comme corollaire immédiat de ce théorème, il vient :

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{Card}\left\{p \leqslant x\colon\ p \in \mathscr{P},\, p \equiv \ell \bmod q\right\}}{\mathsf{Card}\left\{p \leqslant x\colon\ p \in \mathscr{P}\right\}}.$$

Mentionnons qu'à notre époque si évoluée au plan technologique, étant donné trois nombres entiers $a, b, c \geqslant 1$ premiers entre eux, le problème d'apparence simple de démontrer rigoureusement que la progression quadratique :

$$\left\{a + b\,k + c\,k^2\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

contient toujours une infinité de nombres premiers, est toujours *ouvert !* Avis aux amateurs de médailles !

2. Historique succinct

Mais avant d'entamer la démonstration du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet proprement dit, signalons que Euler l'avait déjà démontré dans le cas où $\ell = 1$.

En 1735, à la suite d'une étude pour la résolution du problème de Mengoli, Euler introduit en effet certains produits infinis centraux dans l'étude des fonctions trigonométriques. Deux ans plus tard, Euler découvre la formule maintenant célèbre :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

exemple paradigmatique de produit eulérien, formule-clé bien sûr redémontrée plus loin. Les écritures en série ou en produit infini d'Euler sont celles que Riemann exploitera ultérieurement dans son étude approfondie de la fonction éponyme $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. C'est la toute première fois qu'apparaît une information statistique sur la distribution des nombres premiers !

En 1785, Adrien-Marie Legendre énonce le théorème général de la progression arithmétique et croit le démontrer en 1808, mais un de ses lemmes cruciaux est erroné.

En 1837, Dirichlet démontre une première version de son théorème de la progression arithmétique, en supposant que q est premier. L'année suivante, il atteint le cas absolument général où q n'est pas supposé premier. En 1841, il généralise sa démonstration à l'ensemble des *entiers de Gauss :*

$$\mathbb{Z}(\sqrt{-1}) := \left\{a + \sqrt{-1}\,b\colon\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les démonstrations de Dirichlet sont d'un intérêt considérable en arithmétique. L'apport algébrique pour la théorie des nombres consiste essentiellement en un développement de l'Analyse Harmonique, car Dirichlet avait déjà travaillé sur les découvertes de Joseph Fourier, et pour la démonstration de son théorème il utilise des méthodes très analogues, cette fois-ci sur des groupes abéliens finis, au lieu du groupe abélien géométrique $S^1 = \left\{e^{i\theta}\colon\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$. Jacobi aurait écrit au sujet de Dirichlet :

> En appliquant les séries de Fourier à la théorie des nombres, Dirichlet a récemment trouvé des résultats atteignant les sommets de la perspicacité humaine.

Dans les mémoires mathématiques de Dirichlet, la théorie des caractères d'un groupe fini pour le cas abélien est pratiquement complète

De la Vallée Poussin a démontré la version quantitative suivante du théorème, conjecturée par Dirichlet et Legendre, qui entrevoyaient expérimentalement l'équirépartition des nombres premiers dans les classes modulo q.

Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, dans la progression $\ell + k\,q$, est équivalent à $\frac{1}{\varphi(q)}\,\frac{x}{\log x}$. □

Ce théorème généralise le théorème des nombres premiers — lequel correspond au cas $q = 1$ — de la même façon que le théorème de Dirichlet généralise le théorème d'Euclide.

En 1998, Ivan Soprounov l'a redémontré en quatre pages (!), grâce aux raccourcis mis au point par Donald J. Newman en 1980 dans sa preuve remarquablement simple du théorème des nombres premiers, encore contractée par Don Zagier en 1997 à l'occasion du centième anniversaire du théorème des nombres premiers.

RÉFÉRENCES

1. NEWMAN, D.J. : *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 693–696.
2. SOPROUNOV, I. : *A short proof of the prime number theorem for arithmetic progressions*, 4 pages, academic.csuohio.edu/soprunov/pdf/primes.pdf/
3. STEIN, E. ; SHAKARCHI, R. : *Fourier analysis. An introduction.* Princeton Lectures in Analysis, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. xvi+311 pp.
4. ZAGIER, D. : *Newman's short proof of the Prime Number Theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705–708.

Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Arithmétique élémentaire et formule d'Euler

Avant d'entamer les raisonnements, des préliminaires s'imposent. Soit :

$$\mathbb{N}^* = \big\{1, 2, 3, \dots\big\} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

l'ensemble des entiers naturels $\geqslant 1$. Soient deux entiers $a, b \geqslant 1$. On dit que a *divise* b s'il existe $c \in \mathbb{N}$, $c \geqslant 1$, tel que $b = ac$, ce qu'on note :

$$a \,|\, b.$$

Ainsi, $1 \,|\, a$ et $a \,|\, a$, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.1. Un nombre entier $p \geqslant 2$ n'ayant aucun autre diviseur que 1 et lui-même est appelé (nombre) *premier*.

On notera :

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &:= \big\{p \geqslant 2\colon\ p \text{ est premier}\big\}\\ &= \big\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \dots\big\}.\end{aligned}$$

Définition 2.2. Le *plus grand commun diviseur* de deux entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, noté :

$$\mathsf{pgcd}\,(a, b),$$

est le plus grand entier c qui divise simultanément a et b.

Le *Théorème Fondamental de l'Arithmétique* s'énonce alors comme suit.

Théorème 2.3. *Tout entier $n \geqslant 1$ se factorise de manière unique comme produit de nombres premiers :*

$$n = \big(p_1\big)^{\alpha_1} \cdots \big(p_r\big)^{\alpha_r},$$

avec $p_1 < \cdots < p_r \in \mathscr{P}$ et des puissances entières $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geqslant 1$. □

Sa démonstration, non remobilisée ici, repose sur le lemme de division d'Euclide, et sur le théorème de Gauss.

Théorème 2.4. *Il y a une infinité de nombres premiers :*

$$\infty = \mathsf{Card}\,\mathscr{P}.$$

Puisque l'objectif est d'établir le Théorème de Dirichlet, qui en est une généralisation non-élémentaire, il est avisé de se remémorer les arguments, faciles, qui remontent au moins à Euclide.

Démonstration. Par l'absurde, s'il n'y avait qu'un nombre fini $\mathrm{K} < \infty$ d'entiers premiers :

$$\mathscr{P} \overset{?}{=} \{p_1, \dots, p_{\mathrm{K}}\},$$

avec $2 = p_1 < \cdots < p_{\mathrm{K}}$, alors l'entier astucieusement formé :

$$1 + p_1 \cdots p_{\mathrm{K}},$$

visiblement divisible par *aucun* des p_k, $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}$, devrait toutefois, à cause du théorème qui précède, *être* produit fini d'entiers appartenant à $\mathscr{P} = \{p_1, \dots, p_{\mathrm{K}}\}$, contradiction. $\square$

Une démonstration élémentaire d'un résultat plus précis mérite d'être détaillée.

Théorème 2.5. *La série :*

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

diverge.

Il en découle instantanément que $\mathsf{Card}\, \mathscr{P} = \infty$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que cette série, à termes > 0, converge. En numérotant par ordre croissant :

$$\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots\},$$

il existe alors un entier $\mathrm{K} \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{k=\mathrm{K}+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Introduisons alors le produit :

$$Q := p_1 \cdots p_{\mathrm{K}}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier $1 + n\,Q$ n'est pas divisible par $p_1, \dots, p_{\mathrm{K}}$, donc a ses facteurs premiers parmi $\{p_{\mathrm{K}+1}, p_{\mathrm{K}+2}, \dots\}$.

Assertion 2.7. *Pour tout* $\mathrm{N} \geqslant 1$ *on a :*

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1 + n\,Q} \leqslant \sum_{a=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{k=\mathrm{K}+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \Bigg)^a.$$

Preuve. Chaque $\frac{1}{1+n\,Q}$ à gauche se décompose en :

$$\frac{1}{1 + n\,Q} = \frac{1}{\prod\limits_{k \geqslant \mathrm{K}+1} (p_k)^{\alpha_{n,k}}} \qquad (n \geqslant 1),$$

avec des exposants $\alpha_{n,k} \geqslant 0$, le produit étant fini. De plus :

$$n_1 \neq n_2 \implies \{\alpha_{n_1,k}\}_{k \geqslant \mathrm{K}+1} \neq \{\alpha_{n_2,k}\}_{k \geqslant \mathrm{K}+1},$$

simplement parce que $\frac{1}{1+n_1 Q} \neq \frac{1}{1+n_2 Q}$, donc lorsque n varie, tous ces termes $\frac{1}{\prod_{k \geqslant \mathrm{K}+1} (p_k)^{\alpha_{n,k}}}$ sont mutuellement distincts, donc ne se rassemblent jamais à la manière de $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} = 2\,\boldsymbol{T}$.

Or un développement multinomial à coefficients entiers du membre de droite :

$$\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\alpha_{\mathrm{K}+1}^a+\alpha_{\mathrm{K}+2}^a+\cdots=a} \frac{a!}{\alpha_{\mathrm{K}+1}^a!\,\alpha_{\mathrm{K}+2}^a!\,\cdots} \frac{1}{\prod\limits_{k\geqslant \mathrm{K}+1} (p_k)^{\alpha_k^a}}$$

fait voir que *chaque* terme à gauche dans $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1+n\,Q}$ (sans rassemblement) apparaît à droite toujours avec un coefficient multinomial $\geqslant 1$, souvent $\geqslant 2$ (à cause de rassemblements), donc l'inégalité est vraie, et même stricte. □

Or (2.6) conduit alors à la majoration *uniforme :*

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1+n\,Q} \leqslant \sum_{a=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^a = 1 < \infty,$$

quel que soit $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, mais cela est faux, puisque l'équivalence évidente :

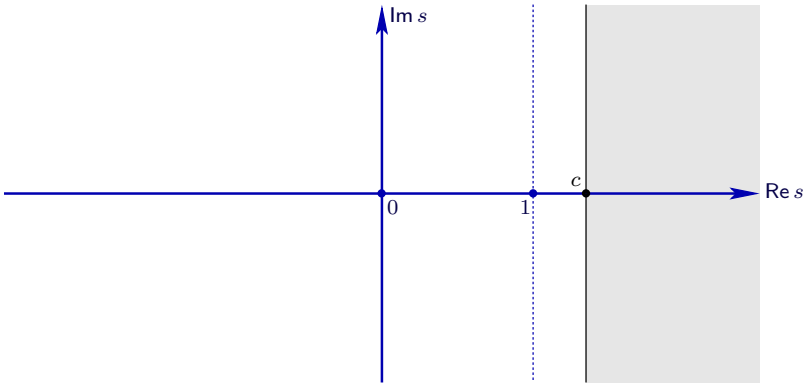
$$\frac{1}{1+n\,Q} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{Q}\,\frac{1}{n},$$

fait voir, à cause de la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, que $\sum \frac{1}{1+n\,Q} = \infty$, en fait ! □

Une troisième démonstration de l'infinitude des nombres premiers utilise la *fonction zêta* de Riemann :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

où $s \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe.



Lemme 2.8. *Pour tout réel $c > 1$, cette série converge normalement, donc uniformément, sur le demi-plan fermé :*

$$\big\{\mathsf{Re}\, s \geqslant c\big\} \subset \big\{\mathsf{Re}\, s > 1\big\}$$

Démonstration. En utilisant $\big|e^{s\log n}\big| = e^{\mathsf{Re}\, s\,\log n}$, on majore terme à terme :

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathsf{Re}\, s}} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} < \infty, \end{aligned}$$

d'après le critère de Riemann. □

Corollaire 2.9. *La fonction $\zeta(s)$ est holomorphe dans le demi-plan ouvert* $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$.

Démonstration. En effet, toutes les fonctions $s \longmapsto \frac{1}{n^s}$ y sont holomorphes, et un théorème dû à Cauchy assure qu'une série de fonctions holomorphes, uniformément convergente sur les compacts d'un ouvert, a une limite continue qui est de plus holomorphe. □

Le résultat-clé, pour re-démontrer $\mathsf{Card}\, \mathscr{P} = \infty$, est la formule de produit d'Euler.

Théorème 2.10. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, on a :*

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Il importe de remarquer que cette identité exprime analytiquement le Théorème 2.3 fondamental de l'arithmétique. En effet, chaque terme $\frac{1}{1-p^{-s}}$ dans le produit infini $\prod_{p \in \mathscr{P}}$ se développe comme série géométrique convergente :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \;=\; 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{\mathrm{M}s}} + \cdots.$$

Ainsi, en numérotant les entiers $\mathscr{P} = \{p_1 < p_2 < \cdots\}$, nous considérons :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(p_k)^s} + \frac{1}{(p_k)^{2s}} + \cdots + \frac{1}{(p_k)^{\mathrm{M}s}} + \cdots\right).$$

En développant formellement tout ceci, outre le terme initial $1 = \prod_{k=1}^{\infty} 1$, on obtient une somme dont les termes sont des produits :

$$\frac{1}{(p_{k_1})^{\alpha_1 s}} \cdots \frac{1}{(p_{k_\nu})^{\alpha_\nu s}} \;=:\; \frac{1}{n^s},$$

avec $\nu \geqslant 1$, avec $2 \leqslant p_{k_1} < \cdots < p_{k_\nu}$ premiers, et avec des exposants $1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$, et de cette manière, on reconstitue une et une seule fois tous les $\frac{1}{n^s}$, avec $n \geqslant 2$ entier quelconque.

Ainsi, ce (gigantesque) produit vaut bien :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

L'Exercice 1 propose de se convaincre que ces manipulations formelles convergent lorsque $\mathsf{Re}\, s > 1$.

Venons-en à la démonstration par Euler de $\mathsf{Card}\, \mathscr{P} = \infty$, celle qui a inspiré Dirichlet pour son théorème de la progression arithmétique.

Théorème 2.11. [Euler] *La série $\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty$ diverge.*

Démonstration. Prenons le logarithme complexe de la formule de produit d'Euler :

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \;=\; \zeta(s) \qquad (\mathsf{Re}\, s > 1),$$

ce qui donne :

$$-\sum_{p \in \mathscr{P}} \mathsf{log}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \;=\; \mathsf{log}\, \zeta(s).$$

Comme $\log(1+z) = z + \mathrm{O}(z^2)$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ (exercice), il vient :

$$-\sum_{p\in\mathscr{P}} \Big(-\frac{1}{p^s} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{p^{2s}}\Big)\Big) \,=\, \log\zeta(s).$$

Or la somme-reste converge, car :

$$\Big|\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^{2s}}\Big| \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^{2\,\mathrm{Re}\,s}} \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,=\, \frac{\pi^2}{6} \,<\, \infty,$$

et ainsi, nous pouvons écrire :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} + \mathrm{O}(1) \,=\, \log\zeta(s),$$

ce qui signifie l'existence d'une constante $0 < C < \infty$ telle que :

$$\Big|\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} - \log\zeta(s)\Big| \,\leqslant\, C \qquad (\forall\,\mathrm{Re}\,s > 1).$$

Maintenant, faisons $s \longrightarrow 1$ dans $\{\mathrm{Re}\,s > 1\}$. À droite, il est clair que :

$$\lim_{\substack{s\longrightarrow 1\\ \mathrm{Re}\,s>1}} \log\zeta(s) \,=\, \infty,$$

simplement parce que, pour tout $\mathrm{N} \gg 1$ entier :

$$\liminf_{\substack{s\longrightarrow 1\\ \mathrm{Re}\,s>1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \,\geqslant\, \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \,\underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow}\, \infty,$$

cette série harmonique tendant vers l'infini avec N, comme on le sait.

Par conséquent, on doit aussi avoir à gauche :

$$\lim_{\substack{s\longrightarrow 1\\ \mathrm{Re}\,s>1}} \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} \,=\, \infty,$$

et comme avec $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, on a $\frac{1}{p} > \frac{1}{p^s}$, nous concluons bien que :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p} \,=\, \infty. \qquad \square$$

La suite de ce chapitre est consacrée à dévoiler comment Dirichlet a prolongé et adapté cette magnifique démonstration d'Euler.

3. Présentation des idées de Dirichlet dans un cas simple

L'objectif est donc d'établir le

Théorème 3.1. *Pour tous entiers $q \geqslant 2$ et $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ avec $\ell \wedge q = 1$, on a :*

$$\infty \,=\, \mathrm{Card}\,\mathscr{P} \cap \big\{\ell + k\,q\big\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Inspiré par les arguments d'Euler qui précèdent, Dirichlet a donc cherché à démontrer que la série :

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\equiv\ell \bmod q}} \frac{1}{p} \overset{?}{=} \infty$$

diverge *aussi*. Avant de procéder au cas général, détaillons une preuve très simple dans le cas $q = 4$, $\ell = 1$, qui aura le mérite d'anticiper notre compréhension transparente des choses, et de graver les idées essentielles sur notre disque dur mental.

Proposition 3.2. *Il y a une infinité de nombres premiers de la forme* $\{1 + 4\,k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, et plus précisément :*

$$\infty = \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{p}.$$

Démonstration. L'idée-clé est de considérer l'ensemble des entiers inversibles modulo 4 :

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\big)^{\times} &:= \big\{\ell\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\colon\ \exists\,\ell'\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \ell\ell'=1\big\}\\ &= \{1,\,3\} \bmod 4,\end{aligned}$$

autrement dit, de regarder en même temps *toutes* les progressions arithmétiques modulo 4 dans lesquelles il est éventuellement possible de trouver des nombres premiers, vu que $\{0 + 4\,k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{2 + 4\,k\}_{k\in\mathbb{N}}$, toujours multiples de 2, n'en contiennent trivialement pas.

Dirichlet introduit alors la fonction de $n \in \mathbb{Z}$:

$$\chi(n) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } n \text{ est pair},\\ 1 & \text{lorsque } n = 4k+1,\\ -1 & \text{lorsque } n = 4k+3.\end{cases} \tag{3.3}$$

On vérifie (exercice) que cette fonction est *complètement multiplicative :*

$$\chi\big(n_1\,n_2\big) = \chi(n_1)\,\chi(n_2), \tag{3.4}$$

pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Dirichlet introduit aussi ce qu'on appelle une « *fonction* L » :

$$\begin{aligned}L(s,\chi) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\\ &= 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots,\end{aligned}$$

qui est une '*déformation*' de la fonction $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$.

Un point absolument crucial est la non-annulation :

$$L(1,\chi) \neq 0,$$

difficile à démontrer dans le cas général, mais ici facile à voir, puisque $L(1,\chi)$ est la série alternée convergente connue :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Par ailleurs, la multiplicativité (3.4) de la fonction χ permet un argument formel direct qui généralise celui d'Euler :

$$\begin{aligned} L(s,\chi) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \;&=\; \sum_{r_2,r_3,r_5,\cdots\geqslant 0} \frac{\chi(2)^{r_2}\,\chi(3)^{r_3}\,\chi(5)^{r_5}\cdots}{\big(2^{r_2}\,3^{r_3}\,5^{r_5}\cdots\big)^s} \\ &=\; \prod_{p\in\mathscr{P}} \Big(\sum_{r\geqslant 0} \frac{\chi(p)^r}{p^{rs}}\Big) \\ &=\; \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}, \end{aligned}$$

le Théorème 5.4 *infra* donnant une preuve détaillé complète de la convergence de cette formule dans un cadre général.

En admettant donc cette formule :

$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \;=\; L(s,\chi),$$

si nous prenons à nouveau son logarithme comme nous l'avons fait plus haut dans la démonstration du Théorème 2.11 d'Euler, si nous utilisons à nouveau $\log(1+z) = z + \mathrm{O}(z^2)$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, et si nous observons que $|\chi(p)| \leqslant 1$ pour majorer une série-reste, nous obtenons :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} + \underbrace{\mathrm{O}\Big(\sum_{p\in\mathscr{P}} \Big(\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^2\Big)}_{=\,\mathrm{O}(1)} \;=\; \log L(s,\chi).$$

Or comme $L(1,\chi) \neq 0$, lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, le membre de droite reste borné, donc celui de gauche aussi. Autrement dit :

Lemme 3.5. *Lorsque* $s \longrightarrow 1$ *avec* $\mathrm{Re}\, s > 1$, *l'expression :*

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} \;=\; \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p^s} - \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,3 \bmod 4}} \frac{1}{p^s}$$

reste bornée. □

Cette constatation essentielle termine le travail. En effet, nous savons déjà par le Théorème 2.11 que :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} \;=\; \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p^s} + \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,3 \bmod 4}} \frac{1}{p^s}$$

tend au contraire vers ∞ quand $s \longrightarrow 1$, et alors par simple addition, nous déduisons que :

$$\infty \;\underset{\substack{1\,\leftarrow\, s\\ 1\,<\,\mathrm{Re}\, s}}{\longleftarrow}\; 2 \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,\equiv\,1 \bmod 4}} \frac{1}{p^s},$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Le cas général du théorème de Dirichlet, toujours inspiré par Euler, débute alors comme suit. Pour $q \geqslant 2$ fixé, il s'agit de considérer *toutes* les sommes :

$$\left(\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv \ell \bmod q}} \frac{1}{p^s} \right)_{\ell \wedge q = 1},$$

quel que soit ℓ, et de montrer qu'elles divergent. Ainsi, le groupe des éléments inversibles de l'anneau quotient $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, à savoir :

$$\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^{\times} := \Big\{ \ell \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \colon \ \exists\, \ell' \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \ \ell\ell' = 1 \Big\},$$

va jouer un rôle. Dans le cas $q = 4$, $\ell = 1$ vu à l'instant, avec la fonction χ_0 triviale :

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \mathsf{pgcd}\,(n, q) \geqslant 2, \\ 1 & \text{lorsque } n \wedge q = 1, \end{cases}$$

et avec la fonction χ défine ci-dessus par (3.3), l'argument final consistait à regarder (sommer) les deux fonctions L :

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} = \sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \equiv 3} \frac{1}{p^s}, \\ L(s, \chi) &= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \equiv 3} \frac{1}{p^s}. \end{aligned}$$

Aussi faut-il « inventer » des fonction χ appropriées. C'est donc à la *théorie des* (bons !) *caractères* χ, due à Dirichlet, qu'est consacrée la section suivante. Une fois que nous aurons présenté cette théorie arithmétique, nous pourrons revenir à la description anticipatrice des idées.

4. Groupes abéliens finis, caractères, séries de Fourier discrètes

Soit $G = (G, +)$ un groupe abélien quelconque fini :

$$\mathsf{Card}\, G < \infty.$$

L'ensemble $\{f \colon G \longrightarrow \mathbb{C}\}$ des fonctions sur G est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit aussi le cercle unité :

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| = 1\},$$

qui est un groupe abélien (infini) pour la multiplication complexe.

Définition 4.1. Un *caractère* de (ou sur) G est un morphisme de groupes abéliens :

$$\chi \colon \quad G \longrightarrow S^1.$$

On vérifie (exercice) que l'ensemble :

$$\widehat{G}$$

des caractères sur G est (aussi) un groupe abélien fini pour la multiplication :

$$\big(\chi\, \chi'\big)(a) := \chi(a)\, \chi'(a) \qquad (a \in G).$$

L'Exercice 2 propose d'obtenir

$$\mathsf{Card}\, \widehat{G} = \mathsf{Card}\, G.$$

En particulier, le caractère trivial χ_0 sur G prend pour constamment pour valeurs :

$$\chi_0(a) \,:=\, 1 \qquad (a \in G).$$

Soit maintenant $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction quelconque.

Définition 4.2. Le *coefficient de Fourier* de f par rapport à un caractère $\chi \in \widehat{G}$ est :

$$\widehat{f}(\chi) \,:=\, \frac{1}{\mathsf{Card}\, G} \sum_{a \in G} f(a)\, \overline{\chi(a)}.$$

Le produit scalaire hermitien naturel entre deux fonctions $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ étant :

$$\langle f, g \rangle_G \,:=\, \frac{1}{\mathsf{Card}\, G} \sum_{a \in G} f(a)\, \overline{g}(a),$$

on a :

$$\widehat{f}(\chi) \,=\, \langle f, \chi \rangle_G.$$

Définition 4.3. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ est la fonction :

$$\mathscr{F}(f) \,:=\, \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi,$$

à savoir dont les valeurs sur les éléments $a \in G$ sont :

$$\mathscr{F}(f)(a) \,:=\, \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi(a).$$

On vérifie aisément (exercice) que les caractères de G forment une famille orthonormée. Mieux encore, ils forment une base. Les résultats de cette section, issus d'un cours d'Algèbre standard, ne seront pas re-démontrés.

Théorème 4.4. *Les caractères $\chi\colon G \longrightarrow S^1$ (morphismes de groupes) sur un groupe abélien G de cardinal $\mathsf{Card}\, G < \infty$ sont au nombre de $\mathsf{Card}\, G$, et forment une base orthonormée de l'espace vectoriel hermitien :*

$$\big\{ f\colon G \longrightarrow \mathbb{C} \big\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_G \,:=\, \frac{1}{\mathsf{Card}\, G} \sum_{a \in G} f(a)\, \overline{g(a)}.$$

De plus, toute fonction $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ est égale *à sa transformée de Fourier :*

$$f(a) \,=\, \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle f, \chi \rangle_G \cdot \chi(a) \qquad (a \in G).$$

Enfin, la formule de Plancherel-Parseval est satisfaite :

$$\|f\|_G^2 \,:=\, \langle f, f \rangle_G \,=\, \sum_{\chi \in \widehat{G}} \big| \langle f, \chi \rangle_G \big|^2. \qquad \square$$

Pour illustrer ce propos, soit le groupe cyclique $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geqslant 2$. Via l'isomorphisme :

$$k \bmod n \quad \longleftrightarrow \quad \big(e^{\frac{2i\pi}{n}}\big)^k,$$

on peut le voir comme :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,=\, \big\{e^{2i\pi\,\frac{k}{n}}\colon\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\big\}.$$

Ici, les $n = \mathsf{Card}\,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ caractères distincts sont les fonctions :

$$\chi_l\colon \quad e^{\frac{2i\pi k}{n}} \ \longmapsto\ \big(e^{\frac{2i\pi k}{n}}\big)^l \qquad\qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On vérifie (exercice) qu'on a bien :

$$\big\langle \chi_{l_1},\, \chi_{l_2}\big\rangle_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \,=\, \delta_{l_1,l_2} \qquad\qquad (0 \leqslant l_1, l_2 \leqslant n-1),$$

pour le produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \,:=\, \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} f(k)\,\overline{g(k)},$$

où $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ et où $g\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions quelconques.

L'égalité de toute fonction à sa transformée de Fourier :

$$f(k) \,=\, \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant l\leqslant n-1} \langle f, \chi_l\rangle \cdot \chi_l(k) \qquad\qquad (k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

peut être démontrée directement (exercice) sans passer par la théorie générale.

Théorème 4.5. [Structure des groupes abéliens finis] *Tout groupe abélien G avec* $\mathsf{Card}\,G < \infty$ *est isomorphe à un produit direct de groupes abéliens cycliques.*

Plus précisément, il existe une suite finie unique d'entiers $d_1, \ldots, d_{\mathrm{K}}$ se divisant successivement :

$$d_1 \,|\, d_2, \qquad d_2 \,|\, d_3, \qquad \ldots\ldots, \qquad d_{\mathrm{K}-1} \,|\, d_{\mathrm{K}},$$

telle que :

$$G \,\cong\, \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_{\mathrm{K}}\mathbb{Z}. \qquad \square$$

Mentionnons que l'on peut établir le Théorème 4.4 en vérifiant d'abord que pour deux groupes abéliens finis G_1 et G_2, on a :

$$\widehat{G_1 \times G_2} \,=\, \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2,$$

et en utilisant ensuite ce théorème de structure.

Maintenant, étant donné $q \geqslant 2$ entier et $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ premier avec q, dans le Théorème 3.1 de Dirichlet, le groupe abélien fini concerné se trouvera être le groupe des éléments inversibles pour la multiplication (commutative) :

$$\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^{\times} \,:=\, \Big\{\ell \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\colon\ \exists\, \ell' \in \mathbb{Z}/z\mathbb{Z},\ \ell\ell' = 1\Big\}.$$

Ce groupe n'est pas forcément cyclique, contrairement au groupe *additif* $\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +\big)$ dans lequel il est plongé.

Toutefois, le théorème de structure qui précède montre que $\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^{\times}$ est toujours somme directe finie de groupes cycliques $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$, avec $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{K}(q)$.

Exemple 4.6. Pour $q = 4$, seuls 1 et 3 ont un inverse :

$$1 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 4, \qquad 3 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 4,$$

et ceci fait voir que :

$$\big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\big)^{\times} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

via l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 0, \\ 3 &\longleftrightarrow 2. \end{aligned}$$

Dans la Section **3** qui précède, cet exemple très simple s'est avéré particulièrement éclairant pour comprendre le principe de la démonstration de Dirichlet.

Exemple 4.7. Pour $q = 8$, on vérifie que :

$$\big(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\big)^{\times} = \big\{1, 3, 5, 7\big\},$$

et que :

$$\big(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\big)^{\times} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

via l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow (0,0), \\ 3 &\longleftrightarrow (1,0), \\ 5 &\longleftrightarrow (0,1), \\ 7 &\longleftrightarrow (1,1). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu, l'ensemble des caractères sur le groupe intéressant que nous noterons parfois en abrégé :

$$\mathbb{Z}_q^{\times} \equiv \big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^{\times},$$

sera noté :

$$\widehat{\mathbb{Z}}_q^{\times}.$$

5. Présentation des idées de Dirichlet dans le cas général

De retour à la discussion laissée en suspens à la fin de la Section **3**, avec $\ell \wedge q = 1$, l'objectif est de démontrer que :

$$\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv \ell \bmod q}} \frac{1}{p^s} = \infty.$$

Au moyen de la fonction de $m \in \mathbb{Z}$ définie par :

$$\delta_\ell(m) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } m \equiv \ell \bmod q, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

cette somme se ré-exprime comme :

$$\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv \ell \bmod q}} \frac{1}{p^s} = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\delta_\ell(p)}{p^s}.$$

Bien entendu, δ_ℓ peut aussi être vue comme fonction :

$$\delta_\ell \colon \quad \big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^{\times} \longrightarrow \{0, 1\}.$$

La théorie des caractères, à savoir le Théorème 4.4, représente alors δ_ℓ comme série de Fourier :

$$\delta_\ell(m) \;=\; \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \langle\delta_\ell,\chi\rangle\cdot\chi(m),$$

et puisqu'un calcul simple donne :

$$\begin{aligned}\langle\delta_\ell,\chi\rangle \;&=\; \frac{1}{\mathsf{Card}\,\mathbb{Z}_q^\times}\sum_{m\in\mathbb{Z}_q^\times}\delta_\ell(m)\,\overline{\chi}(m)\\ &=\; \frac{1}{\varphi(q)}\,\overline{\chi(\ell)},\end{aligned}$$

on obtient :

$$\delta_\ell(m) \;=\; \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times}\overline{\chi(\ell)}\,\chi(m) \qquad\qquad (m\in\mathbb{Z}_q^\times).$$

Définition 5.1. Un *caractère de Dirichlet* modulo q est l'extension à $\mathbb{Z}$ d'un caractère $\chi\in\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$ sur $\mathbb{Z}_q^\times$:

$$\chi(m) \;:=\; \begin{cases}\chi(m) & \text{lorsque } m\wedge q=1,\\ 0 & \text{autrement,}\end{cases}$$

tous deux notés avec la même lettre χ.

En particulier, le *caractère de Dirichlet trivial* χ_0 est :

$$\chi_0(m) \;:=\; \begin{cases}1 & \text{lorsque } m\wedge q=1,\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

De manière similaire, on a noté ci-dessus $\delta_\ell\colon\mathbb{Z}\longrightarrow\{0,1\}$ ainsi que $\delta_\ell\colon\mathbb{Z}_q^\times\longrightarrow\{0,1\}$.

Alors la somme intéressante devient :

$$\begin{aligned}\sum_{p\equiv\ell}\frac{1}{p^s} \;&=\; \sum_p\frac{\delta_\ell(p)}{p^s}\\ &=\; \frac{1}{\varphi(q)}\sum_\chi\overline{\chi(\ell)}\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s},\end{aligned}$$

et ainsi, dans l'objectif d'atteindre $\infty=\sum_{p\equiv\ell}\frac{1}{p}$, il suffit de comprendre le comportement de :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{\chi(p)}{p^s},$$

sachant que la somme $\sum_\chi\overline{\chi(\ell)}$ devant est finie.

Observons que sur les entiers premiers $p\in\mathscr{P}$, le caractère de Dirichlet trivial prend les valeurs :

$$\chi_0(p) \;:=\; \begin{cases}1 & \text{lorsque } p\nmid q,\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

Décomposons alors cette $\sum_\chi$ en distinguant $\chi = \chi_0$, le caractère trivial, des autres caractères $\chi \neq \chi_0$:

$$\begin{aligned}\sum_{p\equiv\ell}\frac{1}{p^s} &= \frac{1}{\varphi(q)}\sum_p\frac{\chi_0(p)}{p^s}+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}\\ &= \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{p\nmid q}\frac{1}{p^s}+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

Or puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p \in \mathscr{P}$ ne divisant pas q, le théorème d'Euler $\sum \frac{1}{p} = \infty$ implique que le premier terme à droite *diverge* lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$.

Toutes ces observations montrent que le théorème de la progression arithmétique dû à Dirichlet est conséquence de la découverte suivante, elle aussi due à Dirichlet.

Théorème 5.3. *Pour tout caractère non trivial $\chi \neq \chi_0$ sur $\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times$, la somme :*

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}$$

demeure bornée lorsque $s \longrightarrow 1$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$.

En effet, l'identité (5.2) ci-dessus donnera alors :

$$\sum_{p\equiv\ell}\frac{1}{p^s} \underset{s\to 1}{\longrightarrow} \infty.$$

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration de ce théorème.

Terminons cette section par une preuve détaillée du :

Théorème 5.4. *Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo un entier $q \geqslant 2$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, on a :*

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Démonstration. Notons S le membre de gauche et P le membre de droite :

$$S := \sum_{n=1}^\infty\frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad \prod_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} := P.$$

Une application d'un théorème connu d'Analyse Complexe (exercice), garantit que ce produit infini converge pour $\mathsf{Re}\, s > 1$, puisque (solution de l'exercice), la somme infinie :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\Big|\frac{\chi(p)}{p^s}\Big| \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^{\mathsf{Re}\, s}} \leqslant \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{\mathsf{Re}\, s}} < \infty$$

converge.

Pour $\mathrm{N} \gg 1$ entier, notons aussi :

$$S_\mathrm{N} := \sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{N}}\frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad P_\mathrm{N} := \prod_{1\leqslant p\leqslant \mathrm{N}}\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Ainsi :

$$S = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} S_{\mathrm{N}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathrm{N}\to\infty} P_{\mathrm{N}} = P,$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big|S_{\mathrm{N}(\varepsilon)} - S\big| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathsf{Re}\, s}} \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \big|P_{\mathrm{N}(\varepsilon)} - P\big| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $1 \leqslant \mathrm{N} \leqslant \mathrm{M}$ entiers, soit aussi :

$$P_{\mathrm{N},\mathrm{M}} := \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant \mathrm{N}}} \Big(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^{\mathrm{M}})}{p^{\mathrm{M}s}}\Big).$$

Assertion 5.5. *Il existe* $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon) \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$ *assez grand pour que :*

$$\big|P_{\mathrm{N},\mathrm{M}} - P_{\mathrm{N}}\big| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \big|P_{\mathrm{N},\mathrm{M}} - S_{\mathrm{N}}\big| \leqslant \varepsilon.$$

Preuve. La première inégalité provient simplement de la convergence du développement en série infinie :

$$\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} = 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^{\mathrm{M}})}{p^{\mathrm{M}s}} + \cdots.$$

Quant à la seconde, plus subtile, avec :

$$t := t(\mathrm{N}) := \mathsf{Card}\big\{p\in\mathscr{P}\colon\ 2\leqslant p\leqslant \mathrm{N}\big\},$$

et la numérotation $2 = p_1 < \cdots < p_t \leqslant \mathrm{N}$, on estime grâce à la multiplicativité complète de χ :

$$\begin{aligned}
\big|S_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N},\mathrm{M}}\big| &= \Big|\sum_{n\leqslant \mathrm{N}} \frac{\chi(n)}{n^s} - \prod_{p\leqslant \mathrm{N}} \Big(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^{\mathrm{M}})}{p^{\mathrm{M}s}}\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{n\leqslant \mathrm{N}} \frac{\chi(n)}{n^s} - \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_t\leqslant \mathrm{M}} \frac{\chi\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)}{\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)^s}\Big| \\
&= \Big|-\sum_{\substack{\beta_1,\ldots,\beta_t\leqslant \mathrm{M}\\ p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\geqslant \mathrm{N}+1}} \frac{\chi\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)}{\big(p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}\big)^s}\Big| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant \mathrm{N}+1} \Big|\frac{\chi(n)}{n^s}\Big| \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Enfin, une inégalité triangulaire à 4 termes :

$$\begin{aligned}
|S-P| &\leqslant \big|S - S_{\mathrm{N}}\big| + \big|S_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N},\mathrm{M}}\big| + \big|P_{\mathrm{N},\mathrm{M}} - P_{\mathrm{N}}\big| + \big|P_{\mathrm{N}} - P\big| \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

fait voir que $S - P$ est arbitrairement petit, donc $S = P$. □

6. Non-annulation en $s = 1$ des fonctions $L(s, \chi)$

Commençons par énoncer un rappel du cours d'Analyse Complexe.

Théorème 6.1. [Cauchy] *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui convergent uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction (continue) $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$:*

$$\forall\, K \Subset \mathbb{C} \text{ compact} \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} \big|f_n(z) - f(z)\big| \,=\, 0.$$

Alors la fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans Ω.

De plus, les dérivées de tous ordres $\kappa \geqslant 0$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergent aussi uniformément sur les compacts de Ω :

$$\forall\, \kappa \in \mathbb{N} \quad \forall\, K \Subset \mathbb{C} \text{ compact} \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} \big|f_n^{(\kappa)}(z) - f^{(\kappa)}(z)\big| \,=\, 0. \qquad \square$$

Un autre préliminaire connu va être utile. Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ deux suites de nombres complexes. Il s'agit de transformer des séries infinies de produits $\sum_n a_n\, b_n$ afin d'établir leur convergence, et pour cela, il est avisé d'étudier leurs sommes partielles. Aussi, pour $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$ entiers, on note :

$$S_{\mathrm{M},\mathrm{N}} \,:=\, \sum_{\mathrm{M}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} a_n\, b_n,$$

et pour $n \geqslant \mathrm{M}$:

$$A_{\mathrm{M},n} \,:=\, a_{\mathrm{M}} + a_{\mathrm{M}+1} + \cdots + a_n.$$

Lemme 6.2. [d'Abel] *Alors :*

$$S_{\mathrm{M},\mathrm{N}} \,=\, \sum_{\mathrm{M}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}-1} A_{\mathrm{M},n}\,\big(b_n - b_{n+1}\big) + A_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\, b_{\mathrm{N}}.$$

Démonstration. Avec l'assignation de valeur $A_{\mathrm{M},\mathrm{M}-1} := 0$, on remplace $a_n = A_{\mathrm{M},n} - A_{\mathrm{M},n-1}$:

$$S_{\mathrm{M},\mathrm{N}} \,=\, \sum_{\mathrm{M}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \big(A_{\mathrm{M},n} - A_{\mathrm{M},n-1}\big)\, b_n,$$

et on regroupe (à l'œil) les termes. $\square$

Lemme 6.3. *Étant donné deux nombres réels $0 < \alpha < \beta$, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x > 0$, on a :*

$$\big|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\big| \,\leqslant\, \frac{|z|}{x}\,\big(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\big).$$

Démonstration. On majore la représentation intégrale :

$$e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \,=\, z \int_{\alpha}^{\beta} e^{-zt}\, dt,$$

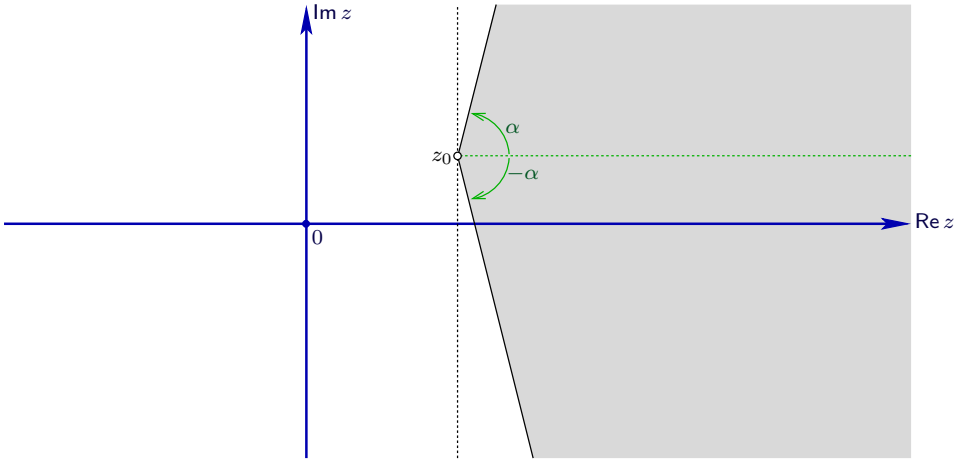
simplement par :

$$\big|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\big| \,\leqslant\, |z| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xt}\, dt \,=\, \frac{|z|}{x}\,\big(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\big). \qquad \square$$

Définition 6.4. Une *série de Dirichlet* est une série infinie, fonction de $z \in \mathbb{C}$, de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

où $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres appartenant à $\mathbb{C}$.



Proposition 6.5. *Si une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ converge (simplement) en un $z = z_0 \in \mathbb{C}$, alors pour tout angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, elle converge normalement, donc uniformément, dans le secteur ouvert :*

$$\Big\{ z \in \mathbb{C} \colon \ \mathsf{Re}\,(z - z_0) > 0, \ -\alpha < \mathsf{Arg}\,(z - z_0) < \alpha \Big\}.$$

Démonstration. Quitte à effectuer une translation sur z, on peut supposer que $z_0 = 0$. L'hypothèse signifie alors que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, simplement.

Il revient au même (exercice) de démontrer qu'il y a convergence uniforme dans tout domaine de la forme :

$$\big\{ z \in \mathbb{C} \colon \ \mathsf{Re}\, z > 0 \colon \ \tfrac{|z|}{\mathsf{Re}\, z} < k \big\},$$

quel que soit $k \geqslant 1$ entier.

Puisque $\sum a_n$ converge, pour tout $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit), il existe un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$n_2 \geqslant n_1 \geqslant \mathrm{N} \implies \big| A_{n_1,n_2} \big| \leqslant \varepsilon,$$

où comme précédemment $A_{n_1,n_2} = a_{n_1} + \cdots + a_{n_2}$.

Une application du Lemme 6.2 avec $b_n := \frac{1}{n^z}$ donne alors :

$$\begin{aligned} S_{n_1,n_2} &:= \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2} \frac{a_n}{n^z} \\ &= \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2 - 1} A_{n_1,n} \Big(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \Big) + A_{n_1,n_2} \frac{1}{n_2^z}. \end{aligned}$$

Ensuite, avec $z = x + iy$, et $x > 0$, le Lemme 6.3 offre, en tenant compte de $\frac{1}{|n_2^z|} = \frac{1}{n_2^x} < 1$:

$$\big| S_{n_1,n_2} \big| \leqslant \varepsilon \Bigg[\frac{|z|}{x} \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2 - 1} \Big(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \Big) + 1 \Bigg],$$

c'est-à-dire par téléscopie :

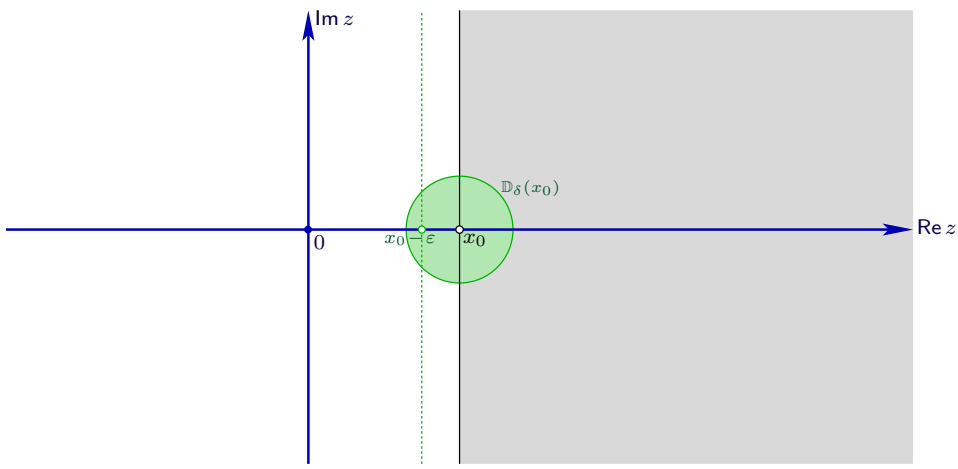
$$\begin{aligned} \big|S_{n_1,n_2}\big| &\leqslant \varepsilon \left(k \left(\frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x} \right) + 1 \right) \\ &\leqslant \varepsilon \big(k+1\big), \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale. □

Corollaire 6.6. *Si une série de Dirichlet* $\sum \frac{a_n}{n^z}$ *converge en un* $z = z_0$*, alors elle converge en tout point de* $\{\mathsf{Re}\, z > \mathsf{Re}\, z_0\}$ *vers une fonction-limite* holomorphe *dans* $\{\mathsf{Re}\, z > \mathsf{Re}\, z_0\}$.

Démonstration. En ouvrant l'angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ arbitrairement proche de $\frac{\pi}{2}$, on atteint tout point de $\{\mathsf{Re}\, z > \mathsf{Re}\, z_0\}$. La convergence uniforme et le Théorème 6.1 établissent l'holomorphie de la fonction-limite. □

Pour utilisation ultérieure, il faut maintenant étudier les séries de Dirichlet à coefficients réels $a_n \geqslant 0$.

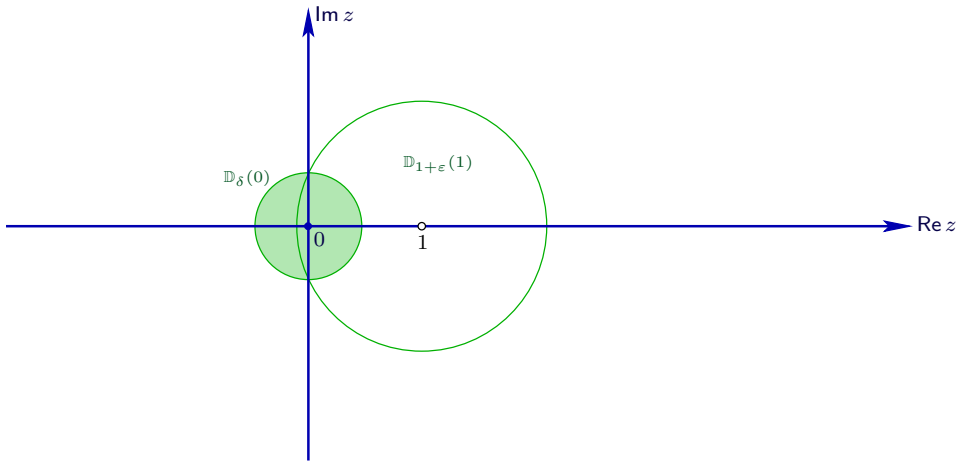


Proposition 6.7. *Soit* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ *une série de Dirichlet à coefficients réels positifs* $a_n \geqslant 0$*. Si* $f(z)$ *converge en un point réel* $z = x_0 \in \mathbb{R}$ *— donc aussi dans* $\{\mathsf{Re}\, z > x_0\}$ *— et si* $f(z)$ *peut être prolongée holomorphiquement à un disque ouvert* $\mathbb{D}_\delta(x_0)$ *de rayon* $\delta > 0$ *centré en* x_0*, alors il existe* $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ *tel que la série* $\sum \frac{a_n}{n^z}$ *converge en fait dans :*

$$\big\{z \in \mathbb{C} \colon\ \mathsf{Re}\, z > x_0 - \varepsilon\big\}.$$

Démonstration. Quitte à translater $z \longmapsto z - x_0$, on peut supposer que $x_0 = 0$. Alors f est holomorphe dans la réunion :

$$\{\mathsf{Re}\, z > 0\} \cup \{|z| < \delta\}.$$



On se convainc aisément qu'il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ assez petit pour que cette réunion *contienne* un voisinage ouvert du disque fermé de centre 1 et de rayon $1+\varepsilon$:

$$\overline{\mathbb{D}}_{1+\varepsilon}(1).$$

En particulier, la série de Taylor (standard) de f calculée au point 1 doit avoir un rayon de convergence strictement supérieur à $1+\varepsilon$. Or le Théorème 6.1 permet de calculer toutes les dérivées κ-ièmes, $\kappa \in \mathbb{N}$, de f en dérivant terme à terme :

$$f^{(\kappa)}(z) \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \frac{(-\log n)^\kappa}{n^z},$$

d'où en $z = 1$ pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$:

$$f^{(\kappa)}(1) \,=\, (-1)^\kappa \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \frac{(\log n)^\kappa}{n} \tag{6.8}$$

Observons alors la positivité qui va devenir cruciale :

$$(-1)^\kappa \, f^{(\kappa)}(1) \,\geqslant\, 0.$$

Comme la série de Taylor de f au point $z = 1$ s'écrit généralement :

$$f(z) \,=\, \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(z-1)^\kappa}{\kappa!} \, f^{(\kappa)}(1),$$

sa valeur au point $z = -\varepsilon$, qui *appartient* au disque de convergence, est :

$$f(-\varepsilon) \,=\, \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon)^\kappa}{\kappa!} \, (-1)^\kappa \, f^{(\kappa)}(1),$$

cette série étant convergente. Mais puisqu'elle est à termes tous $\geqslant 0$, elle est aussi absolument convergente.

Qui plus est, en remplaçant $(-1)^\kappa \, f^{(\kappa)}(1)$ par (6.8), il s'ensuit que la série double à termes positifs :

$$f(-\varepsilon) \,=\, \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \frac{1}{\kappa!} \, (1+\varepsilon)^\kappa \, (\log n)^\kappa \, \frac{1}{n},$$

est elle aussi convergente — donc commutativement convergente !, d'après un résultat classique. Or en regroupant les termes adéquatement :

$$\begin{aligned} f(-\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \big[(1+\varepsilon) \log n\big]^{\kappa} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{(1+\varepsilon) \log n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{-\varepsilon}}, \end{aligned}$$

on constate que la série de Dirichlet $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge en $z = -\varepsilon$, donc aussi dans $\{\mathrm{Re}\, z > -\varepsilon\}$, grâce à la Proposition 6.5. □

Lemme 6.9. *Si les coefficients $|a_n| \leqslant C < \infty$ sont bornés, la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.*

Démonstration. Avec $c > 1$ arbitrairement proche de 1, on majore en effet, pour tout $\mathrm{Re}\, s \geqslant c$:

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \Big| \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, s}} \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} < \infty,$$

d'après le critère de Riemann. □

Lemme 6.10. *Si les sommes partielles $A_{\mathrm{M},\mathrm{N}} = a_{\mathrm{M}} + \cdots + a_{\mathrm{N}}$ sont bornées :*

$$\big|A_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\big| \leqslant C < \infty \qquad (\forall\, \mathrm{N} \geqslant \mathrm{M} \geqslant 1),$$

alors la série $\sum \frac{a_n}{n^s}$ converge (pas nécessairement de manière absolue) dans $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$.

Démonstration. Une application du Lemme 6.2 à la somme partielle $S_{\mathrm{M},\mathrm{N}} = \sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{a_n}{n^s}$ avec $b_n := \frac{1}{n^s}$ donne :

$$\big|S_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\big| = C \bigg(\sum_{\mathrm{M} \leqslant n \leqslant \mathrm{N}-1} \Big| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \Big| + \frac{1}{|\mathrm{N}^s|} \bigg).$$

Supposons $s = s_0 > 0$ réel arbitrairement proche de 0. Alors par téléscopie :

$$\big|S_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\big| \leqslant C \bigg(\frac{1}{\mathrm{M}^{s_0}} - \frac{1}{\mathrm{N}^{s_0}} + \frac{1}{\mathrm{N}^{s_0}} \bigg) \underset{\mathrm{N} \geqslant \mathrm{M} \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc il y a convergence lorque $s = s_0$. La Proposition 6.5 montre alors qu'il y a convergence dans $\{\mathrm{Re}\, s > s_0\}$. □

Lemme 6.11. *La fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge holomorphiquement à $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$.*

Démonstration. En effet, avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, il apparaît dans la différence une série :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} dx \bigg(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \bigg)}_{=:\, E_n(s)}$$

de fonctions holomorphes qui sont majorables grâce à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}\big|E_n(s)\big| \;=\; \left|\int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{s\,du}{u^{s+1}}\right| \;&\leqslant\; 1\cdot \max_{n\leqslant u\leqslant n+1}\left|\frac{s}{u^{s+1}}\right| \\ &=\; \frac{|s|}{n^{1+\mathsf{Re}\,s}},\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $\{\mathsf{Re}\,s \,>\, 0\}$ vers une fonction-limite holomorphe. □

Après tous ces préparatifs d'Analyse, il est temps de revenir à la théorie des groupes. Soit $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$ un caractère quelconque. Rappelons la formule de produit du Théorème 5.4 :

$$L(s,\chi) \;=\; \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \;=\; \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}},$$

puisque tout caractère de Dirichlet est identiquement nul sur les entiers non inversibles modulo q :

$$p\wedge q \,=\, 1 \;\iff\; p\nmid q.$$

On a de manière similaire pour la fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Lemme 6.12. *Pour le caractère trivial $\chi \neq \chi_0$, on a :*

$$L(s,\chi_0) \;=\; \zeta(s)\prod_{p\,|\,q}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big).$$

Démonstration. En effet :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_0(n)}{n^s} \;=\; \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\wedge q=1}}\frac{1}{n^s} \;=\; \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\nmid q}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \;=\; \zeta(s)\prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\,|\,q}}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big).$$ □

Corollaire 6.13. *La fonction $L(s,\chi_0)$ est prolongeable méromorphiquement à $\{\mathsf{Re}\,s>0\}$ et y admet un unique pôle simple en $s=1$, de résidu égal à :*

$$\prod_{p\,|\,q}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \;=\; \frac{\varphi(q)}{q}.$$ □

Rappelons que la théorie des caractères montre que pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_q^\times}\chi(m) \;=\; \begin{cases}0 & \text{si } \chi\neq\chi_0,\\ \varphi(q) & \text{si } \chi=\chi_0,\end{cases}$$

d'où découle, en confondant χ avec son extension à $\mathbb{Z}$ comme caractère de Dirichlet :

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{N}}\chi(n)\right| \;\leqslant\; \varphi(q),$$

quel que soit $\mathrm{N}\geqslant 1$ entier.

Proposition 6.14. *Pour tout caractère non trivial $\chi \neq \chi_0$, la série $L(s, \chi) = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}$ converge uniformément (mais pas nécessairement absolument) sur les compacts de $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$, et y définit une fonction* holomorphe.

Démonstration. Grâce au Lemme 6.10, il suffit de faire voir que les sommes partielles :

$$X_{\mathrm{M,N}} := \sum_{\mathrm{M} \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} \chi(n),$$

sont uniformément bornées pour tous $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$, et cela est aisé :

$$\big|X_{\mathrm{M,N}}\big| \leqslant \Big| \sum_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} \chi(n) - \sum_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{M}-1} \chi(n) \Big| \leqslant 2\, \varphi(q). \qquad \square$$

En particulier, au point $s = 1$, la valeur $L(1, \chi)$ est *finie*, pour tout $\chi \neq \chi_0$. Comme cela a été annoncé au milieu de la Section **5**, le *point essentiel* de la démonstration du Théorème 3.1 de Dirichlet consiste à établir que :

$$L(1, \chi) \neq 0,$$

et maintenant, nous sommes en mesure de faire aboutir cet objectif.

Toujours avec $q \geqslant 2$ entier, avec $p \in \mathscr{P}$ premier, avec $Z_q^\times = \big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times$ le groupe des entiers inversibles modulo q de cardinal :

$$\mathsf{Card}\, \mathbb{Z}_q^\times = \varphi(q),$$

lorsque $p \nmid q$, d'où $p \in \mathbb{Z}_q^\times$, on notera son *ordre* dans le groupe $\mathbb{Z}_q^\times$ par :

$$o(p) = \min \big\{1 \leqslant o \leqslant \varphi(q) \colon\ p^o \equiv 1 \bmod q\big\}.$$

Le groupe quotient de $\mathbb{Z}_q^\times$ par le groupe cyclique que p engendre est alors de cardinal entier :

$$\frac{\varphi(q)}{o(p)} = \mathsf{Card}\ \mathbb{Z}_q^\times \Big/ \{1, p, \ldots, p^{o(p)-1}\}.$$

Enfin, soit T une indéterminée formelle.

Lemme 6.15. *Si $p \nmid q$, on a l'identité :*

$$\prod_{\chi \in \mathbb{Z}_q^\times} \big(1 - \chi(p)\, T\big) = \Big(1 - T^{o(p)}\Big)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}}.$$

Démonstration. Les $o(p)$ racines $o(p)$-ièmes de l'unité sont :

$$\big\{e^{\frac{2i\pi k}{o(p)}}\big\}_{0 \leqslant k \leqslant o(p)-1},$$

et il est clair que :

$$\prod_{0 \leqslant k \leqslant o(p)-1} \Big(1 - e^{\frac{2i\pi k}{o(p)}}\, T\Big) = 1 - T^{o(p)}.$$

Or la théorie des caractères assure, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant o(p) - 1$, qu'il existe exactement $\frac{\varphi(q)}{o(p)}$ caractères $\chi \in \mathbb{Z}_q^\times$ dont la valeur en p est constante égale à :

$$\chi(p) = e^{\frac{2i\pi k}{o(p)}},$$

donc le produit complet se décompose en deux produits, ce qui donne la formule. $\square$

Introduisons maintenant la fonction de $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(s) &:= \prod_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} L(s,\chi) \\ &= L(s,\chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s,\chi).\end{aligned}$$

Elle est holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.

Proposition 6.16. *Cette fonction est égale à :*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(s) &= \prod_{p \nmid q} \frac{1}{\big(1 - \frac{1}{p^{so(p)}}\big)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}}} \\ &= \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{1}{p^{so(p)}} + \frac{1}{p^{2so(p)}} + \cdots\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},\end{aligned}$$

et elle se développe en une série de Dirichlet à coefficients réels positifs $c_n \geqslant 0$ qui converge dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.

Démonstration. En effet, grâce à ce qui précède, en rappelant que $\chi \equiv 0$ sur les entiers non premiers avec q :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi) &= \prod_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \\ &= \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \nmid q}} \prod_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \\ \text{[Lemme 6.15]} \qquad &= \prod_{p \nmid q} \frac{1}{\big(1 - \frac{1}{p^{so(p)}}\big)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}}}.\end{aligned}$$

Ensuite, le développement de produit de séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{kso(p)}}$ à coefficients $\geqslant 0$ donne bien des coefficients $c_n \geqslant 0$, et sa convergence dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ est claire. □

Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème-clé qui achève complètement la démonstration du Théorème 3.1 de Dirichlet.

Théorème 6.17. *Pour tout caractère non trivial $\chi \neq \chi_0$, on a en $s = 1$:*

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

Démonstration. Sinon, par contradiction, si $L(1,\chi_1) = 0$ pour un caractère $\chi_1 \neq \chi_0$, comme $L(s,\chi_0)$ a été prolongée méromorphiquement à $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$ par le Corollaire 6.13 avec un unique pôle en $s = 1$, d'ordre 1, et comme les autres $L(s,\chi)$ ont été prolongées *holomorphiquement* à $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$ par la Proposition 6.14, le zéro en $s = 1$ de $L(s,\chi_1)$ « *tue* » le pôle en $s = 1$ de $L(s,\chi_0)$, et alors le produit (fini) :

$$\mathscr{L}(s) = L(s,\chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s,\chi)$$

s'avère être *holomorphe* dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Or ce produit prolonge la série de Dirichlet à coefficients $\geqslant 0$ convergente dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \mathscr{L}(s),$$

donc la Proposition 6.7 permet crucialement de déduire que cette série de Dirichlet converge *en fait* dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Mais ceci est absurde, car pour tout $p \wedge q = 1$, on peut minorer :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{so(p)}}}\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} &= \left(1+\frac{1}{p^{so(p)}}+\frac{1}{p^{2so(p)}}+\cdots\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} \\ &\geqslant 1+\frac{1}{p^{s\varphi(q)}}+\frac{1}{p^{2s\varphi(q)}}+\cdots,\end{aligned}$$

donc en prenant le produit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \prod_{p \nmid q} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{so(p)}}}\right)^{\frac{\varphi(q)}{o(p)}} &\geqslant \prod_{p \nmid q} \left(1+\frac{1}{p^{s\varphi(q)}}+\frac{1}{p^{2s\varphi(q)}}+\cdots\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant n \\ n \wedge q = 1}} \frac{1}{n^{s\varphi(q)}},\end{aligned}$$

et cette dernière série diverge en $s = \frac{1}{\varphi(q)} > 0$, car $\sum \frac{1}{n} = \infty$, donc à gauche, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ ne peut *pas* converger dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ — contradiction conclusive. $\square$

7. Exercices

Exercice 1. L'objectif est d'établir rigoureusement la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ du Théorème 2.10, pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$.

(a) Justifier la convergence de ce produit infini.

(b) On suppose temporairement $s \in \mathbb{R}$, avec $s > 1$. Pour un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ quelconque, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

(c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

(d) Pour deux entiers $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$, montrer que :

$$\prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant \mathrm{N}}} \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{\mathrm{M}s}}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(e) En déduire :

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(f) Traiter le cas général $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathsf{Re}\, s > 1$.

Exercice 2. En utilisant le Théorème 4.5 de structure des groupes abéliens finis G, démontrer que le groupe des caractères $\widehat{G}$ sur G est toujours isomorphe à G.

Exercice 3. EE

Densité des nombres premiers dans les progressions arithmétiques

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Soit $q \geqslant 2$ entier, et soit $1 \leqslant \ell \leqslant q-1$ un autre entier. Lorsqu'il est premier avec q, à savoir lorsque $\ell \wedge q = 1$, le théorème de Dirichlet vu précédemment a déjà démontré que l'ensemble :

$$\mathscr{P}_\ell \,:=\, \big\{p \in \mathscr{P}\colon\ p \equiv \ell \bmod q\big\},$$

est infini, où $\mathscr{P} \subset \mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. L'objectif de ce chapitre est d'obtenir des estimations quantitatives sur les nombres :

$$\pi\big(x,\ell,q\big) \,:=\, \mathsf{Card}\,\Big\{p \in \mathscr{P}\colon\ p \leqslant x,\ p \equiv \ell \bmod q\Big\}.$$

Rappelons notre notation pour l'indicateur d'Euler :

$$\varphi(q) \,:=\, \mathsf{Card}\,\big\{1 \leqslant \ell \leqslant q-1\colon\ \ell \wedge q = 1\big\} \,=\, \mathsf{Card}\,\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)^\times.$$

L'objectif de ce chapitre est en effet d'établir le

Théorème 1.1. [Dirichlet quantitatif] *Asymptotiquement lorsque $x \longrightarrow \infty$, on a :*

$$\pi\big(x,\ell,q\big) \,\sim\, \frac{1}{\varphi(q)}\,\frac{x}{\log x},$$

indépendamment de ℓ.

Rappelons aussi que les *caractères de Dirichlet* modulo q sont obtenus par prolongement (trivial) à $\mathbb{Z}$ de caractères :

$$\chi\colon\quad (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \,\longrightarrow\, S^1,$$

du groupe (multiplicatif) des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ à valeurs dans le cercle unité S^1. Classiquement, le caractère trivial est noté :

$$\chi_0(n) \,:=\, \begin{cases} 1 & \text{lorsque } n \wedge q = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Deux propriétés seront utiles *infra*. Elles proviennent d'un cours d'Algèbre, et ne seront pas re-démontrées ici. La première est conséquence élémentaire de la structure de groupe.

Lemme 1.2. *Pour tout caractère $\chi \neq \chi_0$, on a :*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_q^\times} \chi(m) \;=\; 0 \;=\; \sum_{0\leqslant n\leqslant q-1} \chi(n),$$

et pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ *:*

$$\Bigl|\sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \chi(n)\Bigr| \;\leqslant\; \varphi(q). \qquad \square$$

Notons $\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$ le groupe des caractères sur $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. La seconde propriété provient d'un isomorphisme (bidualité) entre le groupe des caractères sur $\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$ et $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ lui-même.

Lemme 1.3. *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}}_q^\times} \chi(n) \;=\; \begin{cases} 0 & \textit{lorsque } n \;\not\equiv\; 1 \bmod q, \\ \varphi(q) & \textit{lorsque } n \;\equiv\; 1 \bmod q. \end{cases} \qquad \square$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, introduisons maintenant 5 fonctions, premièrement :

$$L(s,\chi) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

deuxièmement :

$$\vartheta_\ell(s) \;:=\; \varphi(q) \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}_\ell \\ p\leqslant x}} \log p,$$

troisièmement :

$$\Phi(s,\chi) \;:=\; \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)\log p}{p^s},$$

quatrièmement :

$$\begin{aligned} \Phi(s) \;&:=\; \sum_{\chi} \Phi(s,\chi) \\ &=\; \sum_{\chi}\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\chi(p)\log p}{p^s}, \end{aligned}$$

et cinquièmement :

$$\begin{aligned} \Phi_\ell(s) \;&=\; \sum_{\chi} \overline{\chi(\ell)}\, \Phi(s,\chi) \\ &=\; \sum_{\chi}\sum_{p\in\mathscr{P}} \overline{\chi(\ell)}\, \frac{\chi(p)\log p}{p^s}. \end{aligned}$$

Toutes ces séries convergent normalement donc uniformément (exercice) sur les demi-plans fermés $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant c\}$, quel que soit $c > 1$.

Lemme 1.4. *Pour* $\mathrm{Re}\, s > 1$*, et pour tout caractère de Dirichlet, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \;=\; \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

En particulier, pour $\chi = \chi_0$ *:*

$$L(s,\chi_0) \,=\, \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\wedge q=1}} \frac{1}{n^s} \,=\, \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\nmid q}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \,=\, \zeta(s)\,\prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\mid q}} \Big(1-\frac{1}{p^s}\Big).$$

Preuve. La formule de produit infini a déjà été vue. Pour $\chi = \chi_0$, la formule découle (exercice mental) du produit infini d'Euler pour $\zeta(s)$. $\square$

Lemme 1.5. *Pour tout caractère de Dirichlet non trivial* $\chi \neq \chi_0$*, la fonction* $L(s,\chi) = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}$ *se prolonge holomorphiquement à* $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$*, et il en va de même de :*

$$L(s,\chi_0) - \frac{\varphi(q)}{q}\,\frac{1}{s-1}.$$

Démonstration. Avec :

$$\Lambda(x) \,:=\, \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \chi(n),$$

où n est entier, on calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} \frac{\chi(n)}{n^s} - \frac{\Lambda(x)}{x^s} \,&=\, \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \chi(n)\,\Big(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\Big)\\ &=\, s\,\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \chi(n)\int_n^x \frac{du}{u^{s+1}}.\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{x} := \mathsf{Ent}(x)$, *i.e.* $\mathrm{x}\in\mathbb{N}$ et :

$$\mathrm{x} \,\leqslant\, x \,<\, \mathrm{x}+1.$$

Pour continuer, on développe et on réorganise :

$$\begin{aligned}\int_1^x \Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant t} \chi(m)\Big)\frac{du}{u^{s+1}} \,&=\, \int_1^2 \chi(1)\,\frac{du}{u^{s+1}} + \cdots + \int_{\mathrm{x}-1}^{\mathrm{x}} \Big(\chi(1)+\cdots+\chi(\mathrm{x}-1)\Big)\frac{du}{u^{s+1}} +\\ &\qquad + \int_{\mathrm{x}}^x \Big(\chi(1)+\cdots+\chi(\mathrm{x}-1)+\chi(\mathrm{x})\Big)\frac{du}{u^{s+1}}\\ &=\, \chi(1)\Big[\int_1^2 + \cdots + \int_{\mathrm{x}-1}^{\mathrm{x}} + \int_{\mathrm{x}}^x\Big] + \cdots + \chi(\mathrm{x}-1)\Big[\int_{\mathrm{x}-1}^{\mathrm{x}} + \int_{\mathrm{x}}^x\Big] + \chi(\mathrm{x})\Big[\int_{\mathrm{x}}^x\Big]\\ &=\, \sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{x}} \chi(n)\int_n^x \frac{du}{u^{s+1}}.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{\chi(n)}{n^s} \,=\, \frac{\Lambda(x)}{x^s} + s\int_1^x \Lambda(u)\,\frac{du}{u^{s+1}}.$$

Or comme, d'après le Lemme 1.2, on a pour tout $\chi \neq \chi_0$ et pour tout $u \geqslant 1$:

$$\big|\Lambda(u)\big| \,=\, \Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant u} \chi(n)\Big| \,\leqslant\, \varphi(q),$$

il est clair que l'intégrale-reste obtenue à l'instant converge dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ lorsque $x \longrightarrow \infty$, et ainsi :

$$L(s,\chi) \,=\, 0 + s\int_1^\infty \Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant u} \chi(m)\Big)\frac{du}{u^{s+1}},$$

est représentée par une fonction holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Pour ce qui est du caractère trivial χ_0, sachant que $\zeta(s)$ se prolonge méromorphiquement à $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ avec un *unique* pôle *simple* en $s = 1$ de résidu égal à 1, la formule précédente du Lemme 1.4 :

$$L(s, \chi_0) \,=\, \zeta(s) \prod_{p \,|\, q} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big),$$

montre bien que $L(s, \chi_0)$ se prolonge aussi méromorphiquement à $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$, avec un *unique* pôle *simple* en $s = 1$ de résidu :

$$\prod_{p \,|\, q} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big) \,=\, \frac{\varphi(q)}{q}. \qquad \square$$

Lemme 1.6. *Il existe une constante* $0 < C_q < \infty$ *telle que, pour tout* $1 \leqslant \ell \leqslant q - 1$ *avec* $\ell \wedge q = 1$*, et tout* $x \geqslant 1$*, on a :*

$$(0 \,\leqslant) \qquad\qquad \vartheta_\ell(x) \,=\, \varphi(q) \sum_{\substack{p \in \mathscr{P}_\ell \\ p \leqslant x}} \log p \,\leqslant\, C_q\, x.$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement d'un Lemme déjà vu dans la démonstration du Théorème des nombres premiers, à savoir :

$$\sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log p \,\leqslant\, 4 \log 2 \cdot x,$$

puisque :

$$\vartheta_\ell(x) \,\leqslant\, \varphi(q) \sum_{\mathscr{P} \ni p \leqslant x} \log p \,\leqslant\, 4\, \varphi(q) \log 2 \cdot x. \qquad \square$$

Lemme 1.7. *Pour tout caractère* χ *de Dirichlet modulo* q*, la fonction* $L(s, \chi)$ *n'a aucun zéro sur la droite* $\{\mathsf{Re}\, s = 1\}$.

Démonstration. Introduisons le produit fini :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(s) \,&:=\, \prod_{\chi} L(s, \chi) \\ &=\, L(s, \chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi). \end{aligned}$$

Comme le Lemme 1.5 a fait voir que $L(s, \chi_0)$ a un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, les autres $L(s, \chi)$ étant holomorphes, il en va de même pour $\mathscr{L}(s)$. Il suffit donc de montrer que :

$$\mathscr{L}(1 + it) \,\neq\, 0 \qquad\qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}^*).$$

Supposons par l'absurde que $t \longmapsto \mathscr{L}(s + it)$ ait un zéro d'ordre $\mu_0 \geqslant 1$ en $t = t_0 \neq 1$. Notons aussi $\nu_0 \geqslant 0$ l'ordre d'annulation de $t \longmapsto \mathscr{L}(s + it)$ en $t = 2t_0$, qui peut valoir 0.

La relation de conjugaison :

$$\overline{L(s, \chi)} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Big(\frac{\chi(n)}{n^s}\Big)} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\chi(n)}}{n^{\overline{s}}} \,=\, L\big(\overline{s}, \overline{\chi}\big),$$

implique, puisque $\overline{\chi}$ est aussi un caractère :

$$\overline{\mathscr{L}(s)} \,=\, \mathscr{L}\big(\overline{s}\big).$$

Par conséquent, $\mathscr{L}$ a aussi un zéro de même ordre $\mu_0 \geqslant 1$ en $1 - it_0$, et que son ordre d'annulation en $1 - 2it_0$ a la même valeur $\nu_0 \geqslant 0$.

Ensuite, pour $\mathsf{Re}\, s > 1$, une dérivée logarithmique du produit $L(s,\chi) = \prod_p \big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\big)^{-1}$ donne :

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} &= \sum_{p \in \mathscr{P}} \Big(\log\Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)\Big)' \\ &= \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s - \chi(p)} \\ &= \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s} + \sum_p \frac{\chi(p)^2 \log p}{p^s\big(p^s - \chi(p)\big)} \\ &= \Phi(s,\chi) + R(s,\chi), \end{aligned} \tag{1.8}$$

la fonction-reste $R(s,\chi)$ étant holomorphe dans $\big\{\mathsf{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$ grâce à $\frac{1}{p^{2s}}$ au dénominateur.

Via le Lemme 1.5, pour $\chi \neq \chi_0$, la fonction $\Phi(s,\chi)$ se prolonge méromorphiquement à $\big\{\mathsf{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$ avec des pôles seulement aux zéros de $L(s,\chi)$, tandis que $\Phi(s,\chi_0)$ se prolonge méromorphiquement à $\big\{\mathsf{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$ avec un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, et des pôles aux zéros de $L(s,\chi_0)$.

En sommant cette égalité sur tous les caractères χ, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{\mathscr{L}'(s)}{\mathscr{L}(s)} &= -\sum_\chi \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \\ &= \sum_\chi \Phi(s,\chi) + \sum_\chi R(s,\chi) \\ &= \Phi(s) + R(s), \end{aligned}$$

la fonction-reste $R(s)$ étant holomorphe dans $\big\{\mathsf{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$.

Rappelons que si une fonction $h(s)$ méromorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ s'écrit $h(s) = (s - s_0)^{\tau_0}\, H(s)$ au voisinage d'un point $s_0 \in \Omega$, avec $\tau_0 \in \mathbb{Z}$, et H holomorphe près de s_0 satisfaisant $H(s_0) \neq 0$, le résidu en s_0 de sa dérivée logarithmique vaut :

$$\mathsf{res}_{s=s_0}\Big(-\frac{h'(s)}{h(s)}\Big) = -\tau_0.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathsf{res}_{s=1}\big(\Phi(s)\big) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi\big(1+\varepsilon\big) = 1, \\ \mathsf{res}_{s=1\pm it_0}\big(\Phi(s)\big) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi\big(1+\varepsilon \pm it_0\big) = -\mu_0, \\ \mathsf{res}_{s=1\pm 2it_0}\big(\Phi(s)\big) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi\big(1+\varepsilon \pm 2it_0\big) = -\nu_0. \end{aligned}$$

Sommons ensuite les valeurs de Φ en ces 5 points $-2it_0$, $-it_0$, 1, it_0, $2it_0$ avec comme poids les coefficients binomiaux $1, 4, 6, 4, 1$:

$$\begin{aligned}
-\sum_{-2\leqslant l\leqslant 2}\binom{4}{2+l}\Phi\big(1+\varepsilon+ilt_0\big) &= \sum_{-2\leqslant l\leqslant 2}\binom{4}{2+l}\sum_p\sum_\chi\frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\varepsilon+ilt_0}}\\
&= \sum_p\sum_\chi\frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{-2\leqslant l\leqslant 2}\binom{4}{2+l}\left(\frac{1}{p^{it_0/2}}\right)^{l+2}\left(\frac{1}{p^{-it_0/2}}\right)^{-l+2}\\
&= \sum_p\sum_\chi\frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{it_0/2}+p^{-it_0/2}\right)^4\\
\text{[Lemme 1.3]}\qquad &= \varphi(q)\sum_{p\wedge q=1}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{it_0/2}+p^{-it_0/2}\right)^4\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

en utilisant :

$$\sum_\chi\chi(p) = \begin{cases}\varphi(q) & \text{lorsque } p\wedge q=1,\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

En appliquant $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}(\cdot)$ à cette inégalité, il vient :

$$-\nu_0-4\,\mu_0+6-4\,\mu_0-\nu_0 \;\geqslant\; 0,$$

ce qui implique $\mu_0=0$ nécessairement.

En définitive, $\mathscr{L}(s)$, et donc chacun de ses facteurs $L(s,\chi)$, n'a aucun zéro sur $\{\mathsf{Re}\,s=1\}$. □

Comme la formule du Lemme 1.4 garantit que chaque $L(s,\chi)$ n'a aucun zéro dans $\{\mathsf{Re}\,s>1\}$, nous déduisons que ces $L(s,\chi)$ n'ont aucun zéro dans un voisinage ouvert du demi-plan fermé $\{\mathsf{Re}\,s\geqslant 1\}$.

Lemme 1.9. *Pour tout $\ell\wedge q=1$, la fonction :*

$$\Phi_\ell(s)-\frac{1}{s-1}$$

se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ de $\{\mathsf{Re}\,s\geqslant 1\}$.

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned}
\Phi_\ell(s) &= \sum_\chi\overline{\chi(\ell)}\,\Phi(s,\chi)\\
&= \Phi(s,\chi_0)+\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(\ell)}\,\Phi(s,\chi).
\end{aligned}$$

Grâce à (1.8), en tenant compte de $L(s,\chi_0)\sim\frac{\phi(q)}{q}\frac{1}{s-1}$ pour $s\sim 1$ d'après le Lemme 1.5, d'où :

$$\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}\sim\frac{1}{s-1}\qquad (s\sim 1),$$

et comme $L(s,\chi_0)$ n'a aucun zéro sur $\{1+it\}_{t\neq 0}$, on voit que $\Phi(s,\chi_0)$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de tout point $1+it_0$ avec $t_0\neq 0$. Donc $\Phi(s,\chi_0)-\frac{1}{s-1}$ se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ de $\{\mathsf{Re}\,s\geqslant 1\}$.

Pour les autres $\Phi(s,\chi)$ avec $\chi \neq \chi_0$, le Lemme 1.5 et (1.8) donnent le prolongement holomorphe (sans pôle) au voisinage de tout point $1+it$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque. $\square$

Lemme 1.10. *Pour tout entier ℓ avec $\ell \wedge q = 1$, l'intégrale :*

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta_\ell(x)-x}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_1^{\mathrm{T}} \frac{\vartheta_\ell(x)-x}{x^2}\,dx$$

converge.

Démonstration. Soit $\ell \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, et soit ℓ' son inverse, *i.e.* $\ell\,\ell' \equiv 1 \bmod q$. Pour tout caractère $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_q^\times$, on a $\chi(\ell)\,\chi(\ell') = 1$, *i.e.* :

$$\chi(\ell') \;=\; \frac{1}{\chi(\ell)} \;=\; \overline{\chi(\ell)},$$

puisque tout est à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$. Avec $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 1$, calculons alors :

$$\begin{aligned}
\Phi_\ell(s) \;&=\; \sum_\chi \overline{\chi(\ell)} \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s} \\
&=\; \sum_p \frac{\log p}{p^s} \sum_\chi \chi(\ell')\,\chi(p) \\
&=\; \sum_p \frac{\log p}{p^s} \sum_\chi \chi\big(\ell' p\big) \\
\text{[Lemme 1.3]} \qquad &=\; \sum_{\substack{p\in\mathscr{P} \\ \ell' p \equiv 1 \bmod q}} \frac{\log p}{p^s}\,\varphi(q) \\
&=\; \varphi(q) \sum_{\substack{p\in\mathscr{P} \\ p \equiv \ell \bmod q}} \frac{\log p}{p^s}.
\end{aligned}$$

Observons que $\vartheta_\ell(x) = \varphi(q) \sum_{p\in\mathscr{P}_\ell} \log p$ présente des sauts de hauteur $\varphi(q)\log p$ exactement aux entiers premiers $p \equiv \ell \bmod q$. Ainsi, nous pouvons ré-écrire cette somme comme intégrale de Riemann-Stieltjes, et effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\Phi_\ell(s) \;&=\; \int_1^\infty \frac{d\big(\vartheta_\ell(x)\big)}{x^s} \\
\text{[Lemme 1.6]} \qquad &=\; \underbrace{\left[\frac{\vartheta_\ell(x)}{x^s}\right]_1^\infty}_{0} + s\int_1^\infty \frac{\vartheta_\ell(x)}{x^{s+1}}\,dx \\
[x = e^t] \qquad &=\; 0 + s\int_0^\infty e^{-st}\,\vartheta_\ell\big(e^t\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Toujours avec des entiers $\ell \wedge q = 1$, introduisons les fonctions :

$$f_\ell(t) \;=\; \frac{\vartheta_\ell(e^t)}{e^t} - 1,$$

constantes par morceaux, donc localement intégrables, et bornées en vertu du Lemme 1.6 :

$$f \;\in\; L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Introduisons aussi, pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, les fonctions :

$$g_\ell(z) \,:=\, \frac{\Phi_\ell(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Le Lemme 1.9 garantit qu'elles se prolongent holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ de $\{\mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$. De plus, un calcul simple fait voir, pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, que :

$$\begin{aligned} g_\ell(z) \,=\, \frac{\Phi_\ell(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \,&=\, \int_0^\infty e^{-(z+1)\,t}\, \vartheta_\ell\big(e^t\big)\, dt - \int_0^\infty e^{-zt}\, dt \\ &=\, \int_0^\infty \Big(\vartheta_\ell\big(e^t\big)\, e^{-t} - 1\Big)\, e^{-zt}\, dt \\ &=\, \int_0^\infty f_\ell(t)\, e^{-zt}\, dt. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème analytique démontré à la dernière section du chapitre précédent sont vérifiées. En appliquant ce théorème, on conclut bien que pour tous $\ell \wedge q = 1$, les intégrales en question :

$$\begin{aligned} g_\ell(0) \,=\, \int_0^\infty f_\ell(t)\, dt \,&=\, \int_0^\infty \Big(\vartheta_\ell\big(e^t\big)\, e^{-t} - 1\Big)\, dt \\ &=\, \int_1^\infty \frac{\vartheta_\ell(x) - x}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

existent. □

Le dernier énoncé précise ce que cachait la constante C_q du Lemme 1.6.

Lemme 1.11. *Asymptotiquement quand $x \longrightarrow \infty$, on a :*

$$\vartheta_\ell(x) \;\sim\; x \qquad\qquad (\forall\, \ell \wedge q = 1).$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que pour un $\lambda > 1$, il existe une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ avec $x_n \longrightarrow \infty$ telle que :

$$\vartheta_\ell(x_n) \,\geqslant\, \lambda\, x_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Comme ϑ_ℓ croît, pour tout $t \geqslant x_n$, on a $\vartheta_\ell(t) \geqslant \vartheta_\ell(x_n) \geqslant \lambda\, x_n$, ce qui conduit à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$0 \;\underbrace{\longleftarrow}_{\substack{\infty \leftarrow n \\ \text{Lemme 1.10}}}\; \int_{x_n}^{\lambda\, x_n} \frac{\vartheta_\ell(t) - t}{t^2}\, dt \;\geqslant\; \int_{x_n}^{\lambda\, x_n} \frac{\lambda\, x_n - t}{t^2}\, dt \;=\; \int_1^\lambda \frac{\lambda - t}{t^2}\, dt \;>\; 0.$$

De manière similaire, si pour un $\lambda < 1$, avec $x_n \longrightarrow \infty$, on avait $\vartheta_\ell(x_n) \leqslant \lambda\, x_n$ quel que soit $n \geqslant 1$, d'où $\vartheta_\ell(t) \leqslant \vartheta_\ell(x_n) \leqslant \lambda\, x_n$ pour $t \leqslant x_n$, ceci impliquerait aussi contradiction :

$$0 \;\underbrace{\longleftarrow}_{\substack{\infty \leftarrow n \\ \text{Lemme 1.10}}}\; \int_{\lambda\, x_n}^{x_n} \frac{\vartheta_\ell(t) - t}{t^2}\, dt \;\geqslant\; \int_{\lambda\, x_n}^{x_n} \frac{\lambda\, x_n - t}{t^2}\, dt \;=\; \int_\lambda^1 \frac{\lambda - t}{t^2}\, dt \;<\; 0. \qquad \square$$

Fin de la démonstration du Théorème 1.1. Avec $\ell \wedge q = 1$, en partant de l'inégalité (non fine) :

$$\begin{aligned}
\vartheta_\ell(x) &= \varphi(q) \sum_{\substack{\mathscr{P} \ni p \equiv \ell \bmod q \\ p \leqslant x}} \log p \\
&\leqslant \varphi(q) \sum_{\substack{\mathscr{P} \ni p \equiv \ell \bmod q \\ p \leqslant x}} \log x \\
&= \varphi(q)\, \pi\big(x, \ell, q\big) \log x,
\end{aligned}$$

il vient premièrement grâce à l'information cruciale $x \sim \vartheta_\ell(x)$ du Lemme 1.11 :

$$\frac{1}{\varphi(q)} \frac{x}{\log x} \sim \frac{1}{\varphi(q)} \frac{\vartheta_\ell(x)}{\log x} \leqslant \pi\big(x, \ell, q\big).$$

Pour l'inégalité inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit :

$$\begin{aligned}
\vartheta_\ell(x) \geqslant \varphi(q) \sum_{\substack{\mathscr{P} \ni p \equiv \ell \bmod q \\ x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x}} \log p &\geqslant \varphi(q) \sum_{\substack{\mathscr{P} \ni p \equiv \ell \bmod q \\ x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x}} \log x^{1-\varepsilon} \\
&= \varphi(q) \Big[\pi\big(x, \ell, q\big) - \pi\big(x^{1-\varepsilon}, \ell, q\big)\Big] (1-\varepsilon) \log x \\
[-\pi(y, \ell, q) \geqslant -y] \qquad &\geqslant \varphi(q) \Big[\pi\big(x, \ell, q\big) - x^{1-\varepsilon}\Big] (1-\varepsilon) \log x,
\end{aligned}$$

et donc deuxièmement :

$$\frac{1}{\varphi(q)} \frac{x}{\log x} \sim \frac{1}{\varphi(q)} \frac{\vartheta_\ell(x)}{\log x} \geqslant (1-\varepsilon) \Big[\pi\big(x, \ell, q\big) - x^{1-\varepsilon}\Big],$$

et comme $x^{1-\varepsilon}$ est négligeable devant $\frac{x}{\log x}$ lorsque $x \longrightarrow \infty$, ceci conclut. □

2. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

Théorème de Jordan

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Théorème de Jordan différentiable

Soit C une courbe fermée simple dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, au moins deux fois continûment différentiable, *i.e.* de classe $\mathscr{C}^2$. Avec un réel $\mathrm{T} > 0$, elle peut être représentée sous forme paramétrique :

$$\gamma\colon \quad [0,\mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

la condition de fermeture se lisant comme :

$$\gamma(0) \,=\, \gamma(\mathrm{T}),$$

et la condition de simplicité, *alias* d'injectivité, s'exprimant par $\gamma(t') \neq \gamma(t'')$ pour tous $0 \leqslant t' < t'' \leqslant \mathrm{T}$. De plus, les trois applications à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$t \longmapsto \gamma(t), \qquad t \longmapsto \frac{d\gamma}{dt}(t), \qquad t \longmapsto \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t),$$

sont supposées exister et être continues, avec au point de fermeture, pour $k = 0, 1, 2$:

$$\lim_{\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{d^k\gamma}{dt^k}(\varepsilon) \;=\; \lim_{\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{d^k\gamma}{dt^k}(\mathrm{T}-\varepsilon),$$

ce qui signifie qu'au moment où les deux extrémités de la courbe se recollent, tout reste différentiable de classe $\mathscr{C}^2$.

Pour simplifier et pour contrôler sa géométrie par une condition différentielle, la courbe sera supposé de surcroît immersive :

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) \,\neq\, 0 \qquad\qquad (\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}).$$

Il est alors aisé de démontrer que la courbe, image de la paramétrisation :

$$C \,:=\, \gamma\big([0,\mathrm{T}]\big),$$

un sous-ensemble fermé du plan, est difféomorphe $C \cong S^1$ au cercle unité dans le plan :

$$S^1 \,:=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\; x^2 + y^2 = 1\big\}.$$

Cette caractéristique intrinsèque étant acquise, qu'en est-il de la disposition extrinsèque de la courbe dans le plan ? La formulation mathématique d'une vérité à laquelle les bergers font confiance depuis des temps immémoriaux est la suivante.

Théorème 2.1. [de Jordan différentiable] *Le complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash C$ d'une courbe $\mathscr{C}^2$ fermée simple $C = \gamma\big([0, \mathrm{T}]\big)$ — sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ — consiste en exactement 2 composantes connexes :*

$$\mathbb{R}^2 \backslash C \;=\; \mathsf{Int}(C) \cup \mathsf{Ext}(C),$$

la première, intérieure à C, étant bornée et relativement compacte, la seconde, extérieure à C, étant non-bornée allant vers l'infini.

De plus, leurs adhérences respectives valent :

$$\overline{\mathsf{Int}(C)} \;=\; C \cup \mathsf{Int}(C),$$
$$\overline{\mathsf{Ext}(C)} \;=\; C \cup \mathsf{Ext}(C).$$

L'intuition topologique commande de s'interroger sur l'extension en généralité de ce résultat. Il se trouve que le théorème de Jordan demeure vrai lorsque la paramétrisation γ est seulement supposée continue, toujours fermée et simple.

Théorème 2.2. [de Jordan continu] *Pour toute application continue $\gamma\colon [0, \mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\gamma(0) = \gamma(\mathrm{T})$ qui est injective sur $]0, \mathrm{T}]$, le complémentaire :*

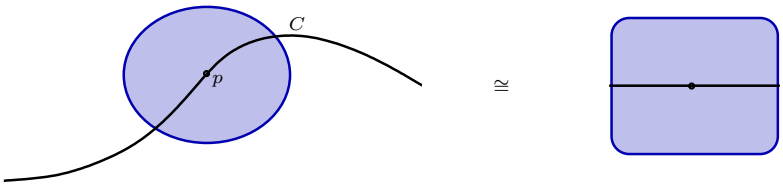
$$\mathbb{R}^2 / \gamma\big([0, \mathrm{T}]\big)$$

consiste exactement en deux ouverts connexes, l'un borné, l'autre non-borné.

L'hypothèse de continuité de γ semble être l'hypothèse minimale adéquate pour que l'énoncé soit vrai, et par une conviction interne presque instantanée, cette hypothèse garantit une saisie intuitive de l'énoncé : périmètre bouclé, barrière sans porosité, délimitation qui se referme. Ce théorème de Jordan continu constitue un test de cohérence globale du concept de la continuité unidimensionnelle inscrit dans un espace continu bidimensionnel.

Toutefois, le niveau de synthèse mathématique qu'exige la considération des courbes qui sont seulement continues se situe très au-delà de l'ontologie du différentiable, à l'œuvre dans le premier théorème.

Le théorème de Jordan topologique, qui sera analysé ultérieurement, possède en effet une structure synthétique beaucoup plus élaborée que le théorème de Jordan différentiable, structure au cours de laquelle va se révéler une imbrication *a priori* imprévisible entre le concept intrinsèque de continuité, et son extension mobile libérée dans un espace extrinsèque.

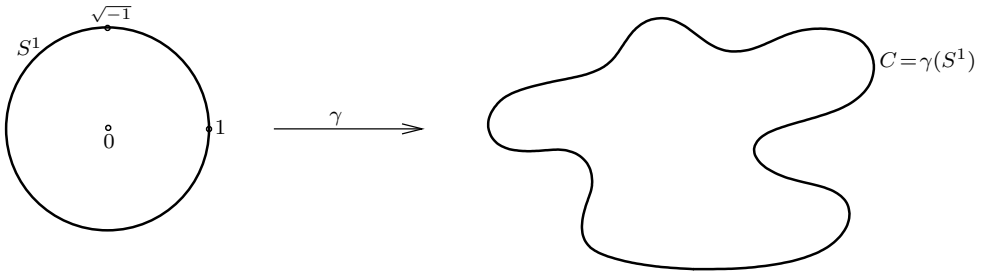


Au contraire, lorsque la courbe fermée simple est supposée différentiable, un contrôle géométrique local de la disposition de l'interne dans l'externe est d'emblée acquis par une telle donation : localement au voisinage de la courbe, il y a séparation patente du complémentaire en deux composantes, puisque toute courbe différentiable est redressable, après difféomorphisme, en un segment de droite.

Le synthétique mathématique étant approfondissement et élévation des raisonnements, soumis à une dialectique imprévisible interrogatrice de vérités en partie invisibles, c'est toute l'unité de l'Être mathématique, distribuée entre Analyse, Géométrie, Topologie, qui

va se jouer dans certaines cristallisations argumentatives qui conduiront à considérer que le théorème de Jordan continu est en accord avec une cohérence globale de ce que sont et doivent être les mathématiques.

Les synthèses qui conduisent à la démonstration complète du théorème de Jordan différentiable ne sont pas immédiates pour autant, et c'est par elles qu'il faut commencer.



De manière équivalente, la courbe fermée simple $C \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^2$ peut être supposée paramétrée par le cercle unité :

$$\mathbb{R} \bmod 2\pi \ \ni \ \theta \ \longmapsto \ \gamma\big(e^{i\theta}\big) \ \in \ C \ \subset \ \mathbb{R}^2,$$

la paramétrisation étant toujours supposée injective et immersive.

En un point $p \in C$, soit $N(p)$ l'un des deux vecteurs normaux unitaires à la courbe. Comme le cercle est orientable, la courbe C est elle aussi orientable, ce qui permet de choisir de manière continue, et même $\mathscr{C}^1$, un vecteur normal en tout point de la courbe :

$$\theta \ \longmapsto \ N\big(\gamma(e^{i\theta})\big),$$

sa norme euclidienne $\| \cdot \|$ étant identiquement égale à 1 :

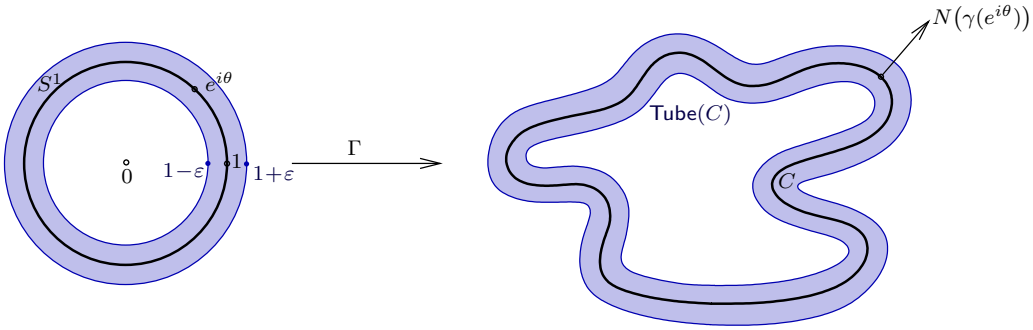
$$\big\| N\big(\gamma(e^{i\theta})\big) \big\| \ = \ 1 \qquad (\forall\, \theta \in \mathbb{R}).$$

En fait, un choix naturel et direct consiste, en partant du vecteur tangent (jamais nul) :

$$\dot{\gamma}(e^{i\theta}) \ := \ \frac{d\gamma}{d\theta}(e^{i\theta}),$$

à le normaliser et à le tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ vu comme le plan d'Argand :

$$N\big(\gamma(e^{i\theta})\big) \ := \ \mathsf{Rotation}_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\dot{\gamma}(e^{i\theta})}{\|\dot{\gamma}(e^{i\theta})\|}\right).$$



Grâce à ce champ de vecteurs partout normaux à la courbe, l'application γ peut s'étendre comme une application :

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \quad S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big(e^{i\theta}, r\big) &\longrightarrow \gamma(e^{i\theta}) + r\, N\big(\gamma(e^{i\theta})\big), \end{aligned}$$

dans laquelle l'insertion d'un 'rayon' r sert à épaissir, ou 'translater', la courbe le long de sa normale.

Proposition 2.3. *Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit pour que Γ soit un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$ sur son image :*

$$\mathsf{Tube}(C) \;:=\; \Gamma\big(S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]\big),$$

voisinage tubulaire de la courbe C dans le plan $\mathbb{R}^2$.

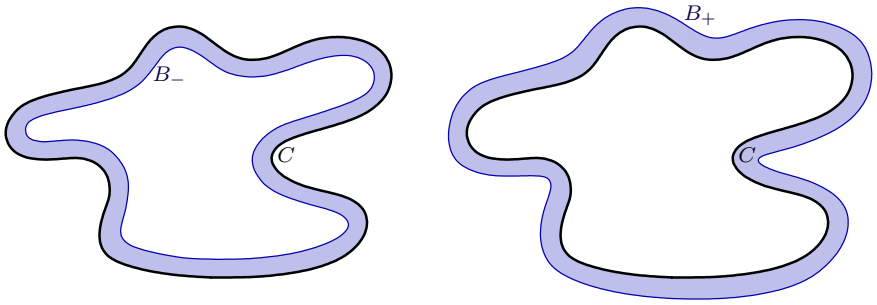
Preuve. En effet, en tout point $\gamma(e^{i\theta})$ de la courbe C, les deux vecteurs de dérivée partielle de l'application Γ dans les directions respectives des deux variables dont elle dépend :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}\big(\Gamma(e^{i\theta}, 0)\big) \;=\; \dot{\gamma}\big(e^{i\theta}\big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial r}\big(\Gamma(e^{i\theta}, 0)\big) \;=\; N\big(\gamma(e^{i\theta})\big)$$

sont linéairement indépendants. Ainsi, le théorème d'inversion locale, allié à la compacité de S^1, permet de conclure. □

Il faut noter que l'hypothèse d'immersivité de la courbe vient d'être fortement utilisée dans cette démonstration : sans elle, Γ n'est pas un difféomorphisme.

Dans l'univers différentiable, ce qui est remarquable, c'est que la géométrie de l'espace externe $\mathbb{R}^2 \backslash C$ est maintenant parfaitement contrôlée au voisinage de C. À travers la représentation donnée par l'application réciproque Γ^{-1}, un petit voisinage de la courbe C dans $\mathbb{R}^2$ possède maintenant une forme topologique très simple et très naturelle : celle d'une bande fine $S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ de part et d'autre d'un cercle unité.



En particulier, puisque cela est immédiatement visible dans le modèle topologique $S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, le voisinage tubulaire $\mathsf{Tube}(C)$ dans $\mathbb{R}^2$ autour de la courbe est séparé par la courbe en exactement deux composantes connexes :

$$\begin{aligned} B_- \;&:=\; \big\{\gamma(e^{i\theta}) + r\, N\big(\gamma(e^{i\theta})\big)\colon\; e^{i\theta} \in S^1,\; -\varepsilon < r < 0\big\}, \\ B_+ \;&:=\; \big\{\gamma(e^{i\theta}) + r\, N\big(\gamma(e^{i\theta})\big)\colon\; e^{i\theta} \in S^1,\; 0 < r < +\varepsilon\big\}, \end{aligned}$$

qui sont des bandes. C'est la première confirmation de cohérence en direction de l'objectif $\mathbb{R}^2 \backslash C = \mathsf{Int}(C) \cup \mathsf{Ext}(C)$.

Toutefois, l'externalité globale à la courbe demeure encore mystérieuse, en question, à étudier, non comprise par ce premier moment argumentatif différentiel.

Pour l'instant, en introduisant toutes les courbes qui correspondent à un 'rayon' r fixé :

$$C_r \,:=\, \big\{\gamma(e^{i\theta}) + r\,N\big(\gamma(e^{i\theta})\big)\colon\, e^{i\theta} \in S^1\big\},$$

le tube se réalise comme réunion de ces courbes :

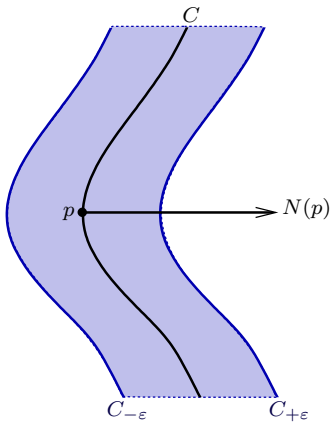
$$\mathsf{Tube}_\varepsilon(C) \,=\, \bigcup_{-\varepsilon<r<\varepsilon} C_r,$$

il contient en son 'cœur' la courbe initiale elle-même :

$$C \,=\, C_0,$$

et son bord consiste en deux courbes extrêmes :

$$\partial\mathsf{Tube}_\varepsilon(C) \,=\, C_{-\varepsilon} \cup C_{+\varepsilon}.$$



Lemme 2.4. *Étant donné un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^2$, toute composante connexe D du complémentaire $\mathbb{R}^2\backslash F$ satisfait :*

$$\partial D \,\subset\, F.$$

Preuve. D'après une définition de topologie générale, le bord de D :

$$\partial D \,:=\, \overline{D}\backslash D$$

est le complémentaire du domaine D dans son adhérence $\overline{D}$, et c'est donc un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

Si au contraire il existait un point $p \in \partial D\backslash F$ qui n'appartenait pas à F, alors comme F est fermé, il existerait un petit disque ouvert non vide $p \in D_p \subset \mathbb{R}^2$ n'intersectant pas F :

$$\emptyset \,=\, D_p \cap F.$$

Puisqu'il existe au moins une suite $(p_n)_{n=1}^\infty$ de points $p_n \in D_p \cap D$ qui tend vers le point au bord $p \in \partial D$, il est clair que $D_p \cap D \neq \emptyset$. Or comme il est bien connu que la réunion de deux ouverts connexes d'intersection non vide constitue encore un ouvert connexe, il se trouve que :

$$D \cup D_p \,\supsetneqq\, D$$

formerait un ouvert connexe plus vaste que D, contredisant l'hypothèse que D est un ouvert connexe maximal de $\mathbb{R}^2\backslash F$. $\square$

Soit maintenant pour ensemble fermé $F := C$ une courbe de Jordan $\mathscr{C}^2$, gainée par deux bandes B_- et B_+ comme ci-dessus.

Lemme 2.5. *Toute composante connexe D de $\mathbb{R}^2 \backslash C$ intersecte B_- ou B_+.*

Preuve. Le lemme qui précède vient de montrer que $\partial D \subset C$, ce qui signifie que toutes les suites $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $q_n \in D$ qui tendent vers ∂D tendent en fait vers C, et comme $B_- \cup C \cup B_+$ forme un voisinage (tubulaire) de C dans $\mathbb{R}^2$, à partir d'un rang n assez grand, tous ces points $q_n \in D \subset \mathbb{R}^2 \backslash C$ sont nécessairement contenus dans $B_- \cup B_+$. □

Corollaire 2.6. *Le complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash C$ consiste en au plus 2 composantes connexes.*

Preuve. En effet, B_- et B_+, difféomorphes à des demi-voisinages du cercle unité S^1 dans $\mathbb{R}^2$, sont manifestement connexes. Soient alors :

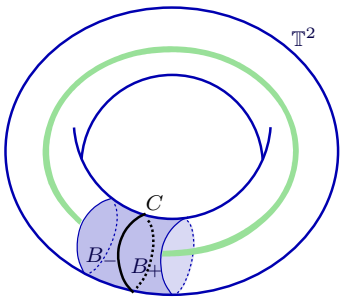
$$\begin{aligned} D_- &:= \text{la composante connexe unique de } \mathbb{R}^2 \backslash C \text{ contenant } B_-, \\ D_+ &:= \text{la composante connexe unique de } \mathbb{R}^2 \backslash C \text{ contenant } B_+, \end{aligned}$$

l'éventualité $D_- = D_+$ étant possible. Il y a donc bien au plus 2 composantes connexes dans $\mathbb{R}^2 \backslash C$. □

Le reste de la démonstration du Théorème 2.1 de Jordan différentiable va consister à *exclure* l'éventualité $D_- = D_+$ que le complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash C$ consiste en une unique composante connexe, ce qui va demander un travail synthétique non négligeable.

Quelque peu paradoxalement, la difficulté de la démonstration du Théorème 2.2 de Jordan continu sera à l'inverse concentrée sur le fait d'exclure l'éventualité que $\mathbb{R}^2 \backslash C$ soit formé d'un nombre $\geqslant 3$ de composantes connexes, vérité qui vient d'être acquise dans le cas différentiable grâce à l'aide précieuse d'un voisinage tubulaire de C.

Exemple 2.7. Lorsque la topologie de l'espace ambiant extrinsèque dans lequel la courbe de Jordan C est plongée n'est pas celle du plan $\mathbb{R}^2$, il est tout à fait possible que $D_- = D_+$.



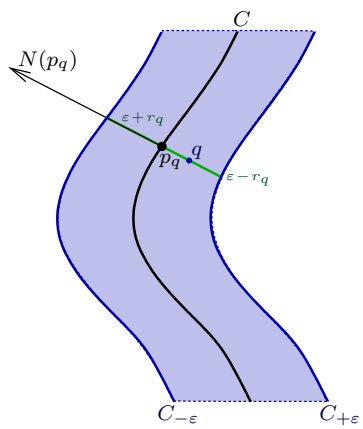
Soit en effet $C :=$ un méridien d'un 2-tore standard $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$, représenté dans $\mathbb{R}^3$ pour une meilleure visualisation. Alors $\mathbb{T}^2 \backslash C$ consiste en une unique composante connexe. □

Il s'agit donc, dans $\mathbb{R}^2$, de démontrer qu'il y a exactement 2 composantes connexes, et non pas 1 seule.

Tout d'abord, sachant que la distance d'un point à un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\mathsf{dist}\,(q, E) := \inf_{r \in E} \|q - r\|,$$

la distance de tout point $q \in \mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ dans le voisinage tubulaire au bord de ce dernier $C_{-\varepsilon} \cup C_{+\varepsilon}$ s'avère être connue. Comme sur la figure, chaque tel point q se projette orthogonalement sur un certain point $p_q \in C$.



Proposition 2.8. *Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, pour tout point $q \in \mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ auquel sont uniquement associés deux paramètres $e^{i\theta_q} \in S^1$ et $r_q \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$ tels que $q = \Gamma\big(e^{i\theta_q}, r_q\big)$, les trois estimations de distances suivantes sont satisfaites.*

- $\mathsf{dist}\,(q, C) = |r_q| = \|q - p_q\|$, *avec le point* $p_q := \Gamma\big(e^{i\theta_q}, 0\big)$.
- $\mathsf{dist}\,(q, C_{-\varepsilon}) = \varepsilon + r_q$.
- $\mathsf{dist}\,(q, C_{+\varepsilon}) = \varepsilon - r_q$. □

La démonstration n'étant pas détaillée, il en découle le

Corollaire 2.9. *La courbe est équidistante des deux composantes du bord du voisinage tubulaire :*

$$C \,=\, \big\{q \in \mathsf{Tube}_\varepsilon(C) \colon\ \mathsf{dist}\,\big(q, C_{-\varepsilon}\big) = \mathsf{dist}\,\big(q, C_{+\varepsilon}\big)\big\}. \qquad \square$$

Pour établir que $\mathbb{R}^2 \backslash C$ consiste en exactement deux composantes connexes, l'idée est de raisonner par contradiction en supposant que $\mathbb{R}^2 \backslash C$ est connexe.

Soit donc un point quelconque de la courbe :

$$p_0 \,=\, \gamma\big(e^{i\theta_0}\big) \,=\, \Gamma\big(e^{i\theta_0}, 0\big),$$

et soient aussi les deux points du bord de $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$:

$$p_-^0 \,:=\, \Gamma\big(e^{i\theta_0}, -\varepsilon\big) \qquad \text{et} \qquad p_+^0 \,:=\, \Gamma\big(e^{i\theta_0}, +\varepsilon\big),$$

qui appartiennent à D_- et à D_+, respectivement.

Or $D_- = D_+$, puisque $\mathbb{R}^2 \backslash C$ est supposé connexe, donc connexe par arcs d'après un résultat connu, et ainsi, il existe une certaine courbe continue :

$$\tau \colon \quad [-1, 1] \,\longrightarrow\, \mathbb{R}^2 \backslash C,$$

qui, sans jamais 'traverser' C, joint ces deux points :

$$\tau(-1) \,=\, p_-^0 \qquad \text{et} \qquad \tau(+1) \,=\, p_+^0.$$

Un argument séduisant, qui utilise Analyse, Topologie, et Géométrie, va consister à regarder la différence des distances :

$$\Delta\big(\tau(s)\big) \,:=\, \mathsf{dist}\,\big(\tau(s), C_{-\varepsilon}\big) - \mathsf{dist}\,\big(\tau(s), C_{+\varepsilon}\big),$$

qui est une fonction continue de $s \in [-1, +1]$, grâce à un lemme classique laissé en exercice.

Lemme 2.10. *Pour tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^2$, la fonction :*

$$\mathbb{R}^2 \ni q \longmapsto \mathsf{dist}\big(q, K\big) \in [0, \infty[$$

est continue. □

En effet, la Proposition 2.8 montre que la valeur au départ est strictement négative :

$$\begin{aligned} \Delta(-1) &= \mathsf{dist}\big(p_-^0, C_{-\varepsilon}\big) - \mathsf{dist}\big(p_-^0, C_{+\varepsilon}\big) \\ &= 0 - 2\,\varepsilon \\ &< 0, \end{aligned}$$

tandis qu'à l'arrivée, elle est strictement positive :

$$\begin{aligned} \Delta(+1) &= \mathsf{dist}\big(p_+^0, C_{-\varepsilon}\big) - \mathsf{dist}\big(p_+^0, C_{+\varepsilon}\big) \\ &= 2\,\varepsilon - 0 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires — Bolzano, naissance de la notion de complétude en Analyse — montre alors que cette fonction $s \longmapsto \Delta\big(\tau(s)\big)$ s'annule nécessairement en au moins un certain 'temps' de parcours :

$$-1 < s_* < +1,$$

ce qui signifie que le point correspondant :

$$q_* := \tau(s_*)$$

se situe à égale distance des deux composantes $C_{-\varepsilon}$ et $C_{+\varepsilon}$ du bord de $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$.

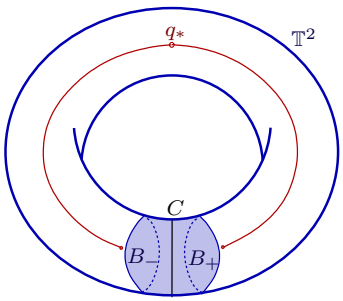
Mais alors, le Corollaire 2.9 semble terminer immédiatement l'argumentation par contradiction, car il semble forcer le point correspondant :

$$\tau(s_*) = q_* \in C$$

à appartenir à la courbe C, en contradiction manifeste avec l'hypothèse que $\tau\big([-1, +1]\big)$ ne rencontre jamais C pour joindre p_-^0 à p_+^0 dans la supposée unique composante connexe de $\mathbb{R}^2 \backslash C$.

Malheureusement, cet argument est erroné, car le point en question $q_* = \tau(s_*)$ n'appartient pas forcément à l'ensemble $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ dans lequel le Corollaire 2.9 est vrai.

Exemple 2.11. D'ailleurs, sur un tore :



des points q_* situés à égale distance de $C_{-\varepsilon}$ et de $C_{+\varepsilon}$ existent manifestement hors du voisinage tubulaire de C. □

En fait, pour l'instant, rien n'a été interrogé, vu, dit, analysé, ou compris, concernant la topologie *globale* de l'espace extrinsèque ambiant :

$$\mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C),$$

a priori encore enveloppé de mystère lorsque la courbe C potentiellement très sinueuse le parcourt. Eu égard à ce contre-exemple sur un tore, la topologie de l'espace total $\mathbb{R}^2$ doit causer, d'une certaine manière, une contradiction qui conclurait cette stratégie de preuve, mais seulement à condition d'approfondir la compréhension du complémentaire *global* $\mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$.

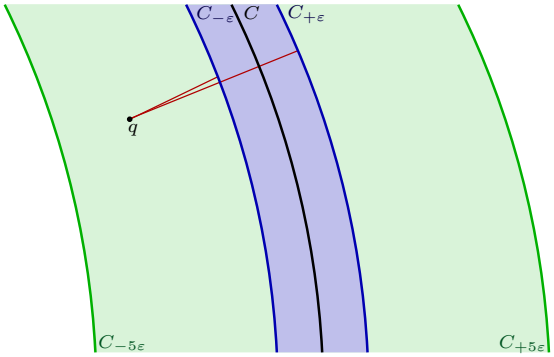
Une observation préliminaire convainc aisément que des points hors de $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ et à égale distance de $C_{-\varepsilon}$ et de $C_{+\varepsilon}$ ne peuvent pas se trouver trop proches de la courbe. Soit en effet $\mathsf{Tube}_{5\varepsilon}(C)$ le tube dilaté d'épaisseur 5ε de part et d'autre de C.

Lemme 2.12. *Quitte à rapetisser $\varepsilon > 0$, en tout point :*

$$q \in \mathsf{Tube}_{5\varepsilon}(C) \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C),$$

la différence des distances au bord est non nulle :

$$0 \neq \Delta(q) = \mathsf{dist}\big(q, C_{-\varepsilon}\big) - \mathsf{dist}\big(q, C_{+\varepsilon}\big).$$



Preuve. En zoom local, si $\varepsilon > 0$ est très petit, les 4 courbes $C_{-5\varepsilon}$, $C_{-\varepsilon}$, $C_{+\varepsilon}$, $C_{+5\varepsilon}$ sont approximativement rectilinéaires, et alors la non-annulation de $\Delta(q)$ est visible comme elle l'est pour une collection de 4 droites parallèles. □

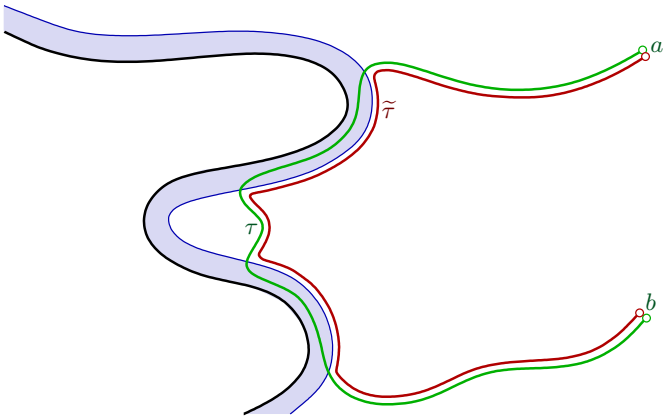
Maintenant, soient généralement deux points :

$$a \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C) \qquad \text{et} \qquad b \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C),$$

par exemple $a = p_-^0$ et $b = p_+^0$ comme ci-dessus, lesquels appartiennent au bord $\partial\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$, donc ne sont pas dans l'ouvert $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$. Soit aussi une courbe continue :

$$\tau\colon \quad [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C),$$

partant de $a = \tau(-1)$ et aboutissant à $b = \tau(1)$.



Affirmation 2.13. *Il est possible de déformer la courbe τ en une courbe continue $\widetilde{\tau}\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ évitant complètement le voisinage tubulaire de la courbe et satisfaisant toujours :*

$$\widetilde{\tau}(1) \,=\, a \qquad \textit{et} \qquad \widetilde{\tau}(-1) \,=\, b. \qquad \square$$

Dans le raisonnement par contradiction qui précède, il reste à examiner la possibilité d'existence d'un point :

$$q_* \,=\, \widetilde{\tau}\big(s_*\big),$$

à égale distance des deux courbes qui composent le bord du voisinage tubulaire :

$$\begin{aligned} 0 \,&\overset{?}{=}\, \Delta(q_*) \\ &=\, \mathsf{dist}\,\big(q_*, C_{-\varepsilon}\big) - \mathsf{dist}\,\big(q, C_{+\varepsilon}\big). \end{aligned}$$

Sans même parler de courbe, la question se pose s'il peut exister un tel point $q_* \in \mathbb{R}^2$ à égale distance de $C_{-\varepsilon}$ et de $C_{+\varepsilon}$, et il va être démontré qu'il n'en existe pas !

Proposition 2.14. [principale] *Il n'existe aucun point :*

$$q_* \,\in\, \mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$$

tel que :

$$\mathsf{dist}\,\big(q_*, C_{-\varepsilon}\big) \,=\, \mathsf{dist}\,\big(q_*, C_{+\varepsilon}\big).$$

Démonstration. Tout d'abord, le Lemme 2.12 force un tel point hypothétique à être hors du voisinage tubulaire épaissi :

$$q_* \,\in\, \mathbb{R}^2 \backslash \mathsf{Tube}_{5\varepsilon}(C).$$

Soit alors le nombre réel strictement positif :

$$\begin{aligned} \rho_* \,&:=\, \mathsf{dist}\,\big(q_*, C_{-\varepsilon}\big) \\ &=\, \mathsf{dist}\,\big(q_*, C_{+\varepsilon}\big), \end{aligned}$$

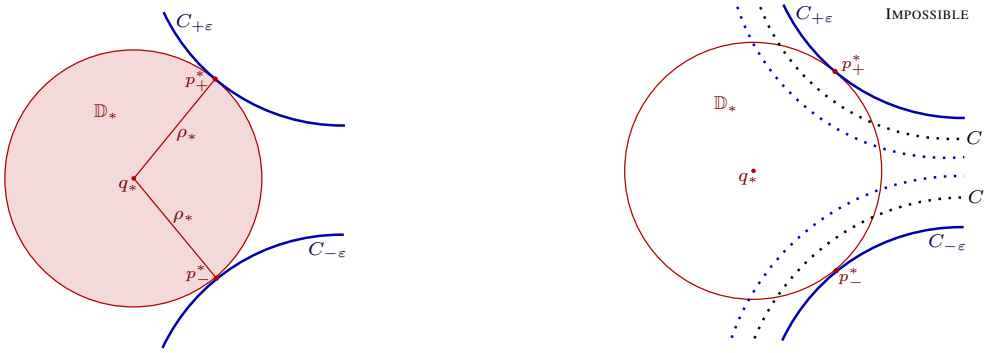
qui satisfait donc $\rho_* \geqslant 5\varepsilon$. Le disque ouvert centré en q_* de rayon ρ_* :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_* \,&:=\, \mathbb{D}_{\rho_*}\big(q_*\big) \\ &=\, \big\{p \in \mathbb{R}^2 \colon\, \|p - q_*\| < \rho_*\big\} \end{aligned}$$

n'intersecte alors ni $C_{-\varepsilon}$, ni $C_{+\varepsilon}$, tandis que son adhérence :

$$\overline{\mathbb{D}}_* \,:=\, \big\{\|p - q_*\| \leqslant \rho_*\big\}$$

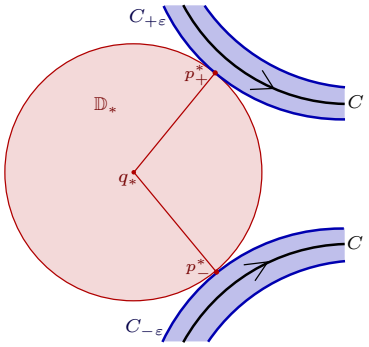
les intersecte. Il importe que ce disque soit de rayon $\rho_* \geqslant 5\varepsilon$ substantiellement supérieur à la largeur 2ε de $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$.



Soit donc un point $p_-^* \in C_{-\varepsilon}$ avec $\|p_-^* - q_*\| = \rho_*$ qui réalise cette distance et soit aussi un autre point $p_+^* \in C_{+\varepsilon}$ avec $\|p_+^* - q_*\| = \rho_*$.

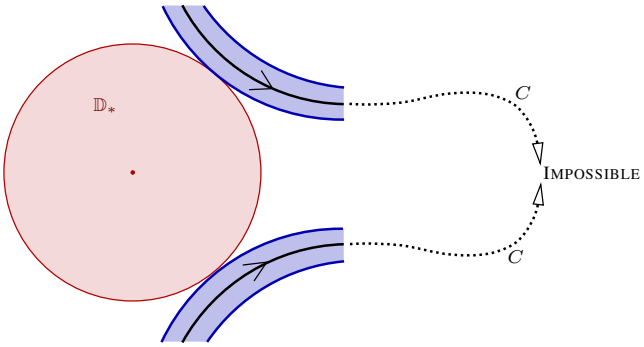
Affirmation 2.15. *Il est impossible que la courbe C rentre dans $\mathbb{D}_*$, en p_-^* ou en p_+^*.*

Preuve. En effet, sinon, comme $\rho_* \geqslant 5\varepsilon$, le voisinage tubulaire rentrerait localement dans une moitié du disque $\mathbb{D}_*$, et la distance de q_* à $C_{-\varepsilon}$ ou à $C_{+\varepsilon}$ serait alors strictement inférieure à ρ_* — elle serait approximativement $\leqslant \rho_* - 2\varepsilon$ —, ce qui contredirait la définition de q_* et de ρ_*. □

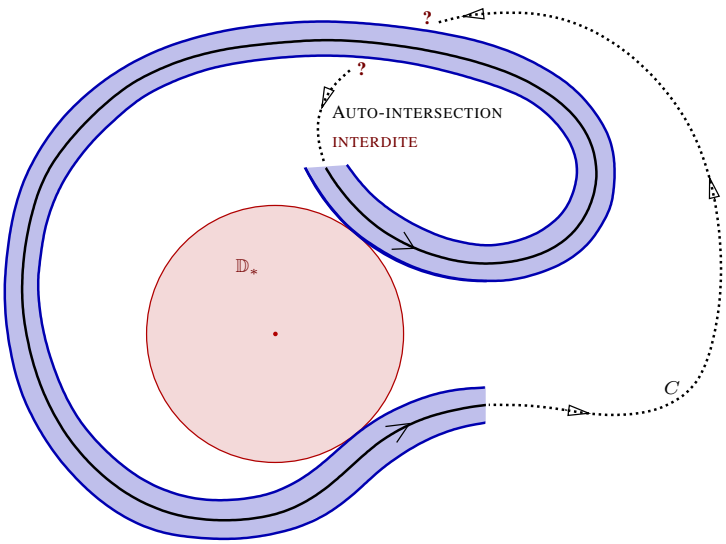


Par conséquent, $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ est hors de $\mathbb{D}_*$ au voisinage de p_-^* et au voisinage de p_+^*, et aussi partout ailleurs, par définition de q_* et de ρ_* :

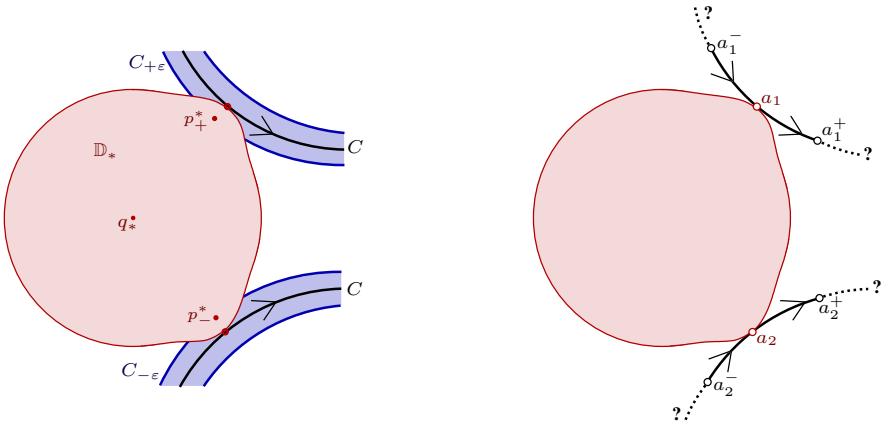
$$\mathsf{Tube}_\varepsilon(C) \subset \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\mathbb{D}}_*.$$



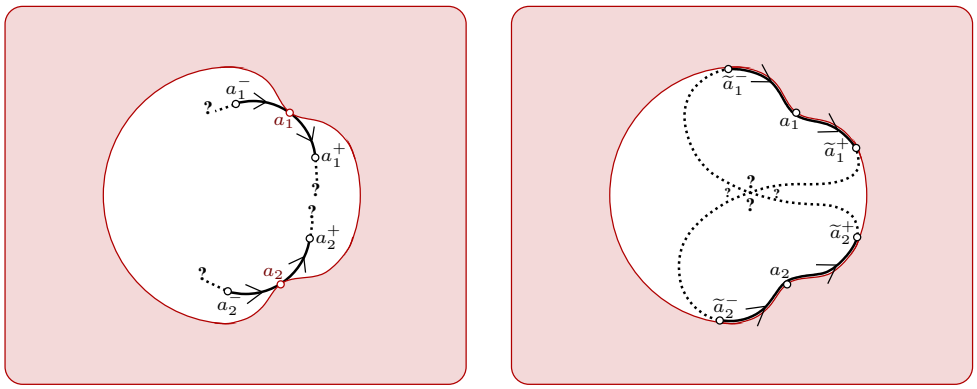
Puisque l'orientation de la courbe doit être comme cela est représenté sur la figure, un premier cas de liaison entre les deux morceaux est manifestement impossible.



Mais un autre cas semble ne pas être exclu au premier abord — à moins que ce cas soit lui aussi impossible, parce qu'il semble devoir forcer la courbe à s'auto-intersecter, ce qui est contraire à l'hypothèse que la courbe est fermée simple (de Jordan).

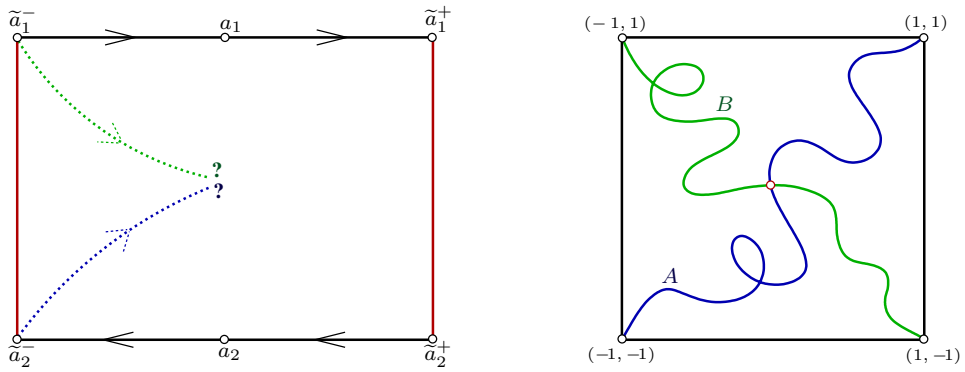


Une légère déformation du disque $\mathbb{D}_*$ amène deux points de contact avec la courbe C elle-même, ce qui permet d'oublier complètement $\mathsf{Tube}_\varepsilon(C)$ ainsi que les deux courbes $C_{-\varepsilon}$ et $C_{+\varepsilon}$ qui composaient son bord.



Après recentrage du disque $\mathbb{D}_*$ en $z = 0$ et utilisation de l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ du plan complexe, la situation géométrique devient celle qui est représentée à gauche ci-dessus, la nouvelle courbe étant entièrement contenue dans un disque légèrement déformé.

Le rabattement contre le bord des deux petits morceaux de courbe est justifié par le caractère lisse de la courbe : aucune auto-intersection n'est produite ainsi.



Topologiquement, la situation est alors celle d'un rectangle ou d'un carré. Les deux parties restantes de la courbe (entre les deux petits morceaux) doivent relier deux paires de points, comme des diagonales dans un carré.

Or grâce à un théorème-clé, cela les force à s'intersecter, ce qui est interdit par hypothèse, et achève le raisonnement par contradiction : q_* n'existe pas !

Théorème 2.16. [des diagonales] *Soient $A = \alpha\big([-1,1]\big)$ et $B = \beta\big([-1,1]\big)$ deux chemins continus contenus dans le carré $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ tels que :*

- *A part en bas à gauche, et arrive en haut à droite :*

$$\alpha(-1) \,=\, (-1,-1) \qquad \text{et} \qquad \alpha(1) \,=\, (1,1);$$

- *B part en haut à gauche, et arrive en bas à droite :*

$$\beta(-1) \,=\, (-1,1) \qquad \text{et} \qquad \beta(1) \,=\, (1,-1).$$

Alors :

$$A \cap B \,=\, \emptyset. \qquad \square$$

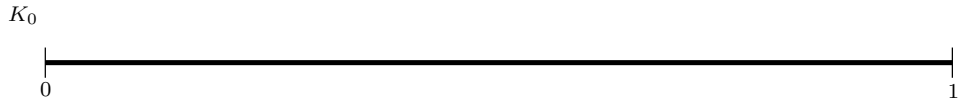
La démonstration sera rédigée dans la prochaine Section **3**.

Tout ceci termine donc les arguments de la démonstration de la Proposition principale 2.14, et, par la même occasion, celle du Théorème 2.1 de Jordan différentiable. $\square$

3. Démonstration du théorème des diagonales

4. Ensemble de Cantor

Pour l'Analyse comme pour la Géométrie, l'*ensemble triadique de Cantor* constitue une source ontologique presque inépuisable à partir de laquelle il est possible de construire d'innombrables exemples. Voici donc la recette de cet ingrédient basique.



Prendre l'intervalle unité dans $\mathbb{R}$:

$$K_0 := [0, 1].$$

Le découper en trois segments d'égale longueur $\frac{1}{3}$, supprimer le morceau central, et conserver seulement les deux morceaux gauche et droite, ce qui donne 2^1 intervalles de longueur $\frac{1}{3}$:

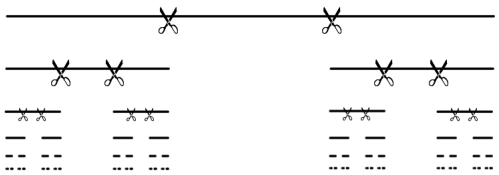
$$K_1 := \left[\frac{0}{3}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$

Couper ensuite à nouveau chacun de ces deux segments $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ en trois segments égaux et supprimer de même le morceau central, ce qui donne $2^2 = 4$ intervalles de longueur $\frac{1}{3^2}$:

$$K_2 := \left[\frac{0}{9}, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right].$$

Couper ensuite à nouveau chacun de ces quatre segments $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ en trois segments égaux et supprimer encore le morceau central, ce qui donne $2^3 = 8$ intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$:

$$K_3 := \left[\frac{0}{27}, \frac{1}{27}\right] \bigcup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \bigcup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \bigcup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \bigcup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \bigcup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \bigcup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \bigcup \left[\frac{26}{27}, \frac{27}{27}\right].$$

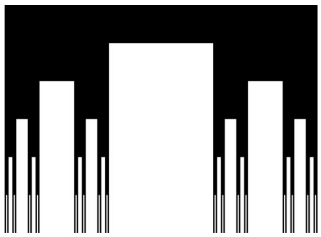


Itérer ces découpages, et obtenir pour tout entier $n \geqslant 0$ un certain sous-ensemble $K_n \subset [0, 1]$ constitué de 2^n intervalles fermés tous de même longueur $\frac{1}{3^n}$:

$$K_n := \left[\frac{0}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \bigcup \cdots\cdots \bigcup \left[\frac{3^n - 3}{3^n}, \frac{3^n - 2}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, \frac{3^n}{3^n}\right].$$

Observer par construction les inclusions :

$$K_{n+1} \subset K_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$



Définition 4.1. L'*ensemble triadique de Cantor* est l'intersection infinie de tous ces K_n :

$$K := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

De nombreux traités d'Analyse mathématique exposent la démonstration du résultat suivant, admis ici sans plus de rappels.

Théorème 4.2. *L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0,1]$ est non vide, fermé, borné, donc compact, et d'intérieur vide :*

$$\mathsf{Int}\, K = \emptyset.$$

De plus, tout élément $x \in K$ s'écrit de manière unique *sous la forme d'un « développement infini en base 3 ne contenant jamais 1 », à savoir sous la forme dite triadique :*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad (a_i = 0, 2),$$

avec des entiers a_i contraints à n'être égaux qu'à 0 ou à 2, mais jamais à 1. Réciproquement, tout tel nombre réel x appartient à K.

Enfin, K est de cardinal non-dénombrable, équipotent à $[0,1]$. □

Clairement, la taille des segments qui restent entre les mains à chaque étape de la découpe diminue indéfiniment jusqu'à ce que ne devenir de la « *poussière d'ensemble* ». Une conceptualisation appropriée de la notion intuitive de taille négligeable est alors la suivante.

Définition 4.3. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit être *de mesure* 0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille *finie* ou *infinie dénombrable* :

$$\big\{I_k\big\}_{k \geqslant 1}$$

d'intervalles ouverts $I_k \subset \mathbb{R}$ telle que :

- $E \subset \bigcup_{k \geqslant 1} I_k$;
- $\sum_{k \geqslant 1} |I_k| \leqslant \varepsilon$, où $|I_k|$ désigne la longueur de l'intervalle I_k.

La première condition demande que la réunion des intervalles recouvre E, et la deuxième condition exprime que cette réunion peut être rendue de longueur totale arbitrairement petite. Dans cette définition, il importe que la famille des I_k soit de cardinal au plus dénombrable. On démontre aisément l'équivalence d'une définition alternative avec des intervalles fermés I_k.

Théorème 4.4. *La somme des longueurs des 2^n segments de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent le sous-ensemble $K_n \supset K$ contenant l'ensemble de Cantor K tend vers 0 :*

$$\frac{2^n}{3^n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

et l'ensemble-limite $K = \cap_n K_n$ est de mesure nulle. $\square$

Une étude approfondie des propriétés géométriques des sous-ensembles de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) requiert souvent une analyse et une estimation de leur « *masse* » qui aille au-delà de ce qui peut être envisagé avec la théorie classique de la mesure due à Borel et à Lebesgue. Ici, la possibilité de dimensions *non-entières*, fractionnaires, égales à un nombre réel quelconque, se fait jour, et une notion associée de mesure l'accompagne. Comment se convaincre qu'une vraie naturalité est à l'œuvre dans cette création conceptuelle ?

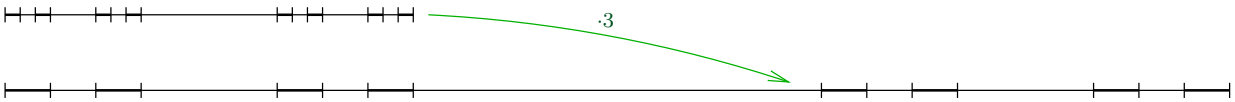
Voici une idée élémentaire qui renforce et raffermit l'intuition mathématique de ce qu'est la dimension d'un objet géométrique, lorsqu'elle est entière. Étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, supposons qu'après l'avoir dilaté un certain nombre entier $n \geqslant 1$ de fois au moyen d'une homothétie, le résultat :

$$n\,E \;=\; E_1 \cup \cdots \cup E_m$$

puisse être re-découpé en un puzzle d'un autre nombre entier $m \geqslant 1$ de pièces, toutes copies congruentes de E lui-même, modulo des déplacements euclidiens (translations et rotations), lesquels préservent évidemment les masses et les mesures.

Par exemple, si $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$ est le segment unité sur la droite réelle, il est évident que $m = n$, tandis que si $E = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ est le carré unité dans le plan euclidien, il vient $m = n^2$, puis $m = n^3$ pour $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$, et généralement $m = n^d$ pour $[0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$. Autrement dit :

$$m \;=\; n^{\dim E}.$$



Or puisque chaque $K_{n+1} \supset K$ dilaté 3 fois se décompose en 2 copies de K_n — exercice visuel, revenir aux illustrations qui précèdent :

$$3\,K_{n+1} \;=\; K_n \cup \big(2 + K_n\big),$$

la première située dans $[0,1]$, la seconde dans le segment $[2,3]$, après passage à la limite pour $n \longrightarrow \infty$, l'ensemble de Cantor $K \subset [0,1]$ satisfait aussi :

$$3\,K \;=\; K \cup \big(2 + K\big),$$

d'où pour lui :

$$n \;=\; 3 \qquad \text{et} \qquad m \;=\; 2.$$

Si donc une dimension devait être attribuée à K via la même équation $m = n^{\dim K}$, à savoir ici :

$$2 \;=\; 3^{\dim K} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \;=\; e^{\dim K \log 3},$$

il viendrait :

$$\dim K \;=\; \frac{\log 2}{\log 3} \;\approx\; 0,\,63093\cdots.$$

Il existe une théorie mathématique standard qui développe l'idée de dimensions intermédiaires : la théorie de la mesure de Hausdorff. Elle débute par l'introduction d'une notion de masse dépendant d'un paramètre réel quelconque. Cette 'mesure' est intimement liée à l'intuition qu'il doit exister des dimensions non-entières.

Plus précisément, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, Hausdorff introduit une quantité $m_\alpha(E)$ qui doit être interprétée comme la 'masse α-dimensionnelle' de E dans l'univers des ensembles de 'dimension' α, où le mot '*dimension*' n'a pour l'instant qu'une signification imprécise à caractère intuitif et programmatique. Ainsi, pour α strictement supérieur à la 'dimension' de E, ce dernier devrait sembler négligeable, et donc sa masse α-dimensionnelle $m_\alpha(E) = 0$ devrait être nulle. À l'inverse, pour α strictement inférieur à la 'dimension' de E, ce dernier devrait sembler comparativement très massif, et donc il devrait satisfaire $m_\alpha(E) = \infty$.

Enfin, lorsque l'exposant $\alpha = \mathsf{Hdim}\, E$ sera égal à la dimension de Hausdorff de E, la quantité $m_\alpha(E)$ devra précisément décrire la masse (mesure) α-dimensionnelle de E.

Avant d'énoncer les définitions mathématiques exactes, il est avisé de revenir à l'ensemble de Cantor $K \subset [0,1]$ ayant pour mesure de Borel-Lebesgue $0 = m(E)$. Naturellement, cette mesure connue $m(\cdot)$ devra correspondre à la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle $m_1(E) = 0$, car le développement d'un concept doit prolonger son extension en cohérence avec les parties du corps mathématique antécédant qui se sont avérées satisfaisantes et incontournables. Or la théorie de Hausdorff va attribuer une dimension fractionnaire spécifique à K, à savoir $\frac{\log 2}{\log 3}$, précisément le nombre réel qui vient de se révéler grâce à des considérations géométriques élémentaires, en spéculant sur la naturalité d'exiger une permanence de la relation fonctionnelle $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}^{\mathsf{Hdim}\, E}$, pour tout nouveau concept de dimension $\mathsf{Hdim}\,(\cdot)$, et pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ possédant une certaine structure auto-similaire.

Définition 4.5. Le *diamètre* d'un sous-ensemble quelconque $F \subset \mathbb{R}^d$ est le nombre :

$$\mathsf{diam}\, F := \sup_{f_1, f_2 \in F} \big\| f_1 - f_2 \big\|,$$

appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0, \infty]$.

Soit donc $\alpha \geqslant 0$ un nombre réel quelconque.

Définition 4.6. La *mesure extérieure α-dimensionnelle de Hausdorff* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est le nombre :

$$m^*_\alpha(E) := \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ >}} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mathsf{diam}\, F_k\big)^\alpha : \ \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \supset E, \ \mathsf{diam}\, F_k \leqslant \delta, \ \forall\, k \right\}$$

appartenant à $[0, \infty]$.

Cette définition quelque peu abrupte appelle plusieurs éclaircissements. Pour tout $\delta > 0$, l'ensemble E est recouvert par une famille *dénombrable* d'ensembles arbitraires F_k tous de diamètres $\leqslant \delta$, et le choix de ces F_k est effectué de manière à *minimiser* la somme totale de leurs masses α-dimensionnelles $(\mathsf{diam}\, F_k)^\alpha$.

Ensuite, $m^*_\alpha(E)$ est défini comme la limite de ces infimums lorsque $\delta \searrow 0$. Or une limite n'est pas toujours censée exister, donc quelque chose vient d'être sous-entendu dans l'énonciation de cette définition.

Afin de mieux décomposer la synthèse de pensée qui a conduit à ce concept $m^*_\alpha(E)$, il est avisé d'introduire les quantités intermédiaires qui apparaissent avant de prendre la $\lim\limits_{\delta \to 0}(\cdot)$:

$$\boldsymbol{H}^\delta_\alpha(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mathsf{diam}\, F_k\big)^\alpha : \ \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \supset E, \ \mathsf{diam}\, F_k \leqslant \delta, \ \forall\, k \right\}.$$

Alors comme tout recouvrement de E par des ensembles F'_k de diamètres $\leqslant \delta'$ avec $0 < \delta' < \delta$ constitue aussi un recouvrement de E par des ensembles de diamètres $\leqslant \delta$, et pour la raison logique triviale qu'un infimum d'une quantité quelconque pris sur un ensemble plus gros $\boldsymbol{T} \supset \boldsymbol{T}'$ ne peut que baisser :

$$\inf_{t' \in T'} \text{Quantité}(t') \ \geqslant \ \inf_{t \in T} \text{Quantité}(t),$$

il est clair que :

$$\boldsymbol{H}_\alpha^{\delta'}(E) \ \geqslant \ \boldsymbol{H}_\alpha^{\delta}(E) \qquad (\forall\, 0 < \delta' < \delta),$$

Autrement dit, la fonction définie sur $]0, \infty[$:

$$\delta \ \longmapsto \ \boldsymbol{H}_\alpha^{\delta}(E)$$

est décroissante, et donc elle possède bien une limite lorsque $\delta \searrow 0$:

$$m_\alpha^*(E) \ = \ \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ >}} \boldsymbol{H}_\alpha^{\delta}(E),$$

ce qui justifie la définition.

Ainsi les $\boldsymbol{H}_\alpha^{\delta}(E)$ *augmentent* lorsque $\delta > 0$ *décroît* vers 0, et en conséquence :

$$m_\alpha^*(E) \ \geqslant \ \boldsymbol{H}_\alpha^{\delta}(E) \qquad (\forall\, 0 < \delta).$$

Dans cette définition de $m_\alpha^*(E)$, il importe d'exiger que le recouvrement soit effectué par des ensembles de diamètres arbitrairement petits.

Observation 4.7. *Tous les nombres $\boldsymbol{H}_\alpha^{\delta}(E)$ appartiennent à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0, \infty]$, l'infini étant admis, et donc :*

$$0 \ \leqslant \ m_\alpha^*(E) \ \leqslant \ \infty.$$

Quelques propriétés fondamentales de la mesure extérieure α-dimensionnelle $m_\alpha^*(\cdot)$ peuvent maintenant être exposées sans démonstration.

• **Monotonie.** *Si $E_1 \subset E_2$, alors $m_\alpha^*(E_1) \leqslant m_\alpha^*(E_2)$.* □

• **Sous-additivité dénombrable.** *Pour toute famille dénombrable $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ de sous-ensembles $E_j \subset \mathbb{R}^d$:*

$$m_\alpha^*\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) \ \leqslant \ \sum_{j=1}^\infty m_\alpha^*(E_j). \qquad \square$$

• **Séparation.** *Si* dist $(E_1, E_2) > 0$, *alors :*

$$m_\alpha^*\big(E_1 \cup E_2\big) \ = \ m_\alpha^*\big(E_1\big) + m_\alpha^*\big(E_2\big). \qquad \square$$

Ces trois propriétés montrent notamment que m_α^* remplit les conditions de la théorie générale de la mesure due à Carathéodory. Grâce à cette théorie, la retriction de $m_\alpha^*(\cdot)$ aux sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}^d$ (qui incorporent l'ensemble de Cantor) est une vraie mesure dénombrablement additive, qui sera notée $m_\alpha(\cdot)$.

Terminologie 4.8. La mesure :

$$m_\alpha \ := \ m_\alpha^*\big|_{\text{sous-ensembles boréliens de } \mathbb{R}^d}$$

est appelée *mesure de Hausdorff α-dimensionnelle.*

Un résultat élémentaire de la théorie montre que

Lemme 4.9. *Dans $\mathbb{R}^d$, la mesure de Haussdorf d-dimensionnelle coïncide avec la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle.* □

À présent, voici un énoncé qui réalise une des intuitions initialement anticipées.

Proposition 4.10. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble quelconque.*

- *Si $0 < m^*_\alpha(E) \leqslant \infty$ pour un réel α, alors $m^*_\beta(E) = \infty$ quel que soit $\beta < \alpha$.*
- *Si $m^*_\alpha(E) < \infty$ pour un réel α, alors $m^*_\beta(E) = 0$ quel que soit $\beta > \alpha$.* □

Lorsque $0 \leqslant \alpha < \infty$ croît continûment pour décrire tous les nombres réels, cette proposition exprime que la 'masse α-pesée' $m^*_\alpha(E)$ reste constamment égale à ∞, jusqu'à ce qu'en un unique seuil $\alpha = \alpha_E$, elle s'effondre brutalement pour valoir 0 :

$$m^*_\beta(E) \,=\, \begin{cases} \infty & \text{lorsque } \beta < \alpha_E, \\ 0 & \text{lorsque } \beta > \alpha_E. \end{cases}$$

Ainsi, α_E est un candidat idéal pour interpréter un concept général de dimension, non forcément entière.

Définition 4.11. La *dimension de Hausdorff* d'un sous-ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}^d$ est le nombre défini de manière unique :

$$\begin{aligned} \alpha_E \,&:=\, \mathsf{sup}\,\big\{\beta\colon\, m_\beta(E) = \infty\big\}, \\ &=\, \mathsf{inf}\,\big\{\gamma\colon\, m_\gamma(E) = 0\big\}, \end{aligned}$$

noté aussi :

$$\mathsf{Hdim}\, E.$$

La plupart du temps, calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble spécifique est un problème mathématique délicat. Toutefois, dans certaines circonstances, en bénéficiant de la présence de structures auto-similaires, le calcul de α_E s'avère accessible grâce à des arguments mathématiques qui sont parfois élaborés.

En fait, lorsque $\alpha = \alpha_E$, la théorie générale ne peut pas prévoir la valeur de $m_{\alpha_E}(E)$, elle sait seulement dire que :

$$0 \,\leqslant\, m_{\alpha_E}(E) \,\leqslant\, \infty.$$

Lorsque $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble borné, et lorsque :

$$0 \,<\, m_{\alpha_E}(E) \,<\, \infty,$$

l'ensemble E est dit être de *dimension de Hausdorff stricte* α_E.

Le résultat suivant conclut cette brève excursion dans les théories de la mesure.

Théorème 4.12. *L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0,1]$ a pour dimension de Hausdorff stricte :*

$$\mathsf{Hdim}\, K \,=\, \frac{\mathsf{log}\, 2}{\mathsf{log}\, 3}. \qquad \square$$

Ce résultat va permettre d'exhiber comment l'Analyse peut déployer de manière troublante l'ontologie qui lui est propre pour déranger l'idée épurée que la Géométrie se fait d'elle-même. L'exploration indéfinie des liaisons multiples que les domaines des mathématiques entretiennent potentiellement entre eux provoque en effet des rebondissements ontologiques qui se manifestent lors d'approfondissements de la compréhension d'une unité mathématique en devenir.

5. Courbe de Jordan-Cantor-Osgood

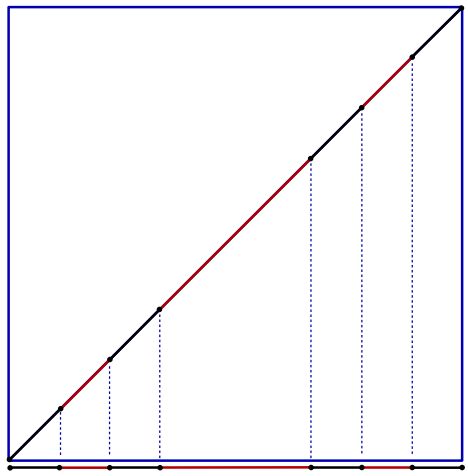
Une courbe de Jordan peut être très éloignée de l'idée 'naïve' de courbe qui est transmise par une fréquentation régulière de la géométrie euclidienne.

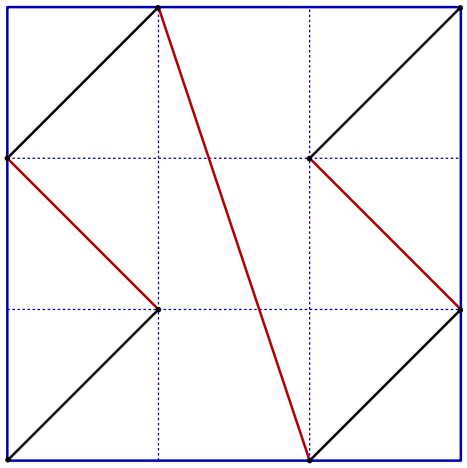
Définition 5.1. Une *courbe d'Osgood* est une courbe de Jordan (fermée simple) $\gamma\colon [0, \mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont l'image $C := \gamma\big([0, \mathrm{T}]\big)$ est de mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle strictement positive :

$$0 < m_2\big(C\big).$$

L'objectif de cette section est de dévoiler leur existence paradoxale. Dans un premier moment, une construction qui étire et entortille l'ensemble de Cantor unidimensionnel dans le plan bidimensionnel va fournir une courbe 'pathologique' dont la dimension de Hausdorff est strictement supérieure à 1, ce qui contredira fortement l'intuition qu'une courbe doit *a priori* être un objet unidimensionnel. Dans un deuxième moment, une accentuation de cette première construction va produire une courbe de mesure 2-dimensionnelle > 0, donc de dimension de Hausdorff maximale possible égale à 2, toujours sans aucune auto-intersection.

Soit le carré fermé $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ de côté 1 et soit sa diagonale ascendante. Soit aussi la collection $K_2 \subset [0, 1]$ des quatre segments qui apparaissaient à la deuxième étape de la construction de l'ensemble de Cantor. Ces quatre segments fermés (en noir), ainsi que les trois segments ouverts qui les séparent (en rouge), se relèvent à la diagonale.

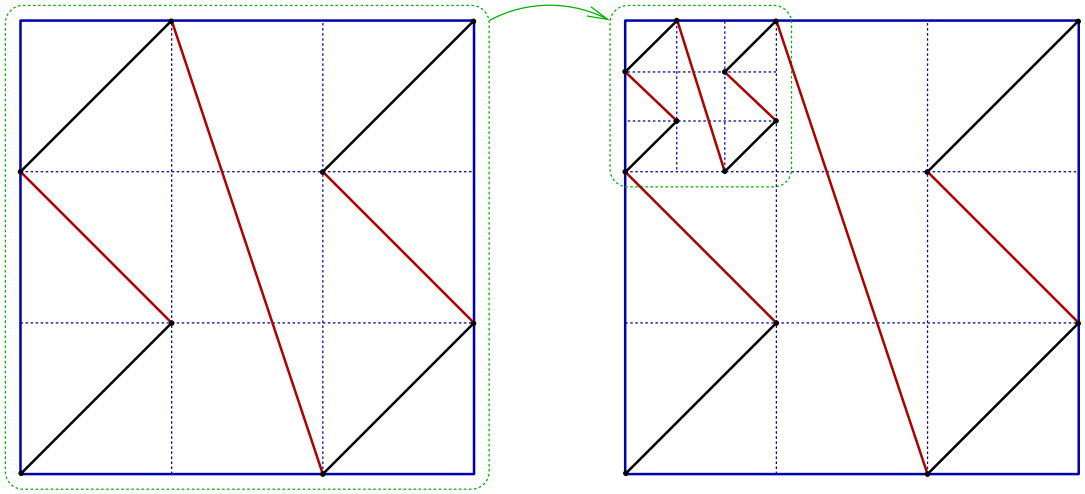




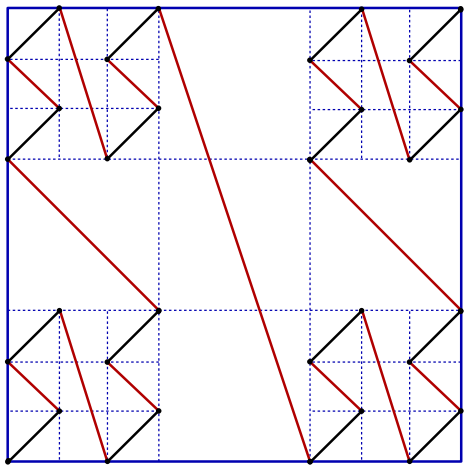
Une application de cette diagonale dans le même carré $[0, 1]^2$ découpé en $3^2 = 9$ sous-carrés égaux envoie alors les $4 + 3$ morceaux de cette diagonale comme cela est représenté sur le diagramme. Visiblement, la courbe obtenue est continue — il est d'ailleurs inutile d'en écrire l'expression analytique.

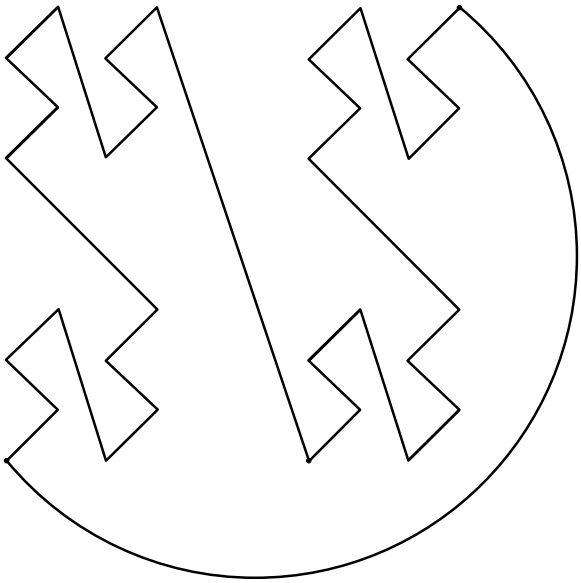
Géométriquement, la diagonale ascendante simple à gauche est remplacée par une certaine courbe-serpent à droite, dont les 4 segments noirs sont ascendants, tandis que ses 3 segments rouges sont descendants, et resteront inchangés.

L'étape suivante consiste à remplacer une partie ascendante par une copie complète rapetissée du motif.



La courbe obtenue est encore continue, et sans auto-intersection. Ensuite, les trois parties ascendantes restantes sont elles aussi remplacées par une copie complète rapetissée du motif.

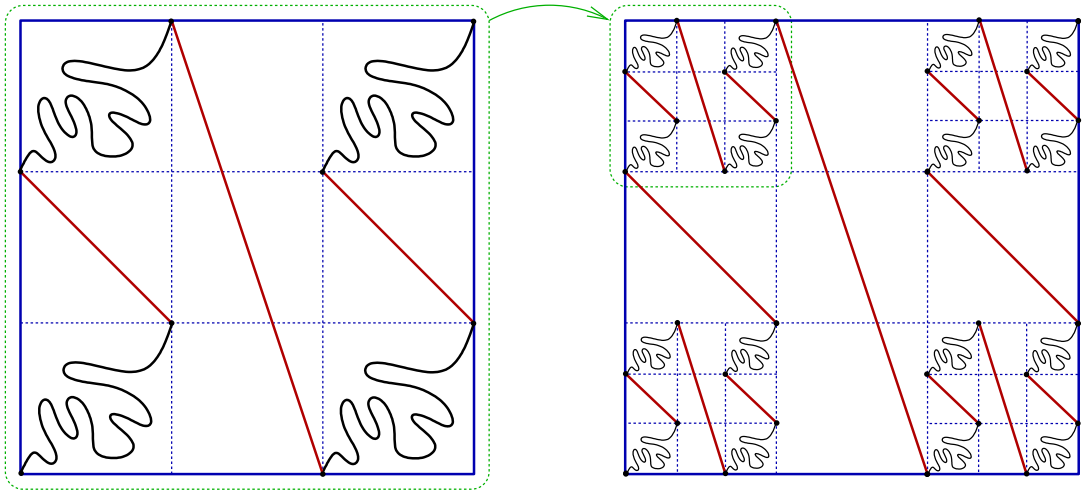




Le résultat obtenu est encore une courbe continue sans auto-intersection qui va toujours du côté inférieur gauche du carré à son côté supérieur droit.

Pour terminer, un arc de cercle approprié extérieur au carré ferme cet arc de Jordan en une vraie courbe fermée simple de Jordan.

Dans ce processus, toute autre arc de Jordan simple peut être utilisé pour remplacer les 4 diagonales. Toutefois, cette flexibilité ne sera pas exploitée.



Évidemment, cette construction s'itère à l'infini. Toute partie de la courbe qui est rouge à partir d'un certain moment du processus demeure inchangée par la suite. Ainsi les parties rouges sont des segments de droite, sans mystère, sans complexité locale.

Au contraire, les parties noires se complexifient indéfiniment, sur des diagonales qui se rapetissent, et ont toujours des projections horizontale (basse) et verticale (gauche) qui sont les étapes intermédiaires $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de l'ensemble triadique de Cantor $K = \cap_n K_n$.

À la fin du processus infini, l'application initiale de $[0,1]$ dans la première diagonale, qui a été ensuite étirée et localement entortillée un nombre infini de fois, devient une honnête courbe continue :

$$\gamma\colon \quad [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1],$$

partant du coin inférieur gauche du carré unité et allant à son coin supérieur droit :

$$\gamma(0) = (0,0) \qquad \text{et} \qquad \gamma(1) = (1,1).$$

De plus, son image $\gamma([0,1])$ est un arc de Jordan, *i.e.* sans auto-intersection. Enfin, la fermeture de cet arc au moyen d'une concaténation avec un arc de cercle auxiliaire $\gamma\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ comme illustré ci-dessus produit une certaine courbe de Jordan :

$$\gamma\colon \quad [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

continue, fermée, simple, *i.e.* sans auto-intersection. Et tout a été prévu pour que l'énoncé suivant soit vrai.

Proposition 5.2. *Après un nombre infini d'étapes, la courbe obtenue est une courbe de Jordan continue qui contient :*

$$C := \gamma\big([0,2]\big) \supset \gamma\big([0,1]\big) \supset K \times K$$

le produit de l'ensemble triadique de Cantor K par lui-même. □

Or la théorie de la mesure de Hausdorff montre généralement que le produit $E_1 \times E_2$ de deux sous-ensembles boréliens quelconques :

$$E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$$

a pour dimension de Hausdorff la somme de leurs dimensions respectives :

$$\mathsf{Hdim}\,\big(E_1 \times E_2\big) = \mathsf{Hdim}\,E_1 + \mathsf{Hdim}\,E_2.$$

Un examen attentif montre que les parties rouges rémanentes de la courbe ne contribuent, au sens des recouvrements de Hausdorff, que de manière 1-dimensionnelle négligeable, et donc en fait, c'est seulement autour du produit $K \times K$ que la courbe concentre sa masse maximale, bien au-delà d'une masse unidimensionnelle.

Corollaire 5.3. *La dimension de Hausdorff de* $C = \gamma\big([0,2]\big)$ *vaut :*

$$\begin{aligned} \mathsf{Hdim}\,(C) &= \mathsf{Hdim}(K) + \mathsf{Hdim}(K) \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{\log 2}{\log 3} \approx 1,26186\cdots . \end{aligned}$$

□

Tel est le premier exemple de courbe de Jordan continue dans le plan dont la complexité semble contredire l'essence géométrique idéale de la notion de courbe.

Même s'il est essentiellement évident par construction que cette courbe satisfait bien le Théorème 2.2 de Jordan continu (exercice), il n'en reste pas moins que l'existence de telles courbes vraiment non-unidimensionnelles montre, d'un point de vue dialectique général, que la lutte synthétique pour atteindre une démonstration rigoureuse complète dudit théorème va devoir, d'une manière absolument incontournable, tenir compte d'une liberté presque incontrôlable d'entortillement, à peine entrevue par cette construction pathologique finalement assez régulière et probablement très restreinte par rapport à toute la complexité invisible éventuelle qu'elle commence à suggérer à une intuition exploratrice.

Tout au contraire, le théorème de Jordan différentiable n'éprouvait nullement un tel obstacle dialectique, puisque pour lui, grâce à un redressement local par difféomorphisme, l'espace autour d'une portion de la courbe est toujours parfaitement découpé en deux morceaux de demi-espaces.

Alors rétrospectivement, une question embarrassante surgit.

Question 5.4. Le théorème de Jordan continu est-il une généralisation trop ambitieuse du théorème de Jordan différentiable ? Est-il en fait faux ?

En mathématiques, que ce soit pour la recherche ou pour l'appropriation de contenus stabilisés, la perspective sur ce qui est vrai demeure constamment dialectique, car à chaque instant, l'intuition et la compréhension interrogent. L'activité mentale du mathématicien est particulièrement intense.

En poursuite de ce moment dialectique, la construction d'une courbe $C \supset K \times K$ peut être modifiée pour accentuer son caractère paradoxal. En partant du segment unité $K_0 = [0,1]$, au lieu de la découpe triadique standard $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, il est possible à chaque étape d'ajuster la petitesse des trous percés au centre de tous les intervalles de manière à obtenir à la fin un ensemble de Cantor « *gras* », *i.e.* dont la mesure de Lebesgue (de Hausdorff) 1-dimensionnelle soit strictement positive.

En effet, soit un nombre réel $0 < c_1 < \frac{1}{2}$, et soit même une suite infinie :

$$c := \big(c_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

de nombres réels $0 < c_n < \frac{1}{2}$, à choisir ultérieurement. Au lieu de l'ensemble équilibré K_1 introduit précédemment, soit :

$$K_1(c) := \big[0, c_1\big] \cup \big[1 - c_1, 1\big],$$

qui correspond à :

$$1 = c_1 + (1 - 2\,c_1) + c_1.$$

Ainsi, deux parties de longueur c_1 restent, tandis qu'un intervalle de longueur $1 - 2\,c_1$ a été excisé au centre. L'ensemble K_1 correspond à $c_1 = \frac{1}{3}$.

Ensuite, il s'agit de re-découper chacun de ces 2 segments $[0, c_1]$ et $[1 - c_1, 1]$ au moyen d'une *autre* proportion $0 < c_2 < \frac{1}{2}$, et en renormalisant les longueurs à travers une équivalence $[0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, c_1]$ simplement obtenue par multiplication par c_1 :

$$c_1 \cdot \Big(1 \,=\, c_2 + (1 - 2c_2) + c_2\Big),$$

équation qui s'écrit :

$$c_1 \,=\, c_1 c_2 + \big(c_1 - 2\,c_1 c_2\big) + c_1 c_2,$$

il vient :

$$K_2(c) \,=\, \big[0, c_1 c_2\big] \cup \big[c_1 - c_1 c_2\big] \bigcup \big[1 - c_1, 1 - c_1 + c_1 c_2\big] \cup \big[1 - c_1 - c_1 c_2, 1\big].$$

Ici, la notation $K_2(c)$ vise à indiquer la dépendance en la suite $c = (c_n)_{n=1}^{\infty}$. Ainsi, $K_2(c)$ consiste en $2^2 = 4$ intervalles fermés, tous de même longueur $c_1 c_2$

Généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble $K_n(c)$ contient alors 2^n intervalles fermés de longueur $c_1 \cdots c_n$, qui peuvent être notés :

$$\boldsymbol{I}_{n,k} \,:=\, \big[x_{n,k},\, x_{n,k} + c_1 \cdots c_n\big] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant k \leqslant 2^n)},$$

et par une récurrence aisée :

$$K_{n+1}(c) \,:=\, \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} \Big(\big[x_{n,k},\, x_{n,k} + c_1 \cdots c_n c_{n+1}\big] \bigcup \big[x_{n,k} + c_1 \cdots c_n - c_1 \cdots c_n c_{n+1},\, x_{n,k} + c_1 \cdots c_n\big]\Big).$$

Ensuite, avec un nombre réel $0 < z < \frac{1}{2}$ fixé, soit le choix spécifique :

$$c_n \,:=\, \tfrac{1}{2} - z^n \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1)}.$$

Le cas $z = 0$, qui dégénère en $K_n(c) = [0, 1]$ pour tout $n \geqslant 1$, est à exclure.

Comme pour l'ensemble triadique standard de Cantor, soit enfin :

$$K(c) \,:=\, \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(c).$$

Assertion 5.5. *Alors la mesure de Borel-Lebesgue* 1*-dimensionnelle de* $K(c)$ *est strictement positive et vaut :*

$$m_1\big(K(c)\big) \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - 2\,z^n\big). \qquad \square$$

L'argument de preuve, laissé en exercice, peut d'ailleurs être capturé instantanément par visualisation mentale de la géométrie d'excision inductive $K_n(c) \longmapsto K_{n+1}(c)$ qui correspond à la multiplication par un $(n+1)$-ième facteur $\big(1 - 2\,z^{n+1}\big)$.

Comme fonction de $z \in [0, \frac{1}{2}]$, ce produit infini :

$$\mathrm{P}(z) \,:=\, \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - 2\,z^n\big),$$

est continu, décroissant, et prend aux extrémités de son intervalle de définition les valeurs :

$$\mathrm{P}(0) \,=\, 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}\big(\tfrac{1}{2}\big) \,=\, 0.$$

Une application instantanée du théorème des valeurs intermédiaires donne alors :

Lemme 5.6. *Pour tout nombre réel* $0 < \alpha < 1$*, il existe un réel unique* $z = z(\alpha)$ *avec* $0 < z(\alpha) < \frac{1}{2}$ *tel que :*

$$\mathrm{P}\big(z(\alpha)\big) = \alpha. \qquad \square$$

En revenant à la construction géométrique qui précède et qui vient d'être illustrée avec l'aide de plusieurs diagrammes, il faut donc s'imaginer que les proportions de découpe des $3^2 = 9$ carrés *varient* à chaque étape, et que les parties noires de la courbe tendent, lorsque $n \longrightarrow \infty$, vers le produit $K(c) \times K(c)$ de l'ensemble « *engraissé* » de Cantor.

Au final, il existe un arc de Jordan :

$$A := \gamma\big([0,1]\big),$$

qui satisfaisant :

$$A \supset K(c) \times K(c).$$

Alors la théorie de la mesure 2-dimensionnelle de Lebesgue, à savoir plus précisément le théorème de Fubini, montre, par multiplicativité, que :

$$\begin{aligned} m_2(A) &= m_2\big(K(c) \times K(c)\big) \\ &= m_1\big(K(c)\big) \cdot m_1\big(K(c)\big) \\ &= \alpha \cdot \alpha \\ &> 0. \end{aligned}$$

Puisque l'application $\alpha \longmapsto \alpha\alpha =: a$ de $]0,1[$ à valeurs dans lui-même est une bijection, le résultat final établit l'existence promise d'arcs de Jordan-Osgood.

Théorème 5.7. *Pour tout nombre réel* $0 < a < 1$*, il existe un arc de Jordan* $A \subset [0,1]^2$ *dans le carré unité qui est de mesure* 2*-dimensionnelle :*

$$a = m_2(A)$$

arbitrairement proche de :

$$1^2 = m_2\big([0,1]^2\big). \qquad \square$$

Pour conclure, un arc de cercle externe au carré unité ferme cet arc de Jordan en une vraie courbe de Jordan.

Ainsi, la démonstration du Théorème 2.2 de Jordan va devoir tenir compte du fait que les courbes continues générales peuvent être très « *grasses* » au sens de la théorie de la mesure. Même si cette éventualité ne sera pas explicitement thématisée dans la démonstration, elle interviendra dans les dialectiques internalisées d'inventions de preuves.

6. Démonstration du théorème de Jordan continu

Pour mémoire, revoici son énoncé.

Théorème 6.1. *Pour toute courbe de Jordan continue* $C \subset \mathbb{R}^2$*, le complémentaire* $\mathbb{R}^2 \backslash C$ *est constitué de deux composantes connexes, l'une bornée notée* $\mathsf{Int}(C)$ *et appelée intérieur de* C*, l'autre non-bornée* $\mathsf{Ext}(C)$*, qui est l'extérieur de* C*.*

De plus, C *est leur frontière commune :*

$$C = \partial\mathsf{Int}(C) = \partial\mathsf{Ext}(C),$$

de sorte que :

$$\overline{\mathsf{Int}(C)} = C \cup \mathsf{Int}\, C \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathsf{Ext}(C)} = C \cup \mathsf{Ext}(C).$$

7. Appendices

Appendice 1. AA

Appendice 2. AA

RÉFÉRENCES

1. LE DIMET, J.Y. : *Le plan, la sphère et le théorème de Jordan*, Ellipses, Paris, 2012, 144 pp.

Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \omega$, et soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\omega \backslash \{z_0\})$ holomorphe en-dehors de z_0. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0, au sens où il existe un rayon $r > 0$ assez petit avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \omega$ et il existe une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\sup_{\substack{|z-z_0|<r \\ z \neq z_0}} \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}.$$

On fixe $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)$ avec $z_1 \neq z_0$.

(a) Dresser une figure illustrative complète et esthétique.

(b) Montrer, pour $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,|z_1 - z_0|$, que pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, on a $|\zeta - z_1| \geqslant \frac{1}{2}\,|z_1 - z_0|$.

(c) Montrer que :

$$0 = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(d) Soient les deux points :

$$\zeta_1 := z_0 + r\,\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|},$$
$$\zeta_0 := z_0 - r\,\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0}.$$

Soient aussi deux quantités petites $0 < \delta < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}\,|z_1 - z_0|$. On construit le contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ à *deux* trous de serrure de largeur 2δ qui partent orthogonalement du cercle $C_r(z_0)$ en les deux points ζ_1 et ζ_0, avec contournement de z_1 puis de z_0 le long de cercles de rayon ε.

Dresser une nouvelle figure esthétique dans laquelle tous ces éléments apparaissent clairement — couleurs recommandées !

(e) Justifier par un théorème du cours que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(f) Montrer que :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(g) Montrer que :

$$f(z_1) \,=\, \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(h) Justifier l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction :

$$z \,\longmapsto\, \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(i) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\omega)$ telle que $\widetilde{f}\big|_{\omega\setminus\{z_0\}} = f$.

(j) Montrer que tout ce qui précède est encore valable en supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leqslant \alpha < 1$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \,\leqslant\, \mathrm{M}\,\frac{1}{|z - z_0|^{\alpha}} \qquad\qquad (\forall\, 0 < |z - z_0| < r).$$

Exercice 2. Soit un nombre réel $a > 0$. L'objectif est de calculer, au moyen de la méthode des résidus, les deux intégrales de Riemann généralisées :

$$I \,:=\, \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad J \,:=\, \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

(a) Commencer par justifier l'existence de I.

(b) On introduit la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$. Calculer $\mathsf{Res}_f(i\,a)$.

(c) Avec $\mathrm{R} > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(d) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{d\,(\mathrm{R}\, e^{i\theta})}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2}.$$

(e) Montrer que :

$$I \,=\, \frac{\pi}{2\,a}.$$

(f) On choisit la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \setminus i\,\mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\,\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C}\setminus i\,\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) \,:=\, \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $\mathrm{R} > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, \mathrm{R}]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(g) Montrer que :

$$J \,=\, \frac{\pi}{2\,a}\,\log a.$$

Indication: Calculer d'abord $\mathsf{Res}_g(i\,a)$ en utilisant la valeur de $\log i$, que l'on déterminera auparavant.

Exercice 3. Dans un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ (continue) $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ fermée $\gamma(0) = \gamma(1)$ que l'on identifie $\gamma \equiv \gamma\big([0,1]\big)$ à son image, on définit l'*indice* de tout point $w \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ par rapport à γ par l'intégrale :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \,:=\, \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

(a) Avec $\Omega := \mathbb{C}$, en utilisant deux couleurs différentes, tracer une courbe qui tourne -2 fois autour de 0, puis une autre qui tourne $+3$ fois.

(b) On introduit, pour $t \in [0,1]$, la fonction :

$$\Phi(t) \,:=\, \mathsf{exp}\bigg(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}\,ds\bigg).$$

Calculer la dérivée de $t \longmapsto \frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}$ sur $[0,1]$.

(c) Montrer que :

$$\Phi(t) \,=\, \frac{\gamma(t)-w}{\gamma(0)-w} \qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

(d) Montrer que :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \,\in\, \mathbb{Z}.$$

(e) On suppose dorénavant que l'ouvert connexe Ω est de plus *simplement connexe*. D'après le cours, si $w \in \Omega$ est un point de référence fixé, cela implique que deux courbes $\gamma_0\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_1\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ quelconques $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ (continues) allant de $w = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ à un autre point quelconque $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z \in \Omega$ sont toujours *homotopes* à travers une famille continue $\big\{t \longmapsto \gamma_s(t)\big\}_{s\in[0,1]}$ de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *toutes contenues dans* Ω.

Justifier alors que toute fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ possède une *primitive* $G \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $G' = g$.

(f) Justifier que pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :

$$0 \,=\, \int_\gamma g(z)\,dz \qquad (\forall\, g \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Maintenant, soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \Omega$, soit $w \in \omega$ et soit un rayon $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w) \subset \omega$. Toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{w\}\big)$ en-dehors de w se développe alors en série de Laurent :

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\big(z-w\big)^n,$$

normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w)$, avec des coefficients donnés par la formule :

$$a_n \,:=\, \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

indépendamment du choix d'un rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$.

(g) Avec $0 < r < \mathrm{R}$ fixé, montrer pour tout $n \leqslant -1$ que :

$$\big|a_n\big| \,\leqslant\, \max_{\zeta\in C_r(w)} \big|f(\zeta)\big| \cdot r^{-n}.$$

(h) Montrer que :

$$\limsup_{-\infty \leftarrow n} \sqrt[|n|]{|a_n|} \leqslant r.$$

(i) Montrer que le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} Z^n$$

vaut ∞.

(j) Montrer que la partie singulière :

$$h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \big(z-w\big)^n$$

définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{w\}$.

(k) Montrer l'holomorphie dans ω de la fonction :

$$g := f - h \in \mathscr{O}(\omega).$$

(l) On suppose maintenant que l'ouvert connexe et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ de points-singularités distincts $w_1, \dots, w_{\mathrm{L}} \in \Omega$, et on considère une fonction holomorphe :

$$f \in \mathscr{O}\big(\Omega\backslash\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\}\big)$$

en-dehors de ces points, ainsi qu'une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée :

$$\gamma \subset \Omega\backslash\big\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\big\}.$$

Enfin, on introduit les parties singulières de f dans certains petits voisinages ouverts $\omega_\ell \ni w_\ell$:

$$h_\ell(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} \big(z-w_\ell\big)^n \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}).$$

Montrer l'holomorphie partout dans Ω de la fonction :

$$g(z) := f(z) - h_1(z) - \cdots - h_{\mathrm{L}}(z) \in \mathscr{O}(\Omega).$$

(m) Établir la *formule des résidus homologique :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \mathsf{Ind}_\gamma(w_1) \cdot \mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Ind}_\gamma(w_{\mathrm{L}}) \cdot \mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}}).$$

Exercice 4. [Sans indications] (a) Pour $\xi \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

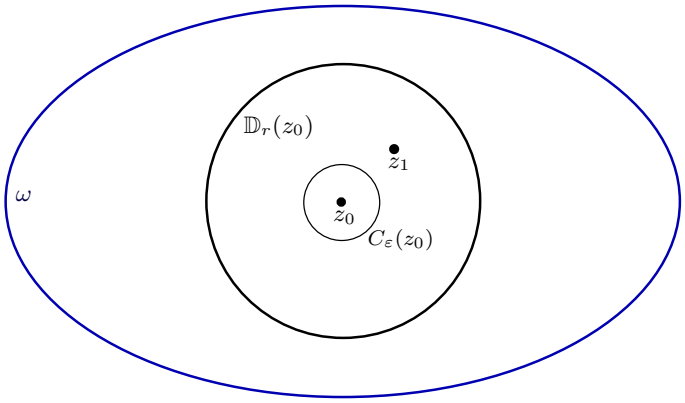
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\big(1 + 2\,\pi\,\xi\big)\, e^{-2\pi\xi}.$$

(b) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\, \pi.$$

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. **(a)** Voici une figure élémentaire.



(b) Avec $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}|z_1 - z_0|$, pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, à savoir pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta - z_0| = \varepsilon$, on a en effet grâce à $|a - b| \geqslant |a| - |b|$:

$$\begin{aligned}
\big|z_1 - \zeta\big| &= \big|z_1 - z_0 - (\zeta - z_0)\big| \\
&\geqslant |z_1 - z_0| - |\zeta - z_0| \\
&= |z_1 - z_0| - \varepsilon \\
&\geqslant |z_1 - z_0| - \tfrac{1}{2}|z_1 - z_0| \\
&= \tfrac{1}{2}|z_1 - z_0|.
\end{aligned}$$

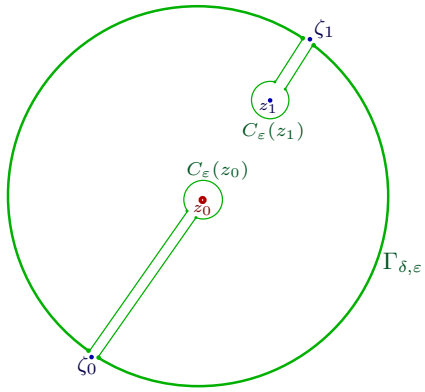
(c) Quand $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}|z_1 - z_0|$ tend vers 0, on majore en utilisant l'hypothèse que $|f| \leqslant \mathrm{M}$ sur $C_\varepsilon(z_0)$, indépendamment de $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta\Big| &\leqslant \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{|\zeta - z_1|} \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} \big|f(\zeta)\big| \int_0^{2\pi} \big|\varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta\big| \\
&\leqslant \frac{2}{|z_1 - z_0|}\, \mathrm{M}\, \varepsilon\, 2\pi \quad \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \quad 0.
\end{aligned}$$

(d) Les deux points :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &:= z_0 + r\, \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}, \\
\zeta_0 &:= z_0 - r\, \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0}
\end{aligned}$$

sont situés sur le diamètre du cercle $C_r(z_0)$ qui contient le segment $[z_0, z_1]$. Le contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ demandé se représente alors comme suit.



(e) Comme la fonction $\zeta \longmapsto f(\zeta)$ est holomorphe dans $\omega\backslash\{z_0\}$, la fonction $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\Gamma_{\delta,\varepsilon} \cup \mathsf{Int}\,\Gamma_{\delta,\varepsilon}$, donc le théorème de Jordan-Cauchy offre effectivement l'annulation :

$$0 \,=\, \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta,$$

cela, pour tout $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)\big\backslash\{z_0\}$ fixé.

(f) En faisant tendre $\delta \longrightarrow 0$, les intégrales sur les bords des deux tunnels, effectuées sur des paires de segments orientés de manière opposée, s'annihilent, et il ne reste plus, à la limite, que trois intégrales :

$$0 \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(g) Ensuite, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, la question **(c)** a déjà fait voir que la troisième intégrale s'évanouit, tandis que la deuxième, sur un cercle centré en z_1 qui s'effondre sur z_1, tend, comme le cours l'a plusieurs fois démontré, vers $f(z_1)$, d'où la formule demandée :

$$0 \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - f(z_1) - 0.$$

(h) Un théorème du cours utilisant la continuité de $(\zeta, z) \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ pour $(\zeta, z) \in C_r(z_0) \times \mathbb{D}_r(z_0)$, allié au fait que $z \longmapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est holomorphe pour $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ quel que soit $\zeta \in C_r(z_0)$, garantit l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction définie comme intégrale à paramètre holomorphe :

$$\widetilde{f}(z) \,:=\, \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(i) Nous venons de voir que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ en tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0)\backslash\{z_0\}$, ce qui fournit un prolongement holomorphe. Mais un tel prolongement est nécessairement unique, car $\widetilde{f}(z) = f(z) = \widehat{f}(z)$ sur l'ouvert connexe $\omega\backslash\{z_0\}$ implique par continuité $\widetilde{f} = \widehat{f}$ partout dans ω.

(j) En supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leqslant \alpha < 1$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \,\leqslant\, \mathrm{M}\, \frac{1}{|z - z_0|^\alpha} \qquad\qquad (\forall\, 0 < |z - z_0| < r),$$

et en revenant à la question **(c)**, nous constatons à nouveau la nullité de la limite :

$$\begin{aligned}\Big|\int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta\Big| &\leqslant \max_{\zeta\in C_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{|\zeta - z_1|} \max_{\zeta\in C_\varepsilon(z_0)} \big|f(\zeta)\big| \int_0^{2\pi} \big|\varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta\big| \\ &\leqslant \frac{2}{|z_1 - z_0|}\, \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon^\alpha}\, \varepsilon\, 2\pi \\ &= \text{constante}\, \varepsilon^{1-\alpha} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et ensuite, tous les arguments restants fonctionnent sans modification.

Exercice 2. (a) Pour $a > 0$, soient donc les deux intégrales :

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx \qquad \text{et} \qquad J := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

Sur le compact $[0, 1]$, on a intégrabilité de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ qui est continue bornée parce que $a > 0$. Puis sur $[1, \infty[$, la majoration $\frac{1}{x^2+a^2} < \frac{1}{x^2}$ garantit, grâce au critère de Riemann, que $\lim\limits_{\mathrm{R}\to\infty} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\, dx$ existe.

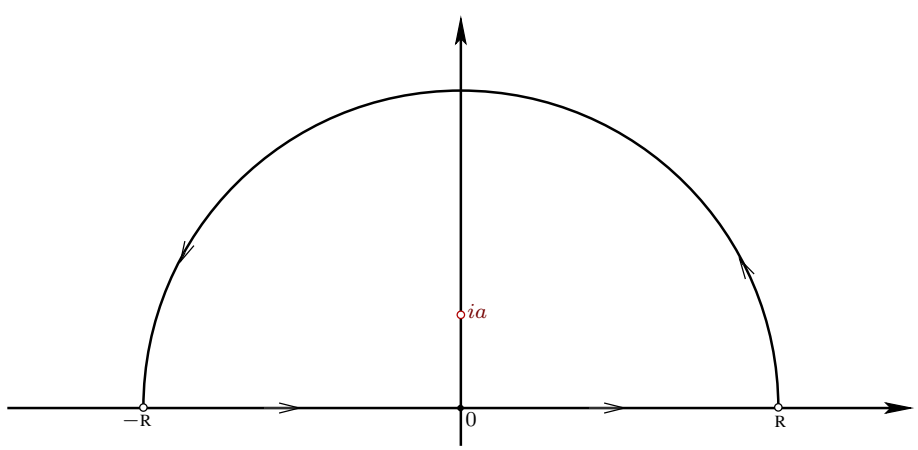
Ensuite, une primitive de $\log x$ étant la fonction $x \log x - x$ qui tend vers 0 avec $x > 0$, on sait que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \log x\, dx$ existe, et sur $[0, 1]$, le facteur borné $\frac{1}{x^2+a^2}$ ne perturbe rien.

Sur $[1, \infty]$, comme la croissance de $\log x$ quand $x \longrightarrow \infty$ est inférieure à toute puissance x^τ avec $\tau > 0$ quelconque, le critère de Riemann appliqué à $\frac{1}{x^{2-\tau}}$ assure la convergence de $\lim\limits_{\mathrm{R}\to\infty} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx$.

(b) Comme la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$ a un pôle simple en $z = ia$, son résidu y vaut :

$$\mathrm{Res}_f(i\,a) = \lim_{z\to ia} (z - ia)\, \frac{1}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{1}{2ia}.$$

(c) Avec $\mathrm{R} > a$, voici un dessin du contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.



(d) Toujours avec $\mathrm{R} > a$, grâce à la minoration $|\alpha + \beta| = |\alpha - (-\beta)| \geqslant |\alpha| - |\beta|$ qui donne :

$$\big|(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2\big| \geqslant \mathrm{R}^2 - a^2,$$

il est clair que :

$$\left| \int_0^\pi \frac{\mathrm{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2} \right| \leqslant \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - a^2}\, \pi \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(e) Le théorème des résidus donne pour tout $\mathrm{R} > a$:

$$\int_{-\mathrm{R}}^0 \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_0^{\mathrm{R}} \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_0^\pi \frac{d\,(\mathrm{R}\, e^{i\theta})}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2} \;=\; 2i\pi \left(\frac{1}{2ia}\right),$$

d'où en faisant tendre $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$:

$$I + I + 0 \;=\; \frac{\pi}{a}.$$

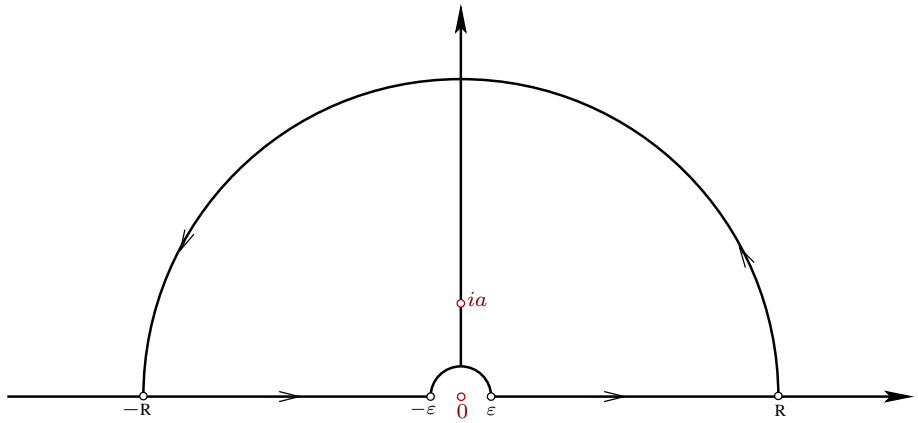
(f) On choisit donc la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \setminus i\,\mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\,\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C}\setminus i\,\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) \;:=\; \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $\mathrm{R} > a$, voici un dessin du contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, \mathrm{R}]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.



(g) En utilisant la valeur du logarithme de $\sqrt{-1}$:

$$\log i \;=\; \log e^{i\,\frac{\pi}{2}} \;=\; i\,\frac{\pi}{2},$$

commençons par calculer le résidu de la fonction $g(z) = \frac{\log z}{z^2+a^2}$ en l'unique pôle, simple, qu'elle subit en le point $z = ia$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_g\,(ia) \;=\; \lim_{z\to ia} (z - ia)\, \frac{\log z}{(z-ia)\,(z+ia)} \;&=\; \frac{\log\,(ia)}{ia + ia} \\ &=\; \frac{\log a + i\,\frac{\pi}{2}}{2ia}. \end{aligned}$$

Puisque le contour d'intégration est une courbe de Jordan ne contenant en son intérieur que ce pôle ia, le théorème des résidus offre la belle formule :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{-\varepsilon} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+\int_0^{\pi} \frac{\log\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta+\int_{\pi}^{0} \frac{\log\big(\varepsilon\,e^{i\theta}\big)}{(\varepsilon\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\varepsilon\,e^{i\theta}\,d\theta \;=\; 2i\pi\Big(\frac{\log a+i\,\frac{\pi}{2}}{2ia}\Big),$$

que nous aimerions rendre encore plus belle !

Tout d'abord, en utilisant la valeur — tellement spectaculaire ! si incroyable mais si vraie ! — de :

$$\log\big(-1\big) \;=\; \log\big(e^{i\pi}\big) \;=\; i\pi,$$

le changement de variable $x \longmapsto -x$ transforme la première intégrale en :

$$\int_{\mathrm{R}}^{\varepsilon} \frac{\log(-x)}{x^2+a^2}\,d(-x) \;=\; \int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{i\pi+\log x}{x^2+a^2}\,dx,$$

et nous retrouvons une intégrale qui coïncide presque avec la deuxième intégrale J ci-dessus que nous désirons calculer, ce qui nous donne :

$$i\pi\int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx+2\int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+\int_0^{\pi} \frac{\log\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta+\int_{\pi}^{0} \frac{\log\varepsilon+i\theta}{(\varepsilon\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\varepsilon\,e^{i\theta}\,d\theta \;=\; \pi\,\frac{\log a}{a}+\frac{\pi}{a}\,i\,\frac{\pi}{2},$$

d'où en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$ et simultanément $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, puis en reconnaissant la valeur de l'intégrale I calculée précédemment :

$$i\pi\,\frac{\pi}{2a}+2\,J+\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\log\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta+\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\mathrm{O}\big(\varepsilon\log\varepsilon\big)+\mathrm{O}(\varepsilon)\Big) \;=\; \pi\,\frac{\log a}{a}+\frac{\pi}{a}\,i\,\frac{\pi}{2}.$$

Pour conclure, ne serait-il pas agréable de pouvoir éliminer cette dernière intégrale rémanente et presque intempestive — mais oui je le peux ! — :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{\pi} \frac{\log\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta\Big| \;&\leqslant\; \frac{\pi+\log\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2-a^2}\,\mathrm{R}\,\pi\\ &\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\; 0,\end{aligned}$$

d'où la simplification mirifique :

$$\underline{i\pi\,\frac{\pi}{2a}}_{\circ}\;+2\,J+0+0 \;=\; \pi\,\frac{\log a}{a}+\underline{\frac{\pi}{a}\,i\,\frac{\pi}{2}}_{\circ},$$

de toute beauté :

$$J \;=\; \frac{\pi}{2\,a}\,\log a.$$

Exercice 3. Intégralement traité dans le polycopié de cours, avec l'objectif de récompenser les étudiants qui ont approfondi le cours par un travail de lecture personnelle.

Exercice 4. Pour un paramètre réel $\xi \geqslant 0$, soit donc à calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\,dx \;\overset{?}{=}\; \frac{\pi}{2}\,\big(1+2\,\pi\,\xi\big)\,e^{-2\pi\xi}.$$

Avec la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) \;:=\; \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(1+z^2)^2} \;=\; \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2\,(z+i)^2},$$

ayant exactement deux pôles d'ordre 2 en les deux points $z = -i$ et $z = +i$, dont l'intégrale sur un segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ avec $\mathrm{R} > 1$ grand approche l'intégrale désirée, quel demi-cercle de rayon R choisir pour que l'intégration concernée devienne négligeable lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$?

Avec $z = x + iy$, comme l'exponentielle :

$$e^{-2i\pi\xi z} \,=\, e^{-2i\pi\xi x + 2\pi\xi y},$$

est de module $e^{2\pi\xi y}$, et comme $\xi \geqslant 0$, il faut choisir le demi-cercle *inférieur*, c'est-à-dire contenu dans $\{\mathrm{Im}\, z \leqslant 0\}$, mais alors le contour constitué du segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi de ce demi-cercle est parcouru dans le sens *inverse* du sens trigonométrique, ce qui nécessite d'insérer un coefficient -1 dans la formule des résidus :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx + \underbrace{\int_0^{-\pi} \frac{e^{-2i\pi\,\xi\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}}}{\big(1+(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2\big)^2}\, d\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}_{\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0} \,=\, -\,2i\pi\,\mathrm{Res}_{-i}(f),$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx \,=\, -\,2i\pi\,\mathrm{Res}_{-i}(f),$$

donc il ne reste plus qu'à calculer ce résidu — sans faire d'erreur !

D'après une formule du cours :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{-i}(f) \,&=\, \frac{d}{dz}\left(\underline{(z+i)^2}_{\circ}\, \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2\, \underline{(z+i)^2}_{\circ}}\right)\Bigg|_{z=-i} \\
&=\, \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2}\right)\Bigg|_{z=-i} \\
&=\, \left(\frac{-2i\pi\xi\, e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2} - \frac{2\, e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^3}\right)\Bigg|_{z=-i} \\
&=\, \left(\frac{-2i\pi\,\xi}{(-2i)^2} - \frac{2}{(-2i)^3}\right) e^{-2\pi\xi} \\
&=\, \left(i\,\frac{\pi}{2}\,\xi + \frac{i}{4}\right) e^{-2\pi\xi},
\end{aligned}$$

et donc après multiplication par $-2i\pi$ — et non pas par $+2i\pi$ à cause de l'orientation inversée du contour — nous atterrissons à destination :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx \,&=\, -\,2i\pi\left(i\,\frac{\pi}{2}\,\xi + \frac{i}{4}\right) e^{-2\pi\xi} \\
&=\, \frac{\pi}{2}\,\big(2\pi\xi + 1\big)\, e^{-2\pi\xi}.
\end{aligned}$$

(b) Puisque nous avons hâte de détacher notre ceinture, empressons-nous de démontrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \,\overset{?}{=}\, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\pi.$$

À cet effet, introduisons la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) \;:=\; \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}} \;=\; \frac{1}{(z-i)^{n+1}}\,\frac{1}{(z+i)^{n+1}},$$

ayant exactement deux pôles d'ordre $n+1$ en $z=-i$ et en $z=+i$, puis avec $\mathrm{R}>1$ grand, intégrons-la sur le contour consistant en le segment $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan supérieur $\{\mathsf{Im}\, z \geqslant 0\}$.

Le théorème des résidus, avec devant $2i\pi$ le bon vieux signe $+$ que tout le monde préfère sur Terre, donne :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{d\left(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)}{\left(1+(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2\right)^{n+1}}\,dx}_{\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0} \;=\; 2i\pi\,\mathsf{Res}_i(f),$$

donc il ne reste plus qu'à calculer ce résidu, ce qui, pour retarder notre libération, va réserver une petite surprise de calcul !

D'après une formule du cours :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}_f(i) \;&=\; \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\left(\underline{(z-i)^{n+1}}_{\circ}\,\frac{1}{\underline{(z-i)^{n+1}}_{\circ}}\,\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=i} \\
&=\; \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=i} \\
&=\; \frac{1}{n!}\,(-n-1)\cdots(-n-n)\,\frac{1}{(z+i)^{2n+1}}\Bigg|_{z=i} \\
&=\; \frac{1}{n!}\,(n+1)\cdots(n+n)\,(-1)^n\,\frac{1}{(2i)^{2n+1}},
\end{aligned}$$

d'où en multipliant cela par $2i\pi$ comme requis :

$$\begin{aligned}
2i\pi\,\mathsf{Res}_f(i) \;&=\; \underline{2i}_{\circ}\,\pi\,\frac{1}{n!}\,(n+1)\cdots(n+n)\,\frac{\underline{(-1)^n}_{\circ\circ}}{2^{2n}\,\underline{(i)^{2n}}_{\circ\circ}\,\underline{2i}_{\circ}} \\
&=\; \pi\,\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{1\cdots n}\,\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Pour terminer le tout sans rater la correspondance pour le vol vers le Master 1 MFA, il faut se dépêcher de vérifier que :

$$\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{\underline{1\cdots n}_{\circ}}\,\frac{1}{\underline{2^n}_{\circ}}\,\frac{1}{2^n} \;\overset{?}{=}\; \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{\underline{2\cdot 4\cdots 2n}_{\circ}},$$

c'est-à-dire après simplications visibles :

$$\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{2^n} \;\overset{?}{=}\; 1\cdots 3\cdots(2n-1),$$

formule qui est manifestement vérifiée quand $n=1$, tandis qu'en remplaçant $n \longmapsto n+1$ afin de raisonner par récurrence, on doit vérifier que :

$$\frac{(n+2)\cdots(n+1+n+1)}{2^{n+1}} \;\overset{?}{=}\; 1\cdots 3\cdots(2n-1)(2n+1),$$

mais en divisant cela par ce qui précède supposé vrai au rang n, on obtient une égalité visiblement vraie, donc conclusive :

$$\frac{(n+n+1)\,(n+1+n+1)}{(n+1)\,2} \overset{\textbf{oui}}{=} 2n+1. \qquad \square$$

3. Examen 2

Exercice 1. Soit $\mathbb{D} := \big\{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| < 1\big\}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$, soit $w \in \mathbb{D}$ fixé, et soit :

$$\varphi_w(z) \ := \ \frac{z-w}{1-\overline{w}z}.$$

(a) Montrer que $\varphi_w \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$.

(b) Montrer que $\big|\varphi_w(z)\big| = 1$ pour tout $|z| = 1$, puis que $\big|\varphi_w(z)\big| \leqslant 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et enfin que $\big|\varphi_w(z)\big| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(c) Soit une suite infinie $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ de points *non nuls* $z_n \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ satisfaisant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) \ < \ \infty.$$

On pose :

$$F_n(z) \ := \ \frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} \qquad {\scriptstyle (z \in \mathbb{D})}.$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, montrer que :

$$\big|F_n(z) - 1\big| \ \leqslant \ \frac{1+|z|}{1-|z|}\,\big(1 - |z_n|\big).$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\frac{1}{|1-\overline{z}_n z|} \leqslant \frac{1}{1-|z|}$.

(d) Montrer que le produit infini $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$. Indication: On rappelle qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ est dit *normalement convergent* sur un compact $K \subset \mathbb{D}$ si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \big(F_n(z) - 1\big)$ est normalement convergente sur K.

(e) Montrer que $\big|F(z)\big| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(f) Quel problème la fonction $F(z)$ résout-elle ?

(g) Maintenant, soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *non constante*, avec $f(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ non nul, on note :

$$f^{-1}(w) \ := \ \big\{z \in \mathbb{D}\colon\ f(z) = w\big\}.$$

On suppose $\mathsf{Card}\, f^{-1}(w) = \infty$.

Justifier que l'on peut écrire :

$$f^{-1}(w) \ = \ \big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty},$$

avec $z_n \in \mathbb{D}$ et :

$$1 \ = \ \lim_{n\to\infty} |z_n|.$$

(h) On pose :

$$g(z) \ := \ \varphi_w\big(f(z)\big),$$

en rappelant que $\varphi_w(z) := \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(i) Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$ entier, on pose :

$$B_{\mathrm{N}}(z) \,:=\, \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}.$$

Montrer qu'il existe $h_{\mathrm{N}} \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$g(z) \,=\, B_{\mathrm{N}}(z)\, h_{\mathrm{N}}(z) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

(j) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ (censé être arbitrairement proche de 0), il existe un rayon $0 < r_\varepsilon < 1$ (censé être proche de 1) tel que :

$$\big|B_{\mathrm{N}}(z)\big| \,\geqslant\, 1 - \varepsilon \qquad (\forall\, |z| = r_\varepsilon).$$

(k) Montrer que $\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant 1$.

(l) On introduit maintenant la *fonction de comptage de Nevanlinna :*

$$\begin{aligned} N_f(w) \,&:=\, \sum_{z \in f^{-1}(w)} \log \frac{1}{|z|} \\ &=\, \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \,\leqslant\, \log \frac{1}{|w|}.$$

(m) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) \,<\, \infty.$$

(n) Soit maintenant $F \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$, bornée $\big|F(z)\big| \leqslant \mathrm{M} < \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et non identiquement nulle $F \not\equiv 0$. Soient $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ ses zéros, supposés en nombre infini. On suppose temporairement que $\mathrm{M} = 1$ et que $F(0) \neq 0$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty$. Indication: Introduire :

$$f(z) \,:=\, \frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\, F(z)}.$$

(o) Montrer que cela se généralise sans supposer $\mathrm{M} = 1$ et $F(0) \neq 0$.

(p) Interpréter le résultat obtenu en l'énonçant sous la forme d'un théorème synthétique.

Exercice 2. (a) Montrer que la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ de Riemann satisfait, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1$:

$$\log \zeta(s) \,=\, \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser à la formule de produit infini d'Euler, vue en cours.

(b) Justifier que $\zeta(s) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, puis justifier l'existence et l'holomorphie d'une fonction $s \longmapsto \log \zeta(s)$ définie dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ et prenant des valeurs réelles sur $]1, \infty[$.

(c) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, on a encore :

$$\log \zeta(s) \;=\; \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser au principe d'unicité pour les fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation.

(d) Toujours pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, montrer que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ est la *fonction de von Mangoldt :*

$$\Lambda(n) \;:=\; \begin{cases} \log p & \text{lorsque } n = p^\alpha \text{ avec } p \in \mathscr{P} \text{ et } \alpha \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(e) Pour $c > 1$ *fixé*, en notant comme Riemann $s = \sigma + it$, on considère la droite réelle verticale $\big\{c + it\colon\ -\infty < t < \infty\big\}$ orientée du bas vers le haut. Soit l'intégrale dépendant du paramètre $a > 0$:

$$I(a) \;:=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\, ds.$$

Montrer qu'elle converge. Indication: $\big|a^s\big| = a^c$.

(f) On suppose dorénavant, jusqu'à la Question **(j)** ci-dessous, que $a \geqslant 1$. Soit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(s) \;:=\; \frac{a^s}{s(s+1)}.$$

Calculer $\mathrm{Res}_f(0)$, puis $\mathrm{Res}_f(-1)$.

(g) Avec un rayon $\mathrm{R} > 1 + c$ (qui tendra vers l'infini), on considère le contour orienté Γ_{R}^- consistant en le segment vertical $\big[c - i\mathrm{R},\ c + i\mathrm{R}\big]$ parcouru du bas vers le haut, suivi du demi-cercle C_{R}^- centré en c de rayon R situé à gauche de l'axe vertical $\{\mathrm{Re}\, s = c\}$. Dessiner Γ_{R}^- avec tous les détails possibles.

(h) Trouver la valeur de :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^-} f(s)\, ds \;=\; \textbf{?}.$$

(i) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{C_{\mathrm{R}}^-} f(s)\, ds.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité valable pour tous rayons $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_c \gg 1$ assez grands :

$$\big|s\,(s+1)\big| \;\geqslant\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{R}^2.$$

(j) Toujours avec $c > 1$ fixé, montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\, ds \;=\; \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} & \text{quand } 1 \leqslant a, \\ 0 & \text{quand } 0 < a \leqslant 1. \end{cases}$$

Indication: Changer de demi-cercle, et faire d'abord une figure (notée !).

(k) On introduit maintenant la *fonction psi* de Tchebychev :

$$\psi(x) \;:=\; \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \Lambda(n),$$

puis :

$$\psi_1(x) \;:=\; \int_1^x \psi(u)\,du.$$

Montrer que :

$$\psi_1(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x \Lambda(n)\,\mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\,du.$$

(l) Montrer que :

$$\psi_1(x) \;=\; \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \Lambda(n)\cdot\big(x-n\big).$$

(m) Montrer que pour tout $\delta>0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge normalement dans $\big\{\mathsf{Re}\,s>1+\delta\big\}$.

(n) Montrer que :

$$\psi_1(x) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big(-\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big)\,\frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\,ds.$$

Exercice 3. Soit $\tau\in\mathbb{C}$ fixé avec $\mathsf{Im}\,\tau>0$.

(a) Montrer que la *fonction Thêta de Jacobi* définie par :

$$\Theta_\tau(z) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}\,e^{2i\pi nz} \qquad (z\in\mathbb{C}),$$

est une fonction holomorphe entière. Indication: Poser $t:=\mathsf{Im}\,\tau>0$, et observer que pour $\frac{4\,|z|}{t}\leqslant|n|$, on a $-n^2t+2\,|n|\,|z|\leqslant -n^2\,\frac{t}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe deux constantes $0<\mathrm{A},\mathrm{B}<\infty$ telles que :

$$\big|\Theta_\tau(z)\big| \;\leqslant\; \mathrm{A}\,e^{\mathrm{B}\,|z|^2} \qquad (\forall\,z\in\mathbb{C}).$$

(c) Montrer que la fonction :

$$f(z) \;:=\; z+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2\tau}\,\frac{e^{2i\pi nz}}{2i\pi n}$$

est une fonction holomorphe entière *non constante*. Indication: Observer que $f(x)\longrightarrow\infty$ lorsque $\mathbb{R}\ni x\longrightarrow\infty$.

(d) Montrer que Θ_τ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. Indication: Vérifier que $f'=\Theta_\tau$.

(e) Montrer que $\Theta_\tau\big(z+m\tau\big)=e^{-i\pi m^2\tau}\,e^{-2i\pi mz}\,\Theta_\tau(z)$, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $m\in\mathbb{Z}$.

(f) Montrer que Θ_τ est une fonction holomorphe entière d'ordre exactement égal à 2.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. **(a)** Le pôle unique au dénominateur $\frac{1}{\overline{w}}$ est de module $\frac{1}{|\overline{w}|} > 1$, puisque $w \in \mathbb{D}$, donc :

$$\varphi_w \in \mathscr{O}\Big(\mathbb{D}_{\frac{1}{|\overline{w}|}}(0) \supset \overline{\mathbb{D}}\Big),$$

ce qui montre un peu mieux : φ_w est holomorphe (donc continue) dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}$.

(b) Avec $z\overline{z} = 1$, on calcule :

$$\begin{aligned} \big|1 - \overline{w}\, z\big| &= \big|1 - w\,\overline{z}\big| \\ &= \big|z\,\big(1 - w\,\overline{z}\big)\big| \\ &= |z - w|, \end{aligned}$$

d'où en divisant $\big|\varphi_w(z)\big| = 1$. Enfin, comme φ_w est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et continue jusqu'au bord, le principe du maximum donne :

$$\big|\varphi_w(z)\big| \leqslant \max_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} \big|\varphi_w(\zeta)\big| = 1 \qquad (\forall\, |z| \leqslant 1),$$

et comme φ_w n'est pas constante :

$$\big|\varphi_w(z)\big| < 1 \qquad (\forall\, |z| < 1).$$

(c) Comme $\big|\overline{z}_n\big| < 1$, l'inégalité standard $|1 - a| \geqslant 1 - |a|$ valable pour $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$ donne :

$$\begin{aligned} \big|1 - \overline{z}_n z\big| &\geqslant 1 - \big|\overline{z}_n\big|\,|z| \\ &\geqslant 1 - |z|, \end{aligned}$$

puis en inversant :

$$\frac{1}{|1 - \overline{z}_n z|} \leqslant \frac{1}{1 - |z|}.$$

Ensuite, avec $z \in \mathbb{D}$ fixé, calculons et simplifions la différence :

$$\begin{aligned} F_n(z) - 1 &= \frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} - 1 \\ &= \frac{|z_n|\,(z_n - z) - z_n\,(1 - \overline{z}_n z)}{z_n\,(1 - \overline{z}_n z)} \\ &= \frac{z_n\,(|z_n| - 1) + z\,(|z_n|^2 - |z_n|)}{z_n\,(1 - \overline{z}_n z)} \\ &= \big(|z_n| - 1\big)\,\frac{z_n + z\,|z_n|}{z_n\,(1 - \overline{z}_n z)}, \end{aligned}$$

puis majorons-la en utilisant le préliminaire :

$$\begin{aligned}\big|F_n(z)-1\big| &\leqslant \big(1-|z_n|\big)\,\frac{|z_n|\,(1+|z|)}{|z_n|\,|1-\overline{z}_n z|}\\ &\leqslant \big(1-|z_n|\big)\,\frac{1+|z|}{1-|z|}.\end{aligned}$$

(d) Si $K \subset \mathbb{D}$ est un compact, il existe $0 \leqslant r < 1$ avec $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$, et alors pour tout $z \in K$, ce qui précède permet de majorer :

$$\big|F_n(z)-1\big| \leqslant \big(1-|z_n|\big)\,\frac{1+r}{1-r} \qquad (\forall\, z \in K,\ \forall\, n \geqslant 1),$$

au moyen d'une série par hypothèse convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1-|z_n|\big)\,\frac{1+r}{1-r} \ < \ \infty,$$

donc un théorème du cours offre la convergence du produit infini vers une certaine fonction holomorphe dans le disque unité :

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) \ =: \ F(z) \ \in \ \mathscr{O}(\mathbb{D}).$$

(e) Grâce à la Question **(b)**, en observant que :

$$F_n(z) \ = \ \frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n - z}{1-\overline{z}_n z} \ = \ -\,\frac{|z_n|}{z_n}\,\varphi_{z_n}(z),$$

on a unimodularité au bord :

$$\big|F_n(z)\big| \ = \ 1 \qquad (\forall\, |z|=1),$$

et comme F_n est holomorphe dans $\mathbb{D}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, le principe du maximum donne :

$$\big|F_n(z)\big| \ \leqslant \ 1 \qquad (\forall\, |z| \leqslant 1).$$

Tout produit fini $F_1(z) \cdots F_{\mathrm{N}}(z)$ satisfait aussi cela, donc à la limite quand $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$:

$$\big|F(z)\big| \ \leqslant \ 1 \qquad (\forall\, |z|=1).$$

(f) Comme chaque $F_n(z)$ s'annule précisément en l'unique point $z = z_n$, le théorème fondamental sur les produits infinis garantit que :

$$\big\{w \in \mathbb{D}\colon\ F(w)=0\big\} \ = \ \big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ainsi, nous venons de démontrer l'existence d'une fonction holomorphe *bornée* $F \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap L^{\infty}\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$ qui s'annule *précisément* sur une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, sous l'hypothèse cruciale que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1-|z_n|\big) \ < \ \infty.$$

(g) La fonction holomorphe $z \longmapsto f(z) - w$ dans $\mathbb{D}$ non identiquement nulle (puisque f est non constante) doit avoir, d'après le principe des zéros isolés, une collection $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de zéros qui est *discrète* dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire sans point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, et donc, si

cette collection est infinie comme on l'a supposé, nécessairement, elle s'évade vers le bord $\partial\mathbb{D}$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathsf{dist}\big(z_n, \partial\mathbb{D}\big).$$

(h) La question **(b)** a fait voir que $\varphi_w \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, donc par composition $\varphi_w \circ f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$.

(i) Cette fonction composée :

$$g(z) = \varphi_w\big(f(z)\big) = \frac{f(z) - w}{1 - \overline{w}\, f(z)},$$

s'annule aux points de la suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, car :

$$g(z_n) = \frac{f(z_n) - w}{1 - \overline{w}\, f(z_n)} = 0 \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Or le produit fini $B_{\mathrm{N}}(z)$ s'annule exactement aux points $z_1, \dots, z_{\mathrm{N}}$, et nulle part ailleurs. Par conséquent, le quotient :

$$\frac{g(z)}{B_{\mathrm{N}}(z)} =: h_{\mathrm{N}}(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$$

n'a que des singularités illusoires en $z_1, \dots, z_{\mathrm{N}}$, donc définit bien une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$.

(j) Quel que soit $|z| = 1$, on sait que :

$$\big|B_{\mathrm{N}}(z)\big| = \big|\varphi_{z_1}(z)\big| \cdots \big|\varphi_{z_{\mathrm{N}}}(z)\big| = 1 \cdots 1 = 1,$$

donc le résultat tombe par continuité.

(k) Toujours sur les cercles $\big\{|z| = r_\varepsilon\big\}$, comme $|g(z)| < 1$ grâce à la Question **(h)**, on majore :

$$\begin{aligned} \big|h_{\mathrm{N}}(z)\big| &\leqslant \frac{|g(z)|}{|B_{\mathrm{N}}(z)|} \\ &\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \qquad (\forall\, |z| = r_\varepsilon), \end{aligned}$$

d'où en appliquant le principe du maximum sur $\overline{\mathbb{D}}_{r_\varepsilon}$:

$$\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon},$$

et enfin, en laissant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant 1.$$

(l) Ce qui précède implique :

$$\begin{aligned} 0 < |w| &= |g(0)| \\ &= \big|B_{\mathrm{N}}(0)\, h_{\mathrm{N}}(0)\big| \\ &\leqslant \big|B_{\mathrm{N}}(0)\big| \cdot 1 \\ &= |z_1| \cdots |z_{\mathrm{N}}|, \end{aligned}$$

et en inversant puis en appliquant la fonction logarithme :

$$\log \frac{1}{|w|} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \log \frac{1}{|z_n|}.$$

Enfin, laissons $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$ pour obtenir la réponse :

$$\log \frac{1}{|w|} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}.$$

(m) Ainsi, nous venons d'obtenir la convergence de la série à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leqslant \log \frac{1}{|w|} < \infty.$$

Comme $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ avec $|z_n| < 1$ d'après la Question **(g)**, on a pour tous $n \geqslant 1$:

$$0 < |z_n| < 1 \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Vérifions, pour tout x réel avec $0 < x \leqslant 1$, que :

$$1 - x \leqslant \log \frac{1}{x}.$$

En effet, la fonction auxiliaire $\lambda(x) := -1 + x + \log \frac{1}{x}$ admet, sur $]0, 1[$, une dérivée négative :

$$\lambda'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0,$$

et comme $\lambda(1) = 0$, elle doit avoir des valeurs strictement positives sur $]0, 1[$, décroissant jusqu'à $\lambda(1) = 0$.

Grâce à cela :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} < \infty.$$

(n) Cette fonction auxiliaire $f(z)$ satisfait $f(0) = 0$. En les zéros z_n de F, on a :

$$F(z_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(z_n) = \frac{0 - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\, 0} = -F(0) =: w \in \mathbb{D}\backslash\{0\},$$

De plus, $f(z) = w$ s'écrit :

$$\frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\, F(z)} = -F(0) \quad \Longrightarrow \quad F(z) = 0,$$

donc $f^{-1}(w) = \{F = 0\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, et ainsi, tout ce qui précède s'applique !

(o) En divisant $F(z)$ par M, on se ramène à $\mathrm{M} = 1$. Si $F(z) = z^{\nu} \cdot G(z)$ avec $G(0) \neq 0$ et $\nu \geqslant 1$, on peut appliquer ce qui précède à $G(z)$.

(p) Le résultat obtenu donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D}$ discrète dans $\mathbb{D}$ soit l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$, ce qui rappelle le théorème de Weierstrass, mais avec une hypothèse supplémentaire inévitable, et explicite.

Théorème. *Soit $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points dans $\mathbb{D}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty$ — ce qui implique sa discrétion dans $\mathbb{D}$. Alors il existe une fonction :*

$$B \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap H^{\infty}(\mathbb{D})$$

holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée $\leqslant 1$ ayant exactement ces z_n comme zéros, et non nulle partout ailleurs.

Inversement, si une fonction holomorphe bornée :

$$F \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap H^\infty(\mathbb{D})$$

est non identiquement nulle, et si elle a une infinité de zéros $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ *répétés avec multiplicités, alors* $\sum_{n=1}^\infty \big(1 - |z_n|\big) < \infty$.

Dans la première partie de l'énoncé, par rapport aux Questions **(c)** à **(f)** où on a supposé tous les $z_n \neq 0$ non nuls, il faut factoriser à l'avance par z^ν avec $\nu \geqslant 0$ entier pour tenir compte de l'existence éventuelle de zéros à l'origine, ce qui se généralise sans peine.

Exercice 2. (a) D'après Euler, on a la représentation par un produit normalement convergent sur $\big\{\mathsf{Re}\, s > 1 + \delta\big\}$ quel que soit $\delta > 0$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Avec $s \in \mathbb{R}$ réel, $s > 1$, en prenant le logarithme et en utilisant le développement en série entière $-\log(1-t) = \sum_{m=1}^\infty \frac{t^m}{m}$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_{p \in \mathscr{P}} -\log\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big) \\ &= \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}. \end{aligned}$$

(b) Dans le produit infini $\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ dont tous les facteurs $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0$ ne s'annulent jamais dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$, puisque $\big|p^s\big| = p^{\mathsf{Re}\, s} > 1$, un théorème du cours assure que :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0 \qquad (\forall\, \mathsf{Re}\, s > 1).$$

Ensuite, comme le demi-plan $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$ est simplement connexe, un théorème du cours montre l'existence de $s \longmapsto \log \zeta(s)$, holomorphe, avec $\log \zeta(s) \in \mathbb{R}$ quand $\zeta(s) \in \mathbb{R}$, notamment pour $s \in \,]1, \infty[$.

(c) Comme $s \longmapsto \log \zeta(s)$ et la fonction :

$$s \longmapsto \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}},$$

sont toutes deux holomorphes dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$, et comme elles coïncident, d'après la Question **(a)**, sur le segment :

$$]1, \infty[\subset \big\{\mathsf{Re}\, s > 1\big\},$$

qui a des points d'accumulation dans l'ouvert $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$, le principe d'unicité garantit qu'elles coïncident partout.

(d) Comme $\zeta(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ dans $\{\mathsf{Re}\, s > 1\}$ d'après le cours, on peut dériver terme à terme la série double normalement convergente qui précède en utilisant :

$$\big(p^{-ms}\big)' = \big(e^{-ms \log p}\big)' = -m \log p\, e^{-ms \log p} = -m \log p \cdot p^{-ms},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{p\in\mathscr{P}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\big(-m\log p\big)\frac{1}{p^{ms}}\\
&= \sum_{p\in\mathscr{P}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}}\\
\text{[Reconnaître }\Lambda\text{]}\qquad &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

(e) En effet, grâce à $\big|a^s\big| = a^{\mathsf{Re}\,s} = a^c$ sur cette droite, majorons :

$$\big|I(a)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^c}{|c+it|\cdot|c+1+it|}\,\big|idt\big|,$$

puis en utilisant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|c+it|} &= \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}},\\
\frac{1}{|c+1+it|} &= \frac{1}{((c+1)^2+t^2)^{1/2}} \leqslant \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

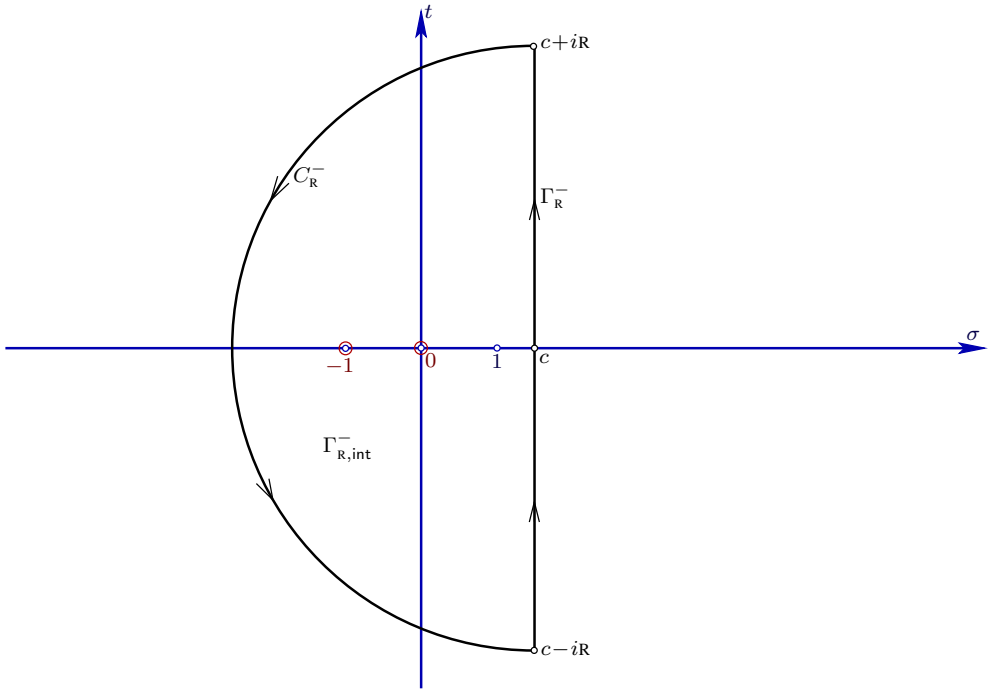
constatons la finitude :

$$\begin{aligned}
\big|I(a)\big| &\leqslant \frac{a^c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{c^2+t^2}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(f) Élémentaire, mon cher Merker :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}_f(0) &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{a^s}{s(s+1)} = 1,\\
\mathsf{Res}_f(-1) &= \lim_{s\to -1}(s+1)\cdot\frac{a^s}{s(s+1)} = \frac{a^{-1}}{-1} = -\frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

(g) Voici un dessin complet, qui incorpore axes, flèches, et points remarquables.



(h) Comme les deux (seules) singularités $s = 0$ et $s = 1$ de $f(s) = \frac{a^s}{s(s+1)}$ se trouvent à l'intérieur $\Gamma_{\mathrm{R,int}}^-$ de ce contour, puisque $\mathrm{R} > 1 + c$, le théorème des résidus donne, grâce à la Question **(f)** :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^-} f(s)\,ds &= \mathsf{Res}_f(0) + \mathsf{Res}_f(-1)\\ &= 1 - \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

(i) En paramétrant C_{R}^- par $s = c + \mathrm{R}\,e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, on transforme :

$$\begin{aligned}s\,(s+1) &= \left(c + \mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)\left(c + 1 + \mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)\\ &= e^{2i\theta}\left(c\,e^{-i\theta} + \mathrm{R}\right)\left((c+1)\,e^{-i\theta} + \mathrm{R}\right),\end{aligned}$$

d'où :

$$\left|s\,(s+1)\right| \geqslant \tfrac{1}{2}\,\mathrm{R}^2 \qquad (\forall\,\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_c \gg 1).$$

Ensuite, comme on a $\mathsf{Re}\,s \leqslant c$ quel que soit $s \in C_{\mathrm{R}}^-$, d'où découle puisque $a \geqslant 1$:

$$\left|a^s\right| = a^{\mathsf{Re}\,s} \leqslant a^c \qquad (\forall\,s \in C_{\mathrm{R}}^-),$$

nous pouvons majorer et conclure :

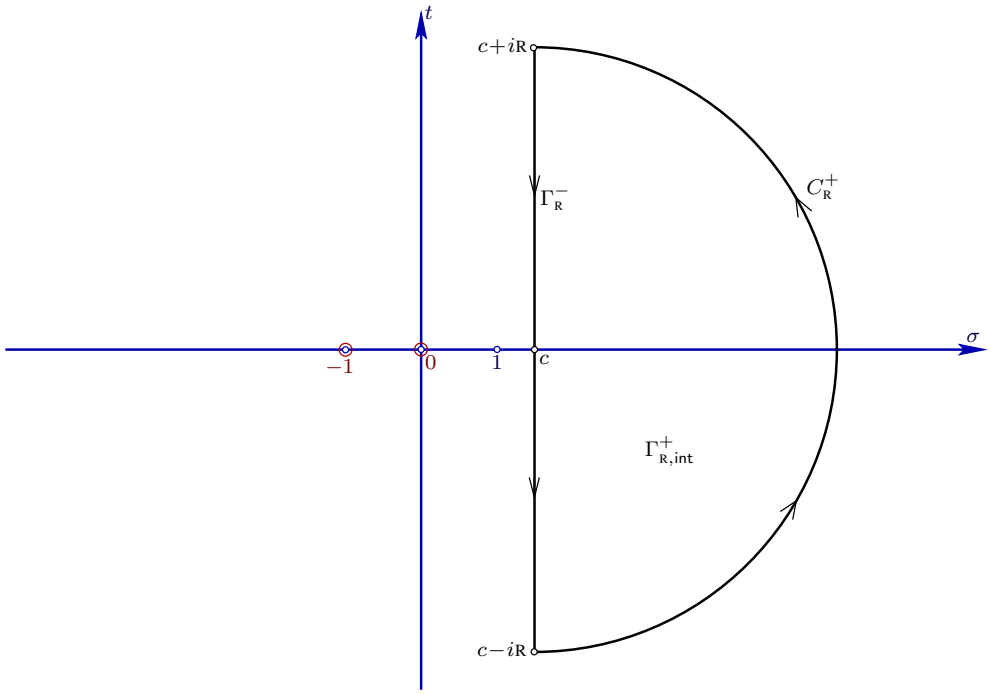
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^-} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds\right| &\leqslant \frac{a^c}{2\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^-} \frac{|ds|}{|s\,(s+1)|}\\ &\leqslant \frac{a^c}{2\pi}\,\frac{\pi\,\mathrm{R}}{\frac{1}{2}\,\mathrm{R}^2}\\ &\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

(j) Tout d'abord, pour le premier cas où $1 \leqslant a$, en faisant $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$ dans la formule des résidus obtenue à la Question **(h)** :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{[c-i\mathrm{R},c+i\mathrm{R}]}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds+\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^-}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds}_{\substack{\longrightarrow\\ \mathrm{R}\to\infty}\,0}\;=\;1-\frac{1}{a},$$

nous obtenons bien grâce à la Question **(i)** qui précède :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds\;=\;1-\frac{1}{a}.$$



Supposons maintenant que $0 < a \leqslant 1$. Si nous prenons le demi-cercle C_{R}^+ centré en c mais situé à *droite* de la verticale $\{\mathsf{Re}\,s = c\}$, et si Γ_{R}^+ est le contour analogue contenant le segment $[c+i\mathrm{R}, c-i\mathrm{R}]$ parcouru cette fois-ci *du haut vers le bas*, la fonction $s \longmapsto \frac{a^s}{s(s+1)}$ n'a plus aucun pôle dans l'intérieur $\Gamma_{\mathrm{R,int}}^+$, donc le théorème des résidus donne :

$$\begin{aligned}0\;&=\;\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^+}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds\\ &=\;\frac{1}{2i\pi}\int_{[c+i\mathrm{R},c-i\mathrm{R}]}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds+\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^+}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds}_{\substack{\longrightarrow\\ \mathrm{R}\to}\,0},\end{aligned}$$

et une estimation analogue à celle conduite par la Question **(i)** en tenant compte du fait que $\mathsf{Re}\,s \geqslant c$ pour tout $s \in C_{\mathrm{R}}^+$ implique toujours $|a^s| = e^{\mathsf{Re}\,s} \leqslant a^c$ car maintenant $0 < a \leqslant 1$, donne bien ce qui était demandé :

$$0\;=\;\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds.$$

(k) Observons d'abord que pour $u \geqslant 1$ réel :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant u} \Lambda(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u),\end{aligned}$$

puis insérons :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \int_1^x \psi(u)\, du \\ &= \int_1^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u) \Big)\, du \\ \text{[Somme finie]} \qquad &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du.\end{aligned}$$

(l) Continuons en décomposant :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du + \sum_{n > x} \Lambda(n) \underline{\int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du}_{\circ} \\ &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n) \cdot \big(x - n\big) + 0.\end{aligned}$$

(m) Tout d'abord, une majoration du type :

$$\log n \ \leqslant\ \mathsf{constante}_{\varepsilon} \cdot n^{\varepsilon} \qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$, montre, grâce au critère de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\kappa}} < \infty$ vrai pour tout $\kappa > 1$, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} \ <\ \infty.$$

Observons par ailleurs, en revenant à la définition donné par la Question **(d)**, que :

$$\big|\Lambda(n)\big| \ \leqslant\ \log n \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Par conséquent, nous avons bien convergence normale :

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \Big| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big|\Lambda(n)\big|}{n^{\mathsf{Re}\, s}} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(n) Avec $a := \frac{x}{n}$, tout ce qui précède permet en effet d'intervertir sommation et intégration pour calculer :

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n)\, x \left(1 - \frac{n}{x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, x\, \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(x/n\right)^s}{s\,(s+1)}\, ds \\
[c > 1] \qquad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) \frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\, ds \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\, \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\, ds.
\end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Avec $t > 0$, on a bien (facilement !) :

$$\begin{aligned}
\frac{4\,|z|}{t} \leqslant |n| \quad \Longrightarrow \quad -\, n^2\, t + 2\,|n|\,|z| &\leqslant -\, n^2\, t + 2\,|n|\, \frac{t}{4}\, |n| \\
(*) \qquad &= -\, n^2\, \frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

Grâce à cela, et à l'inégalité élémentaire $\left|e^{2i\pi nz}\right| \leqslant e^{2\pi\,|n|\,|z|}$, pour démontrer que la série infinie de fonctions holomorphes qui définit $\Theta_\tau(z)$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ de rayon $\mathrm{R} \gg 1$ arbitrairement grand, majorons, pour $|z| \leqslant \mathrm{R}$, en découpant la somme en deux morceaux :

$$\begin{aligned}
\left|\Theta_\tau(z)\right| &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|e^{i\pi n^2 \tau}\, e^{2i\pi nz}\right| \\
[\mathrm{Im}\,\tau = t] \qquad &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,|n|\,|z|} \\
[(*)] \qquad &\leqslant \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,|n|\,\mathrm{R}} + \sum_{\frac{4|z|}{t} \leqslant |n|} e^{-\,\pi n^2\, \frac{t}{2}} \\
&\leqslant \mathsf{constante}(\mathrm{R}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\, n^2\, \frac{t}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Un théorème du cours dû à Cauchy offre l'holomorphie de Θ_τ sur $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, donc dans $\mathbb{C}$ tout entier, puisque $\mathrm{R} \gg 1$ était arbitraire.

(b) Reprenons cette majoration en analysant mieux le premier terme :

$$\begin{aligned}
\big|\Theta_\tau(z)\big| &\leqslant \sum_{|n|<\frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,|n|\,|z|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\, n^2 \frac{t}{2}} \\
&\leqslant \sum_{|n|<\frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,\frac{4|z|}{t}\,|z|} + \text{même constante} \\
[-\pi n^2 t \leqslant -\pi n^2 \tfrac{t}{2}] \qquad &\leqslant e^{\frac{8\pi|z|^2}{t}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\frac{n^2 t}{2}} + \text{même constante} \right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat en prenant :

$$\mathrm{B} := \frac{8\,\pi}{t} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} := 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\, n^2 \frac{t}{2}}.$$

Ainsi, cette inégalité $\big|\Theta_\tau(z)\big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|^2}$ dit que Θ_τ est d'ordre $\leqslant 2$.

(c) Pour cette fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau}\, \frac{e^{2i\pi n z}}{2i\pi n},$$

de toute façon, comme $\frac{1}{2\pi|n|} \leqslant 1$, cela améliore les inégalités de la Question **(a)**, donc f est *aussi* holomorphe entière.

Pour $z = x \in \mathbb{R}$, clairement, le premier terme z de $f(z)$ tend vers l'infini quand $x \longrightarrow \infty$, tandis que la (grosse) série demeure en fait bornée (!) :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau}\, \frac{e^{2i\pi n x}}{2i\pi n} \right| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{-\pi n^2 t}\, \frac{1}{2\pi|n|} \\
&=: \mathrm{E} < \infty,
\end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \geqslant \lim_{x\to\infty} \big(x - \mathrm{E}\big) = \infty.$$

Par conséquent, cette fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est *non constante*.

(d) Comme cette série $f(z)$ de fonctions holomorphes converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, on peut la dériver terme à terme pour reconnaître :

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau}\, \frac{2i\pi n\, e^{2i\pi n z}}{2i\pi n} \\
\text{[Kaboom !]} \qquad &= \Theta_\tau(z).
\end{aligned}$$

Comme f est non constante, Θ_τ est *non identiquement nulle*.

(e) En effet, transformons $\Theta_\tau(z+m\,\tau)$ en cherchant à faire apparaître $\Theta_\tau(z)$, grâce à une translation de la variable de sommation :

$$\begin{aligned}
\Theta_\tau\big(z+m\,\tau\big) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}\, e^{2i\pi\, n(z+m\tau)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau+2i\pi nm\tau}\, e^{2i\pi nz} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\,[(n+m)^2-m^2]\,\tau}\, e^{2i\pi\,[n+m-m]\,z} \\
[n+m=:k] \qquad &= e^{-i\pi m^2\tau}\, e^{-2i\pi mz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\pi k^2\tau}\, e^{2i\pi kz} \\
&= e^{-i\pi m^2\tau}\, e^{-2i\pi mz}\, \Theta_\tau(z).
\end{aligned}$$

(f) D'après la Question **(b)**, l'ordre de Θ_τ est $\leqslant 2$.

Par l'absurde, supposons que cet ordre est < 2, à savoir, supposons l'existence de $\rho < 2$ et de deux constantes tels que :

$$\mathrm{C}\, e^{\mathrm{D}\,|z|^\rho} \;\geqslant\; \big|\Theta_\tau(z)\big| \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Comme $\Theta_\tau \not\equiv 0$, le principe des zéros isolés fournit un $x_0 \in \mathbb{R}$ réel en lequel $\Theta_\tau(x_0) \neq 0$. Alors en appliquant l'égalité qui précède aux points $x_0 + m\,\tau$ avec $m \in \mathbb{Z}$ quelconque, nous obtenons une minoration :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}\, e^{\mathrm{D}\,|x_0+m\,\tau|^\rho} &\geqslant \big|\Theta_\tau(x_0+m\,\tau)\big| \\
&= \Big|e^{-i\pi m^2\tau}\, e^{-2i\pi mx_0}\, \Theta_\tau(x_0)\Big| \\
&= e^{\pi m^2 t} \cdot 1 \cdot \big|\Theta_\tau(x_0)\big|,
\end{aligned}$$

qui se métamorphose en une contradiction quand $m \longrightarrow \infty$, car $m \longmapsto m^\rho$ à gauche croît moins rapidement que $m \longmapsto m^2$ à droite.

5. Examen 3

Exercice 1. On note $C := \big\{z = x + i\,y \in \mathbb{C}\colon\ x^2 + y^2 = 1\big\}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. L'objectif est de calculer des intégrales de la forme :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\ \sin t\big)\,dt,$$

où R est une fraction rationnelle à coefficients réels :

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{avec deux polynômes } P(x,y),\ Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y],$$

dont le dénominateur $Q(x,y)$ n'a pas de pôle sur C, c'est-à-dire que $Q\big|_C \neq 0$. À $R(x,y)$, on associe la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{i\,z}\,R\Big(\frac{z^2+1}{2\,z},\ \frac{z^2-1}{2i\,z}\Big).$$

On rappelle que C est le bord du disque unité $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$.

(a) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\ \sin t\big)\,dt = 2i\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathsf{Res}_f(z_0).$$

Indication: Écrire $z = e^{it}$ sur le cercle unité C.

(b) Pour un paramètre réel $a > 1$, soit l'exemple :

$$R(x,y) := \frac{1}{a+y}.$$

Déterminer les deux pôles z_1 et z_2 de la fonction $f(z)$ associée, avec $|z_1| < |z_2|$. Indication: Ne pas faire d'erreur de calcul ! z_1 et z_2 sont tous deux imaginaires purs.

(c) Calculer $\mathsf{Res}_f(z_1)$ en fonction de z_1 et de z_2.

(d) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur le disque unité $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\big\}$ qui est *bornée*, au sens où il existe une constante $\mathrm{M} < \infty$ telle que $\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. On suppose que $f\big(r\,e^{i\theta}\big)$ converge vers 0 lorsque $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, *uniformément* pour $t \in \big[0, \frac{\pi}{4}\big[$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,r_\varepsilon < 1 \quad \Big(r_\varepsilon < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|f\big(r\,e^{it}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\,t \in \big[0, \tfrac{\pi}{4}\big[\Big).$$

(a) On introduit la fonction auxiliaire définie par :

$$g(z) := \prod_{k=0}^{7} f\big(z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Vérifier que $g \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$.

(b) Montrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon < 1 \quad \Big(r_\varepsilon < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|g\big(r\, e^{i\theta}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}\Big).$$

(c) Montrer que $g \equiv 0$.

(d) Montrer que $f \equiv 0$.

(e) Tout cela serait-il encore vrai si, pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, on supposait que $f\big(r\, e^{i\theta}\big)$ converge vers 0 lorsque $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, uniformément pour tout $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2n}\big[$ **?**

Exercice 3. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, soit un ouvert Ω qui contient le demi-plan supérieur fermé :

$$\Omega \supset \overline{\mathbb{H}}^+ := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Im}\, z \geqslant 0\big\}.$$

Soit aussi une fonction holomorphe dans cet ouvert :

$$f \in \mathscr{O}\Big(\Omega \backslash \big\{a_1, \ldots, a_{\mathrm{K}}\big\}\Big),$$

en-dehors d'un nombre fini $\mathrm{K} \geqslant 1$ de points $a_1, \ldots, a_{\mathrm{K}} \in \mathbb{H}^+$ tous contenus dans le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{H}^+ := \big\{\mathsf{Im}\, z > 0\big\}$. L'objectif est de démontrer que :

$$\lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx \ = \ 2i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathsf{Res}\,\big(f(z) e^{iz},\, a_k\big),$$

sous l'hypothèse que :

$$0 \ = \ \lim_{r \to \infty} \max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \big|f\big(r\, e^{i\theta}\big)\big|,$$

et d'appliquer ensuite cette formule générale dans un cas spécifique concret.

(a) Soient deux angles $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$, soit un rayon $r_1 > 0$, et soit une fonction h continue dans le secteur angulaire fermé :

$$\overline{S}^{r_1}_{\theta_1, \theta_2} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ r_1 \leqslant |z|,\ \ \theta_1 \leqslant \mathsf{Arg} z \leqslant \theta_2\big\}.$$

Dessiner soigneusement ce secteur $\overline{S}^{r_1}_{\theta_1, \theta_2}$.

(b) Sans chercher à la démontrer au moyen d'inégalités, justifier par un dessin accompagné d'explications éclairantes l'inégalité classique suivante, valable pour tout $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\sin \theta \ \geqslant \ \frac{2}{\pi}\, \theta.$$

(c) Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta}\, r\, d\theta \ \leqslant \ \frac{\pi}{2}.$$

(d) Soit une fonction continue $h \in \mathscr{C}^0\big(\overline{S}^{r_1}_{\theta_1, \theta_2}\big)$. On introduit, pour tout rayon $r \geqslant r_1$, les quantités :

$$M_h(r) \ = \ \max_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \big|h\big(r\, e^{i\theta}\big)\big|,$$

ainsi que les arcs de cercle :

$$C^r_{\theta_1, \theta_2} := \big\{r\, e^{i\theta}\colon\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\big\}.$$

Montrer que :

$$\left| \int_{C^r_{\theta_1,\theta_2}} h(z)\, e^{iz}\, dz \right| \leqslant M_h(r) \cdot \pi.$$

(e) En déduire que :

$$0 = \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^\pi f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\, e^{i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(f) Conclure, en détaillant précisément tous les arguments, que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathsf{Res}\big(f(z)e^{iz},\, a_k\big).$$

(g) Montrer, pour tout $r \geqslant 4$, que :

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{1}{r\, e^{i\theta}} + \frac{1}{(r\, e^{i\theta})^2}} \right| \leqslant 2,$$

et ensuite, déterminer les deux racines complexes a et b du polynôme $z^2 + z + 1$.

(h) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + x + 1}\, dx = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\cos\tfrac{1}{2} - i \sin\tfrac{1}{2}\Big).$$

Exercice 4. Sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, le célèbre *Théorème de Weierstrass* stipule que toute fonction continue $f \in \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ peut être approximée à volonté en norme uniforme par de simples polynômes :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P = P_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{tel que} \quad \max_{x\in[a,b]} \big|f(x) - P(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Existe-t-il un résultat similaire en Analyse Complexe ? Tout devient 2-dimensionnel ! On va regarder un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$, éventuellement d'intérieur non vide, et des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage ouvert $\Omega \supset K$, éventuellement très « resserré » autour de K. Dans ces circonstances, a-t-on :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon\,\textbf{?}$$

Cela serait un résultat remarquable, car les polynômes sont des objets globaux, définis pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(a) Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ à coefficients complexes $a_n \in \mathbb{C}$, dont le rayon de convergence R satisfait :

$$0 < \mathrm{R} < \infty.$$

Justifier, pour tout $\delta > 0$, l'existence d'un (grand) entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, on ait :

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} + \delta.$$

(b) Soit un compact $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ contenu dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ de rayon R centré en l'origine $0 \in \mathbb{C}$. Vérifier qu'il existe $0 < r < \mathrm{R}$ tel que $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$.

(c) En choisissant $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$q := \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)\, r < 1,$$

montrer, pour tout $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, l'inégalité valable quel que soit $z \in K$:

$$\Big|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\Big| \leqslant q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q}.$$

(d) En raisonnant très précisément, toujours avec $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ compact, établir la propriété attendue :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 5. Soit $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ le disque de rayon $\mathrm{R} > 1$ centré en $0 \in \mathbb{C}$, et soit un point $\zeta_0 \in C = \partial\mathbb{D}_1$ sur le cercle unité, *i.e.* avec $|\zeta_0| = 1$. L'objectif est d'étudier les fonctions méromorphes $f \in \mathscr{M}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}} \backslash \{\zeta_0\}\big)$ qui ont un unique pôle simple (d'ordre 1) en ζ_0.

(a) Faire une figure, et justifier que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ se développe à l'origine en une série entière qui converge pour $|z| < 1$.

(b) Montrer qu'il existe une constante non nulle $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que la fonction auxiliaire :

$$g(z) := f(z) - \frac{\alpha}{z - \zeta_0}$$

soit holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Comment appelle-t-on α ?

(c) Montrer que les coefficients b_n du développement en série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ satisfont $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Montrer que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, puis établir que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \zeta_0$, et enfin, interpréter intelligemment ce résultat.

Exercice 6. [Sans indications] Sur le cercle unité $C := \big\{|z| = 1\big\}$, soient $n \geqslant 1$ points $w_1 = e^{it_1}, \ldots, w_n = e^{it_n}$ avec $0 \leqslant t_k < 2\pi$ pour $k = 1, \ldots, n$.

(a) Trouver (au moins) un point $z^* = e^{i\theta^*} \in C$ satisfaisant :

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \big|z^* - w_k\big| = 1.$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. **(a)** Quand $z \in C$, on peut écrire avec $t \in \mathbb{R}$:

$$z = e^{it},$$

de sorte que :

$$\cos t = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \qquad \sin t = \frac{1}{2\,i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \qquad dt = \frac{dz}{i\,z},$$

et l'intégrale à étudier devient :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt &= \int_C R\bigg(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big),\ \frac{1}{2\,i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\bigg)\frac{dz}{i\,z} \\ &= \int_C f(z)\, dz.\end{aligned}$$

Comme cette fonction R est méromorphe dans $\mathbb{C}$, sans pôles sur le cercle unité $C = \partial\mathbb{D}$, le théorème des résidus donne effectivement :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathsf{Res}_f(z_0),$$

cette dernière somme étant finie, parce que $\mathsf{Res}_f(z_0) = 0$ dès que f est holomorphe au voisinage de z_0, et parce que f, qui est par construction une fraction rationnelle, n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbb{D}$.

(b) Avec $y = \frac{z^2-1}{2i\,z}$ sur le cercle C, il vient :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i\,z}\,\frac{1}{a + \frac{z^2-1}{2i\,z}} \\ &= \frac{1}{i\,z}\,\frac{2i\,z}{a\,2i\,z + z^2 - 1} \\ &= \frac{2}{z^2 + 2ia\,z - 1}.\end{aligned}$$

Les deux racines du polynôme du second degré au dénominateur sont, d'après les babyloniens :

$$z_1 := -\,i\,a + i\,\sqrt{a^2-1} \qquad \text{et} \qquad z_2 := -\,i\,a - i\,\sqrt{a^2-1},$$

et elles sont bien imaginaires pures, avec même :

$$|z_1| < 1 < |z_2|.$$

(c) Comme le pôle z_1 est d'ordre 1, et comme on peut factoriser :

$$f(z) = \frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

le résidu demandé vaut :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}_f(z_1) &= \lim_{z\to z_1} \big(z-z_1\big)\, f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1} \underline{\big(z-z_1\big)}_{\circ}\, \frac{2}{\underline{(z-z_1)}_{\circ}(z-z_2)} \\
&= \frac{2}{z_1-z_2}.
\end{aligned}$$

(d) D'après la Question **(a)**, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin t}\, dt &= \int_C \frac{2}{z^2+2ia\,z-1}\, dz \\
&= 2i\pi\, \mathsf{Res}_f(z_0) \\
&= 2i\pi\, \frac{2}{z_1-z_2} \\
&= 2i\pi\, \frac{2}{-i\,a+i\sqrt{a^2-1}-\big(-i\,a-i\sqrt{a^2-1}\big)} \\
&= \underline{2i}_{\circ}\, \pi\, \frac{2}{\underline{2i}_{\circ}\sqrt{a^2-1}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. (a) Cette fonction-produit est constituée de 8 facteurs $f\big(z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)$. Comme $\big|z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big| = |z|$, chacun de ces facteurs est holomorphe dans $\mathbb{D}$, puisque f l'est, et ainsi, $g \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$.

(b) Découpons le cercle unité $C = \big\{e^{i\theta}\colon\ \theta \in \mathbb{R}\big\}$ en les 8 morceaux disjoints recouvrants de longueur $\frac{\pi}{4}$:

$$\big[0, 2\pi\big[\;=\; \bigcup_{0\leqslant k\leqslant 7} \Big[k\,\tfrac{\pi}{4},\ (k+1)\tfrac{\pi}{4}\Big[.$$

Ainsi, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ fixé, il existe un unique entier $\ell = \ell(\theta) \in \big\{0, 1, 2, \ldots, 7\big\}$ tel que :

$$\ell(\theta)\,\tfrac{\pi}{4} \;\leqslant\; \theta \;<\; \big(\ell(\theta)+1\big)\,\tfrac{\pi}{4}.$$

Autrement dit, les nombres réels :

$$t(\theta) \;:=\; \theta - \ell(\theta)\,\tfrac{\pi}{4} \qquad\qquad \text{satisfont toujours :} \quad 0 \;\leqslant\; t(\theta) \;<\; \tfrac{\pi}{4}.$$

Alors l'inégalité/majoration utilisant le fait que f est bornée :

$$\begin{aligned}
\big|g\big(r\,e^{i\theta}\big)\big| &= \prod_{0\leqslant k\leqslant 7}\Big|f\big(r\,e^{i\theta}\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)\Big| \\
&= \Big|f\big(r\,e^{i\theta}\,e^{-i\,\frac{\ell(\theta)\pi}{4}}\big)\Big| \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 7\\ k\neq \ell(\theta)}}\Big|f\big(r\,e^{i\theta}\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)\Big| \\
&\leqslant \Big|f\big(r\,e^{i(\theta-\frac{\ell(\theta)\pi}{4})}\big)\Big|\ \mathrm{M}^7 \\
&= \underbrace{\big|f\big(r\,e^{it(\theta)}\big)\big|}_{\substack{\text{converge}\\ \text{uniformément}\\ \text{vers } 0 \text{ quand } r\to 1^-}}\ \mathrm{M}^7,
\end{aligned}$$

fait voir grâce à la convergence uniforme vers 0 valable pour $0 \leqslant t(\theta) < \frac{\pi}{4}$ qui est notre hypothèse, que $g\big(r\,e^{i\theta}\big)$ converge uniformément vers 0, pour *tout* $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Avant de poursuivre en nous précipitant trop vite vers la question suivante, observons que ceci implique que g se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{D}}$, comme fonction identiquement nulle sur le cercle unité $C = \partial\mathbb{D} = \partial\overline{\mathbb{D}}$.

(c) Un théorème vu en cours énonce que sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ *borné* — ce qui signifie que son adhérence $\overline{\Omega}$ est un compact de $\mathbb{C}$ —, toute fonction holomorphe $h \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$ continue jusqu'au bord atteint toujours son maximum sur la frontière du domaine :

$$\max_{z\in\overline{\Omega}}\big|h(z)\big| \;=\; \max_{z\in\partial\Omega}\big|h(z)\big|.$$

Ici avec $h := g$ et avec $\Omega := \mathbb{D}$, il vient sans effort au vu du résultat de la question précédente :

$$\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\big|g(z)\big| \;=\; \max_{z\in\partial\mathbb{D}}\big|g(z)\big| \;=\; 0,$$

donc $g \equiv 0$, effectivement !

(d) On raisonne par l'absurde en appliquant le principe des zéros isolés.

Si donc $f \not\equiv 0$ n'était *pas* identiquement nulle, alors chacune de nos 8 fonctions $f_k(z) := f\big(z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big) \not\equiv 0$ ne le serait pas non plus, pour tout $k \in \big\{0, 1, 2, \ldots, 7\big\}$.

Or puisque l'ensemble des zéros de toutes ces f_k :

$$\boldsymbol{Z}_{f_k} \;:=\; \big\{z_0 \in \mathbb{D}\colon\ f_k(z_0) = 0\big\} \qquad (0\leqslant k\leqslant 7),$$

serait alors nécessairement *discret* dans $\mathbb{D}$ à cause du principe d'identité, en restreignant les considérations à un sous-disque compact fixé $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}$ avec $0 < r < 1$, on aurait alors la *finitude* de l'ensemble de ces zéros :

$$\mathsf{Card}\,\big(\boldsymbol{Z}_{f_k} \cap \overline{\mathbb{D}}_r\big) \;<\; \infty \qquad (1\leqslant k\leqslant 8).$$

Mais comme $g = f_0 f_1 f_2 \cdots f_7$ est un simple produit fini manufacturé, il est clair que :

$$\boldsymbol{Z}_g \;=\; \boldsymbol{Z}_{f_0} \cup \boldsymbol{Z}_{f_1} \cup \boldsymbol{Z}_{f_2} \cup \cdots \cup \boldsymbol{Z}_{f_7},$$

et puisque nous avons démontré (sans erreur !) dans la question précédente que $g \equiv 0$, nous déduirions de toutes ces fariboles une recette farfelue de cuisine géométrique :

$$\overline{\mathbb{D}}_r \;=\; \bigcup_{\text{finie}}\big\{\text{Nombre fini de points}\big\}$$

permettant de remplir par magie un disque de rayon > 0 avec un nombre fini de points, ce qui devient du « *Grand n'importe Nawak* » !

Contradiction, donc, fatale s'il en est, qui nous permet de conclure que $f \equiv 0$.

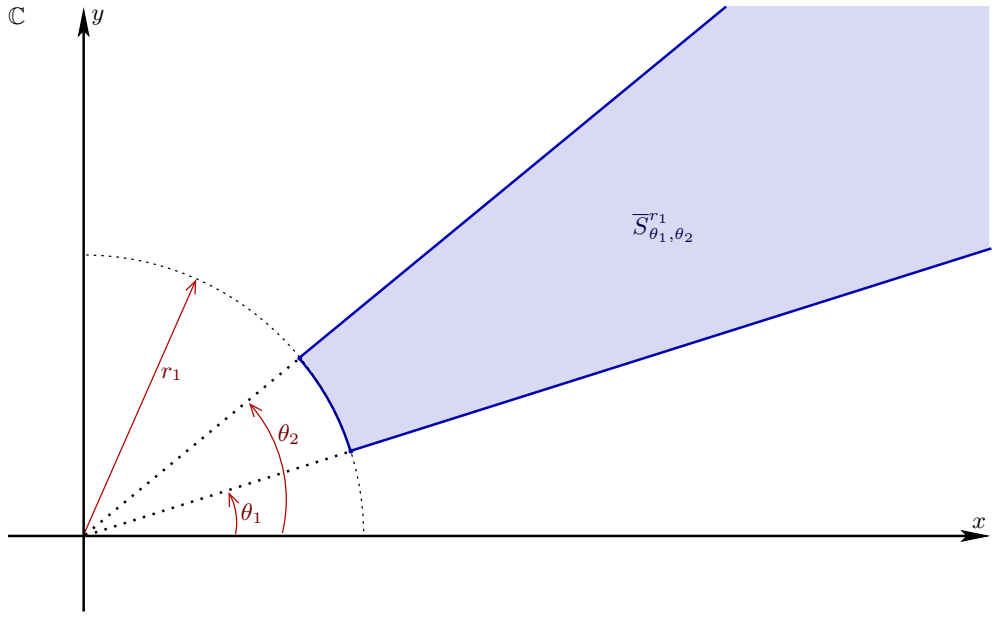
(e) Oui, très certainement ! Il suffit de procéder de manière entièrement similaire, en découpant :

$$\big[0, 2\pi\big[\;=\; \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} \Big[k\,\tfrac{2\pi}{n},\, (k+1)\,\tfrac{2\pi}{n}\Big[,$$

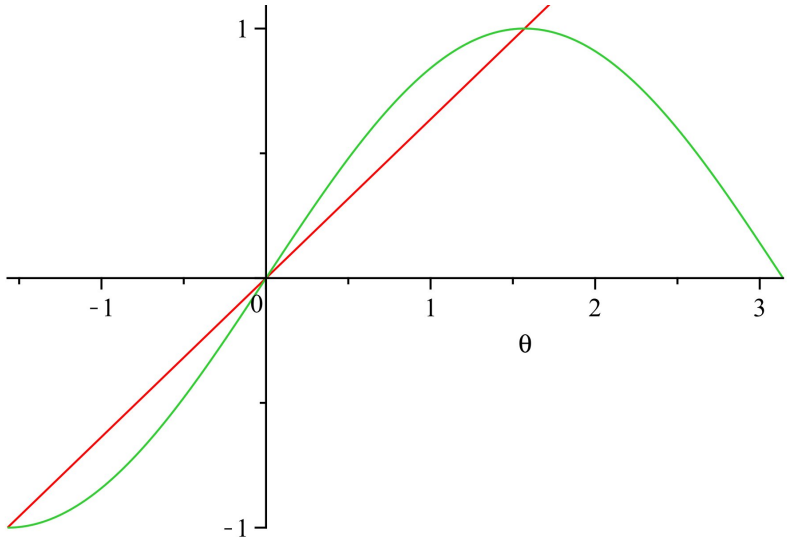
et en introduisant la fonction holomorphe auxiliaire :

$$g(z) \;:=\; \prod_{k=0}^{n-1} f\big(z\, e^{-i\frac{k2\pi}{n}}\big).$$

Exercice 3. **(a)** Voici une représentation de $\overline{S}^{r_1}_{\theta_1,\theta_2}$.



(b) Le graphe de la fonction $\theta \longmapsto \sin\theta$ se trouve *au-dessus* de la corde (du segment) délimité par l'origine $(0,0)$ et par le point $\big(\frac{\pi}{2}, 1\big)$, comme le montre la figure suivante, générée sur machine.



(c) Après l'avoir inversée, on utilise la majoration qui vient d'être rappelée :

$$-\sin\theta \leqslant -\frac{2}{\pi}\,\theta,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta &\leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-r\,\frac{2}{\pi}\,\theta}\, r\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{-\,\underline{r}_\circ\,\frac{2}{\pi}}\, e^{-r\,\frac{2}{\pi}\,\theta}\, \underline{r}_\circ\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\,\big(-\,e^{-r}+1\big) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(d) On majore petit à petit, avec des explications précises :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C^r_{\theta_1,\theta_2}} h(z)\, e^{iz}\, dz\right| &\leqslant \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h\big(r\,e^{i\theta}\big)\, e^{i\,r\,e^{i\theta}}\, ir\, e^{i\theta}\, d\theta\right| \\
&\leqslant \max_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} \big|h\big(r\,e^{i\theta}\big)\big| \cdot \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\,r\cos\theta - r\sin\theta}\, ir\, e^{i\theta}\, d\theta\right| \\
[|e^{ir\cos\theta}| = |i\,e^{i\theta}| = 1] \qquad &\leqslant M_h(r)\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta \\
[0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant\pi] \qquad &\leqslant M_h(r)\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta \\
[\sin(\pi-\theta)=\sin\theta] \qquad &= M_h(r)\,2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta \\
[\text{Question (c)}] \qquad &\leqslant M_h(r)\cdot\pi.
\end{aligned}$$

(e) Avec les choix de $\theta_1 := 0$, de $\theta_2 := \pi$ et de $r := \mathrm{R} \geqslant r_1$, les arcs $C^{\mathrm{R}}_{0,\pi}$ sont des demi-cercles fermés contenus dans $\overline{\mathbb{H}}^+$:

$$C^{\mathrm{R}}_{0,\pi} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = \mathrm{R},\ \ \mathsf{Im}\, z \geqslant 0\big\} \subset \overline{\mathbb{H}}^+.$$

Pourvu que :

$$\mathrm{R} \geqslant r_1 := 1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} \big|a_k\big|,$$

toutes les restrictions de f à ces demi-cercles :

$$h := f\big|_{C^{\mathrm{R}}_{0,\pi}},$$

sont continues, et alors la Question **(c)** précédente s'applique pour aider à majorer l'intégrale par une quantité :

$$\begin{aligned}\bigg|\int_0^\pi f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\, e^{i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}\, d\theta\bigg| &= \bigg|\int_{C^{\mathrm{R}}_{0,\pi}} f(z)\, e^{iz}\, dz\bigg| \\ &\leqslant \underbrace{\max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \big|f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|}_{\xrightarrow[\mathrm{R} \to 0]{} 0} \cdot \pi,\end{aligned}$$

qui tend vers zéro, grâce à l'hypothèse faite au début de cet Exercice.

(f) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, soit le contour orienté dans le sens trigonométrique :

$$\big[-\mathrm{R}, \mathrm{R}\big] \cup C^+_{\mathrm{R}},$$

consistant en le segment réel $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, suivi du demi-cercle supérieur de rayon R, que nous noterons en abrégé :

$$C^+_{\mathrm{R}} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = \mathrm{R},\ \ \mathsf{Im}\, z \geqslant 0\big\}.$$

Dès que :

$$\mathrm{R} \geqslant 1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} \big|a_k\big|,$$

ce contour ne rencontre pas les points (éventuellement) singuliers $a_1, \ldots, a_{\mathrm{K}}$ de la fonction $f \in \mathscr{O}\big(\Omega \big\backslash \big\{a_1, \ldots, a_{\mathrm{K}}\big\}\big)$, et donc, le théorème des résidus donne :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}] \cup C^+_{\mathrm{R}}} f(z)\, e^{iz}\, dz = 2i\pi \sum_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} \mathsf{Res}\,\big(f(z) e^{iz},\, a_k\big).$$

Or cette intégrale curviligne se décompose en deux morceaux :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}] \cup C^+_{\mathrm{R}}} f(z)\, e^{iz}\, dz = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx + \underbrace{\int_{C^+_{\mathrm{R}}} f(z)\, e^{iz}\, z}_{\xrightarrow[\mathrm{R} \to \infty]{} 0},$$

dont le deuxième vient d'être vu comme disparaissant dans les limbes du zéro absolu, quand $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, et donc, nous obtenons bien :

$$\lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2i\pi \sum_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} \mathsf{Res}\,\big(f(z) e^{iz},\, a_k\big),$$

toujours sous l'hypothèse principale que :

$$0 = \lim_{r \to \infty} \max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \big|f\big(r\, e^{i\theta}\big)\big|.$$

(g) En effet :

$$\left|\frac{1}{1+\frac{1}{r\,e^{i\theta}}+\frac{1}{(r\,e^{i\theta})^2}}\right| \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{2}{r}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{2}{4}} \leqslant 2.$$

Ensuite, encore grâce à ces imbéciles anciens de babyloniens qui n'arrêtent pas de nous rappeler que leurs mathématiques étaient déjà très évoluées, plus de 4 000 ans avant nous, les deux racines du polynôme z^2+z+1 sont :

$$a := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad b := \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

ce qui fait que grâce à eux, on peut encore prendre 0,5 points « gratos » sur un sujet de L3 MFA !

(h) Tout d'abord, comme $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx<\infty$ converge et comme $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx<\infty$ converge aussi, l'intégrale considérée sur $\mathbb{R}=]-\infty,\infty[$ de la fonction continue $x\longmapsto\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}$ existe bien, c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{-\infty\leftarrow \mathrm{S}\\ \mathrm{R}\to\infty}}\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx \overset{\text{déf}}{=:} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx$$

existe, d'où en particulier en prenant $\mathrm{S}=-\mathrm{R}$:

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}.$$

La fonction $z\longmapsto\frac{1}{z^2+z+1}$ possède la propriété à laquelle sont soumises les conclusions précédentes, à savoir elle satisfait bien :

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left|\frac{1}{(r\,e^{i\theta})^2+r\,e^{i\theta}+1}\right| &= \lim_{r\to\infty}\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\frac{1}{|r\,e^{i\theta}|^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{r\,e^{i\theta}}+\frac{1}{(r\,e^{i\theta})^2}}\\ &\leqslant \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\cdot 2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc en observant que seul $a=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ appartient à $\mathbb{H}^+$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx &= \lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx\\ &= 2i\pi\,\mathsf{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{z^2+z+1},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big).\end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à calculer soigneusement ce résidu sans se tromper :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Res}\,\big(f(z)e^{iz},\,a\big) &= \lim_{z\to a}\underline{\big(z-a\big)}_{\circ}\,\frac{e^{iz}}{\underline{(z-a)}_{\circ}\,(z-b)}\\
&= \frac{e^{i\,a}}{a-b}\\
&= \frac{e^{i\,\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}}{-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}-\left(-\,\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\\
&= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\left(\cos\left(-\,\frac{1}{2}\right)+i\,\sin\left(-\,\frac{1}{2}\right)\right)}{i\,\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

d'où la valeur recherchée :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx \;=\; \frac{2i\pi\,e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{i\,\sqrt{3}}\,\Big(\cos\tfrac{1}{2}-i\,\sin\tfrac{1}{2}\Big).$$

Exercice 4. **(a)** D'après le cours, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}\,a_n\,z^n$ est défini par :

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\;:=\;\limsup_{n\to\infty}\,\sqrt[n]{|a_n|},$$

et alors la définition de la limite supérieure fournit bien, pour tout $\delta>0$, un entier $\mathrm{N}(\delta)\gg 1$ tel que :

$$n\;\geqslant\;\mathrm{N}(\delta)\qquad\qquad\Longrightarrow\qquad\qquad\sqrt[n]{|a_n|}\;\leqslant\;\frac{1}{\mathrm{R}}+\delta.$$

(b) D'après un théorème du cours, la distance entre K et le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ est strictement positive, et il suffit alors de prendre r satisfaisant :

$$0\;<\;\mathrm{R}-r\;<\;\mathsf{dist}\,\big(K,\,\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big).$$

(c) En effet, l'inégalité triangulaire suivie de la sommation d'une série géométrique offre :

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty}a_n\,z^n\Big| &\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty}\big|a_n\big|\,|z|^n\\
[z\in K\implies |z|\leqslant r]\qquad\qquad &\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty}\Big(\frac{1}{\mathrm{R}}+\delta\Big)^n\,r^n\\
&= q^{\mathrm{N}}\,\sum_{m=0}^{\infty}q^m\\
&\leqslant q^{\mathrm{N}}\,\frac{1}{1-q}.
\end{aligned}$$

(d) L'attente au tournant de l'étudiant par le professeur était la suivante : il ne fallait pas oublier de justifier tout d'abord, en vertu d'un théorème du cours, que toute fonction holomorphe $f\in\mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big)$ a une série de Taylor en tout point $z_0\in\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ qui converge au moins dans le plus grand disque centré en z_0 qui est contenu dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Au point $z_0=0$, ce plus grand disque coïncide avec $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, et donc en vertu de ce résultat, la fonction f est représentée par une série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\,a_n\,z^n$ qui converge dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, ce qui fait que les considérations précédentes s'appliquent.

Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Toujours avec $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, avec δ assez petit pour que $\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\delta\right) r = q < 1$, choisissons $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ et $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grands pour qu'on ait :

$$\begin{aligned} n \geqslant \mathrm{N}(\delta) \quad &\Longrightarrow \quad \big|a_n\big| \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\delta\right)^n, \\ \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad &\Longrightarrow \quad q^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-q} \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui est possible car $q^{\mathrm{N}} \longrightarrow 0$ quand $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. En prenant :

$$\mathrm{N} := \max\big(\mathrm{N}(\delta),\, \mathrm{N}(\varepsilon)\big),$$

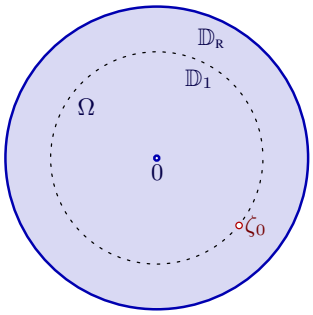
si on découpe alors la série qui représente $f(z)$ en deux morceaux :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} a_n\, z^n}_{=:\, P(z)} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n,$$

dont le premier est visiblement un polynôme de degré $\leqslant \mathrm{N}-1$, on atteint l'inégalité conclusive :

$$\begin{aligned} \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| &= \max_{z\in K} \left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\right| \\ \text{[Question (c)]} \qquad &\leqslant q^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-q} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Exercice 5. (a) D'après un théorème du cours, sur l'ouvert $\Omega := \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \setminus \{\zeta_0\}$, le développement en série entière de f converge dans le plus grand disque centré en 0 qui est contenu dans Ω. Comme $|\zeta_0| = 1$ par hypothèse, ce plus grand disque est $\big\{|z| < 1\big\} = \mathbb{D}_1$. Avoir fait la figure aura certainement aidé à deviner cette petite réponse !



(b) Puisque par hypothèse f a un pôle d'ordre 1 en ζ_0, son développement en série de Laurent autour de ζ_0 ne contient qu'une seule puissance négative de $\big(z-\zeta_0\big)$, la puissance -1. Alors avec $\alpha := \mathsf{Res}_f(\zeta_0)$ — oui, bonne réponse ! on appelle cela le *résidu* de f en ζ_0 ! —, nombre complexe non nul car il y *a* un pôle en ζ_0, quand on soustrait $f(z) \longmapsto f(z) - \frac{\alpha}{z-\zeta_0} =: g(z)$, les puissances négatives disparaissent (il y en a une seule), et par le théorème de Riemann qui caractérise les singularités illusoires, cette fonction « nettoyée » $g(z)$ devient holomorphe au voisinage de ζ_0, donc partout dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$.

(c) Ce développement converge, d'après le même théorème du cours déjà utilisé en **(a)**, dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, c'est-à-dire que le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est au moins égal à $\mathrm{R} > 1$. Or on sait que ce rayon de convergence se 'calcule' en examinant la croissance des coefficients :

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \;=\; \frac{1}{\mathsf{RCV}(g)} \;\leqslant\; \frac{1}{\mathrm{R}} \;<\; 1.$$

Le point-clé, c'est que $\frac{1}{\mathrm{R}} < 1$, *strictement*. Car par la définition même de la limite supérieure :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} + \varepsilon\Big),$$

dans laquelle on prend $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir encore $q := \frac{1}{\mathrm{R}} + \varepsilon < 1$, la conclusion tombe comme une pomme :

$$\big|b_n\big| \;\leqslant\; \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \varepsilon\Big)^n \;=\; q^n \xrightarrow{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \to \infty} = \; 0.$$

(d) Dans la relation qui lie notre gentille fonction g à la fonction f qui est à peine un peu « méchante » :

$$g(z) \;=\; f(z) - \frac{\alpha}{z - \zeta_0},$$

il reste encore à développer en série entière convergente ce qu'on a soustrait :

$$-\frac{\alpha}{z-\zeta_0} \;=\; \frac{\alpha}{\zeta_0}\,\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta_0}} \;=\; \frac{\alpha}{\zeta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{\zeta_0}\Big)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\Big)\, z^n,$$

ce développement en série géométrique étant convergent pour $\big|\frac{z}{\zeta_0}\big| = |z| < 1$, et même normalement (donc uniformément) convergent sur tout sous-disque compact $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_1$ avec $0 < r < 1$ fixé.

Grâce à cela, dans l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\Big)\, z^n,$$

nous pouvons identifier (principe d'identité) les coefficients des puissances z^n, ce qui nous donne :

$$b_n \;=\; a_n + \frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}} \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Regardons alors ces égalités droit dans les yeux : à gauche, b_n tend vers 0, et à droite, le module du dernier terme reste constant $\big|\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\big| = \frac{|\alpha|}{1^{n+1}} = |\alpha|$, puisque ζ_0 est vissé sur le cercle unité. Ainsi, grâce à l'inégalité triangulaire souvent utile $\big|\gamma - \delta\big| \geqslant \big||\gamma| - |\delta|\big|$, mais (hélas !) trop peu connue du grand public, qui permet de minorer une quantité, nous pouvons minorer :

$$\begin{aligned}\big|a_n\big| \;=\; \Big|\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}} - b_n\Big| \;&\geqslant\; \Big|\Big|\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\Big| - \big|b_n\big|\Big| \\ &=\; \Big|\big|\alpha\big| - \big|b_n\big|\Big| \;>\; \frac{1}{2}\,|\alpha| \;>\; 0\end{aligned}$$

par un plancher strictement positif à partir d'un certain rang. Nous obtenons donc l'autorisation préfectorale (!) de diviser par les $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant \mathrm{N} \gg 1$ grand.

Ensuite, après une simplification astucieuse du quotient :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \;=\; \frac{b_n - \frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}}{b_{n+1} - \frac{\alpha}{\zeta_0^{n+2}}} \;=\; \frac{\frac{b_n\,\zeta_0^{n+1}-\alpha}{\zeta_0^{n+1}}}{\frac{b_{n+1}\,\zeta_0^{n+2}-\alpha}{\zeta_0^{n+2}}} \;=\; \zeta_0\,\frac{b_n\,\zeta_0^{n+1}-\alpha}{b_{n+1}\,\zeta_0^{n+2}-\alpha},$$

la détermination de la limite demandée devient '*trop facile*' :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} \;=\; \zeta_0\lim_{n\to\infty}\frac{b_n\,\zeta_0^{n+1}-\alpha}{b_{n+1}\,\zeta_0^{n+2}-\alpha} \;=\; \zeta_0\,\frac{0-\alpha}{0-\alpha} \;=\; \zeta_0.$$

Or le critère de d'Alembert énonce que quand une telle limite existe (en module !), on retrouve le rayon de convergence de $f(z)$ que l'on connaissait déjà :

$$\mathsf{RCV}(f) \;=\; \lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big| \;=\; \big|\zeta_0\big| \;=\; 1.$$

Moralité : Quand l'holomorphie d'une série entière $\sum a_n z^n$ est « bloquée » par un seul pôle simple — ici ζ_0 de module 1 — à peine un peu « méchant », on peut « reconstituer la trace » de ce pôle en « lisant » simplement les coefficients de Taylor a_n.

Exercice 6. (a) L'idée est d'introduire la fonction polynomiale (donc holomorphe) :

$$f(z) \;:=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big(z-w_k\big).$$

Comme $|w_k| = 1$, le principe du maximum (vu en cours) appliqué à la fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})\cap\mathscr{C}^0\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$ holomorphe dans le disque unité et continue jusqu'au bord donne :

$$1 \;=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big|w_k\big| \;=\; \big|f(0)\big| \;\leqslant\; \max_{|z|=1}\big|f(z)\big|.$$

Ensuite, paramétrons donc les points $z = e^{i\theta}$ du cercle unité $C = \partial\mathbb{D}$ par la variable réelle $\theta\in\mathbb{R}$, et notons :

$$\Phi(\theta) \;:=\; \big|f(e^{i\theta})\big| \;=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big|e^{i\theta}-e^{it_k}\big|.$$

Cette fonction $\geqslant 0$ *continue* s'annule en tous les $\theta = t_k$, donc comme $n\geqslant 1$, elle s'annule au moins une fois !

Mais par ailleurs, nous venons de voir presque sans nous en rendre compte que :

$$1 \;\leqslant\; \max_{\theta\in\mathbb{R}}\Phi(\theta),$$

et par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires (niveau L1) fournit bien un réel θ^* en lequel elle vaut :

$$1 \;=\; \Phi\big(\theta^*\big) \;=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big|e^{i\theta^*}-w_k\big|.$$

7. Examen 4

Exercice 1. L'objectif ici est de produire une démonstration simplifiée, due à Landau, de la dernière partie (difficile) de la démonstration du théorème de factorisation de Hadamard pour les fonctions entières d'ordre fini. Des préliminaires sont nécessaires.

(a) Soit un rayon $\mathrm{R} > 0$, soit un ouvert $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0) = \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, et soit une fonction holomorphe $\varphi \colon \omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que $\big|\varphi(z)\big| \leqslant \mathrm{S} < \infty$ pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. Montrer que :

$$\big|\varphi(z)\big| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\,|z| \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}).$$

Indication: Utiliser $\frac{\varphi(z)}{z}$.

(b) Soient encore $\mathrm{R} > 0$ et $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ un autre ouvert. Pour toute $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ et tout rayon intermédiaire $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{R}$, on note :

$$\boldsymbol{M}_h(r) := \max_{|z|=r} \big|h(z)\big| \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{A}_h(r) := \max_{|z|=r} \operatorname{Re} h(z).$$

On note aussi $C_r := \{|z| = r\}$. On supposera toujours que $h(0) = 0$ et que h est non constante. On admettra la propriété $0 < \boldsymbol{A}_h(r) < \boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})$ pour $0 < r < \mathrm{R}$, conséquence élémentaire du principe du maximum. On introduit :

$$\varphi(z) := \frac{h(z)}{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - h(z)}.$$

Vérifier, pour $|z| = r$ et $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{R}$, que :

$$\operatorname{Re}\big(2\boldsymbol{A}_h(r) - h(z)\big) \geqslant \boldsymbol{A}_h(r),$$

et montrer que φ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}_R$.

(c) On décompose en parties réelle et imaginaire $h(z) = u(z) + i\,v(z)$. Montrer que $\big|\varphi(z)\big|^2 \leqslant 1$ pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$.

(d) Montrer que :

$$\big|h(z)\big| \leqslant \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,|z|}{\mathrm{R} - |z|}.$$

(e) En déduire l'*inégalité de Borel-Carathéodory*, valable pour tout rayon $0 \leqslant r < \mathrm{R}$:

$$\boldsymbol{M}_h(r) \leqslant \frac{r + r}{\mathrm{R} - r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(f) Maintenant, on souhaite généraliser cette inégalité aux dérivées de h d'ordre quelconque. Soit un rayon intermédiaire quelconque $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, et soit $z \in C_r$ arbitraire. On pose :

$$\rho := \tfrac{\mathrm{R}-r}{2},$$

et on introduit :

$$C_\rho(z) := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - z| = \rho\big\}.$$

Dresser une figure élégante.

(g) Montrer que :

$$\max_{|\zeta-z|=\rho} \big|h(\zeta)\big| \;\leqslant\; \frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(h) Montrer que pour tout $0 \leqslant r < \mathrm{R}$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\max_{|z|=r} \big|h^{(n)}(z)\big| \;\leqslant\; \frac{2^{n+2}\,n!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{n+1}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(i) Maintenant, soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe entière avec $f(0) = 1$ dont l'ordre de croissance $\rho_f < \infty$ est fini. Soit $\kappa := \mathsf{Ent}\,\rho_f$, d'où $\kappa \leqslant \rho_f < \kappa + 1$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, en posant $\rho := \rho_f + \varepsilon$, on a encore $\kappa \leqslant \rho < \kappa + 1$, et il existe par définition une constante $C > 0$ telle que :

$$\big|f(z)\big| \;\leqslant\; C\,e^{|z|^\rho} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

On suppose que f possède un nombre *infini* de zéros isolés $\big\{a_n\big\}_{n=1}^\infty$ ordonnés par modules croissants $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ et répétés ν fois aux zéros d'ordre $\nu \geqslant 2$. Ainsi, $f(z) = 0$ si et seulement si $z = a_n$ pour un $n \geqslant 1$.

En cours au tableau, on a démontré que :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|^{\kappa+1}} \;<\; \infty.$$

Ensuite dans le polycopié, en introduisant les facteurs canoniques à exponentielle polynomiale de degré κ :

$$E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \;:=\; \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\,e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,(\frac{z}{a_n})^\kappa},$$

on a aussi démontré la convergence normale sur les compacts de $\mathbb{C}$ du produit infini :

$$\Pi(z) \;=\; \prod_{n=1}^\infty E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big).$$

Comme $f(z)$ et $\Pi(z)$ ont les mêmes zéros, les singularités de $\frac{f(z)}{\Pi(z)}$ sont éliminables, cette fonction n'a aucun zéro, d'où il découle comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe que son logarithme existe, et par conséquent on peut écrire :

$$f(z) \;=\; e^{Q(z)} \prod_{n=1}^\infty E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \;=\; e^{Q(z)} \prod_{n=1}^\infty \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\,e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,(\frac{z}{a_n})^\kappa},$$

au moyen d'une certaine fonction holomorphe entière $Q \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

En admettant ces résultats, la fin difficile de la démonstration du Théorème de factorisation de Hadamard consistait à établir que $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est alors nécessairement un polynôme de degré $\leqslant \kappa$. Les arguments qui suivent, dus à Landau et tirés du traité de Titchmarsh, offrent une alternative élégante à la démonstration originale vue en cours.

Justifier très rapidement la formule dans $\mathbb{C}\big\backslash\big\{a_n\big\}_{n=1}^\infty$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; Q'(z) + \sum_{n=1}^\infty \bigg(-\,\frac{1}{a_n - z} + \frac{d}{dz}\Big[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,\big(\frac{z}{a_n}\big)^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,\big(\frac{z}{a_n}\big)^\kappa\Big]\bigg).$$

(j) Soit un rayon arbitraire $\mathrm{R} > 0$. On introduit la fonction :

$$g_{\mathrm{R}}(z) \,:=\, \frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)}.$$

Montrer qu'il existe un ouvert $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0)$ et une fonction holomorphe $h_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\omega)$ avec $h_{\mathrm{R}}(0) = 0$ satisfaisant $e^{h_{\mathrm{R}}(z)} = g_{\mathrm{R}}(z)$.

(k) Montrer qu'en tout point $z \in \omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, on a :

$$Q^{(\kappa+1)}(z) \,=\, h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z) + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}.$$

Indication: On admettra, sans chercher à la justifier, la dérivabilité terme à terme.

(l) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 2\,\mathrm{R}$, on a :

$$\big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \,\leqslant\, C\, e^{(2\,\mathrm{R})^{\rho}}.$$

(m) Montrer que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$ avec $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, on a :

$$\big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| \,\leqslant\, \frac{2^{\kappa+3}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{\kappa+2}}\,\big[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^{\rho}\big].$$

(n) Démontrer que $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant \kappa$.

Exercice 2. Pour deux rayons quelconques $\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1 > 0$ et deux autres rayons quelconques $\mathrm{R}_2' > \mathrm{R}_1' > 0$, on introduit dans l'espace des $z = x + i\,y$ et dans l'espace des $z' = x' + i\,y'$ les anneaux ouverts :

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\big\} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{A}'_{\mathrm{R}_1',\mathrm{R}_2'} \,:=\, \big\{z' \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{R}_1' < |z'| < \mathrm{R}_2'\big\}.$$

Les anneaux fermés où les '$<$' sont remplacés par des '$\leqslant$' seront notés $\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$ et $\overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{R}_1',\mathrm{R}_2'}$.

Grâce au biholomorphisme $z \longmapsto \frac{z}{\mathrm{R}_1}$ de $\mathbb{C}^*$ et grâce à $z' \longmapsto \frac{z'}{\mathrm{R}_1'}$, on se ramène à $\mathrm{R}_1 = 1$ et à $\mathrm{R}_1' = 1$, et on note alors $\mathrm{R} := \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1} > 1$ et $\mathrm{R}' := \frac{\mathrm{R}_2'}{\mathrm{R}_1'} > 1$.

L'objectif est d'établir qu'un anneau $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ est biholomorphe à un autre anneau $\boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$ si et seulement si $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.

On se ramène évidemment à $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R} > 1$, et on suppose donc qu'il existe un biholomorphisme $f\colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, d'inverse holomorphe $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xleftarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'} : f^{-1}$. On le note $z \longmapsto f(z) = z'$ et on note son inverse $z = f^{-1}(z') \longleftarrow z'$.

(a) Dans l'espace d'arrivée, soient des rayons intermédiaires quelconques $1 < \mathrm{P}' < \mathrm{Q}' < \mathrm{R}'$. Montrer que l'ensemble :

$$K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} \,:=\, \big\{z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}\colon\ \mathrm{P}' \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{Q}'\big\}$$

est un compact de l'ouvert $\mathrm{A}_{1,\mathrm{R}}$. Indication: Penser à f^{-1}.

(b) En notant $C_r = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = r\}$, on introduit les deux distances strictement positives :

$$d \,:=\, \mathrm{dist}\,\big(C_1,\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big) \,>\, 0 \qquad \text{et} \qquad e \,:=\, \mathrm{dist}\,\big(C_{\mathrm{R}},\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big) \,>\, 0,$$

puis on abrège :

$$\mathrm{D} \,:=\, 1 + d \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} \,:=\, \mathrm{R} - e.$$

Sur une figure de qualité, représenter précisément $A_{1,\mathrm{R}}$, f, $A'_{1,\mathrm{R}'}$, f^{-1}, $\overline{A}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, et aussi, mais dans une couleur distinctive, $A_{1,\mathrm{D}}$, $A_{\mathrm{E},\mathrm{R}}$.

(c) On considère l'application réelle $|f|\colon A_{1,\mathrm{R}} \longrightarrow]1,\mathrm{R}'[$ définie par $z \longmapsto |f(z)|$, plus simple à étudier que f. Montrer que l'ensemble :

$$|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big) \,=\, \big\{|f(z)| \in \mathbb{R}_+ \colon\, 1 < |z| < \mathrm{D}\big\},$$

est un intervalle ouvert connexe non vide, contenu ou bien dans $]1,\mathrm{P}'[$, ou bien dans $]\mathrm{Q}',\mathrm{R}'[$.

(d) * Montrer que :

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\in A_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big|$$

existe, et vaut ou bien 1, ou bien R'. Indication: Quand $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big) \subset]1,\mathrm{P}'[$, montrer que cette limite vaut 1.

(e) Après un changement éventuel d'application $f \longmapsto \frac{\mathrm{R}'}{f}$ qui échange $1 \longleftrightarrow \mathrm{R}'$, on se ramène à :

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\in A_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \,=\, 1.$$

Montrer qu'on a alors :

$$\lim_{\substack{|z|\to \mathrm{R}\\ z\in A_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \,=\, \mathrm{R}',$$

et conclure que $|f|$ se prolonge par continuité à l'anneau fermé $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$.

(f) On suppose temporairement pour simplifier que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}^n$ pour un certain entier $n \geqslant 1$. On introduit la fonction $g\colon A_{1,\mathrm{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) \,=\, z^{-n}\, f(z).$$

Montrer qu'il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que :

$$g(z) \,=\, e^{i\beta} \qquad\qquad (\forall\, z \in A_{1,\mathrm{R}}).$$

(g) En déduire que $n = 1$, et donc, que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.

(h) On traite maintenant le cas général où $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R} > 1$ n'est pas forcément égal à une puissance R^n. On introduit :

$$\mathsf{p} \,:=\, \frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \phi(z) \,:=\, \frac{|f(z)|}{|z|^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{A}_{1,\mathrm{R}}).$$

L'objectif est de démontrer que $\phi(z) \leqslant 1$ sur $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$. Que vaut $\phi\big|_{\partial A_{1,\mathrm{R}}}$? On suppose par l'absurde qu'il existe $w \in A_{1,\mathrm{R}}$ avec :

$$\max_{z\in \overline{A}_{1,\mathrm{R}}} \phi(z) \,=\, \phi(w) \,>\, 1.$$

Soit le demi-anneau ouvert :

$$C_w \,:=\, D^+_{iw} \cap A_{1,\mathrm{R}},$$

où D^+_{iw} est le demi-plan ouvert contenant w qui est bordé par la droite D_{iw} engendrée par l'origine 0 et par iw, de telle sorte que :

$$\max_{\overline{A}_{1,\mathrm{R}}} \phi \,=\, \max_{\overline{C}_w} \phi \,=\, \phi(w).$$

Dresser une figure contenant 0, $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, w, iw, $\boldsymbol{D}_{iw}$, $\boldsymbol{D}_{iw}^{+}$, $\boldsymbol{C}_w$, puis, justifier intuitivement la simple connexité de $\boldsymbol{C}_w$.

(i) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}\big(\boldsymbol{C}_w\big)$ telle que $\big|g(z)\big| = |z|^{-\mathsf{p}}$ pour tout $z \in \boldsymbol{C}_w$.

(j) Montrer que $\phi(z) \leqslant 1$ sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$. Indication: Dériver une contradiction en examinant ce qui se passe sur $\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \partial \boldsymbol{C}_w$.

(k) Modifier/adapter les raisonnements pour démontrer symétriquement que $\phi \geqslant 1$.

(l) Soit maintenant $\log z$ la détermination principale du logarithme, fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ satisfaisant $\log 1 = 0$. Montrer que la fonction :

$$h(z) \,:=\, e^{-\mathsf{p} \log z} f(z)$$

est holomorphe dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$, continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$ et qu'elle est de module constant $\big|h(z)\big| \equiv 1$.

(m) Montrer que h est constante sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$.

(n) Soit un point quelconque $z_0 \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \mathbb{R}_-$. On note $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}^{\pm} := \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \big\{ \pm \operatorname{Im} z > 0 \big\}$. En comparant les deux limites :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}^{-}}} h(z) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}^{+}}} h(z),$$

montrer que $\mathsf{p} \in \mathbb{Z}$.

(o) Conclure.

(p) Déterminer tous les biholomorphismes $f \colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$.

(q) Existe-t-il une application holomorphe surjective $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$?

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. (a) Puisque $\varphi(0) = 0$, la fonction indiquée $\frac{\varphi(z)}{z}$ a une singularité éliminable en $z = 0$, donc $\frac{\varphi(z)}{z}$ est holomorphe dans $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0)$. Le principe du maximum offre alors :

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leqslant \mathrm{R}} \Big| \frac{\varphi(z)}{z} \Big| &\leqslant \max_{|z| = \mathrm{R}} \Big| \frac{\varphi(z)}{z} \Big| \\ &\leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}, \end{aligned}$$

d'où en éliminant le dénominateur $\big|\varphi(z)\big| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}} |z|$, y compris en $z = 0$.

(b) Cette question, vraiment donnée, était destinée à tester chez les étudiants leurs capacités de lecture et d'assimilation de contenu. En effet, après soustraction de $\boldsymbol{A}_h(r)$, l'inégalité demandée revient à :

$$\mathrm{Re}\,\big(\boldsymbol{A}_h(r) - h(z)\big) \overset{?}{\geqslant} 0 \qquad (\forall\, z \in C_r),$$

et ceci est une reformulation de la définition de $\boldsymbol{A}_h(r)$.

Puisque le dénominateur de φ ne s'annule alors jamais lorsque $z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, on en déduit que φ est holomorphe dans un certain voisinage ouvert intermédiaire $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}} \subset \omega \subset \Omega$.

(c) En effet, l'inégalité que nous venons de démontrer allié à $u(z) \leqslant \boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})$ et la définition nous donnent :

$$-2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) + u(z) \;\leqslant\; u(z) \;\leqslant\; 2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z),$$

pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$, d'où :

$$u(z)^2 \;\leqslant\; \big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2,$$

et alors il devient visible que :

$$\begin{aligned} \big|\varphi(z)\big|^2 \;=\; \left| \frac{u(z) + i\,v(z)}{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z) - i\,v(z)} \right|^2 &= \frac{u(z)^2 + v(z)^2}{\big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2 + v(z)^2} \\ &\leqslant \frac{\big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2 + v(z)^2}{\big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2 + v(z)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(d) Avec $\mathrm{S} = 1$, la Question **(a)** s'applique à la fonction φ, et donne l'inégalité :

$$\big|\varphi(z)\big| \;\leqslant\; \frac{1}{\mathrm{R}}\,|z| \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}).$$

Maintenant, dans la définition de $\varphi(z)$, on peut éliminer le dénominateur :

$$\varphi(z)\,2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - \varphi(z)\,h(z) \;=\; h(z),$$

afin de résoudre :

$$h(z) \;=\; \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\varphi(z)}{1 + \varphi(z)},$$

pour ensuite utiliser l'inégalité obtenue :

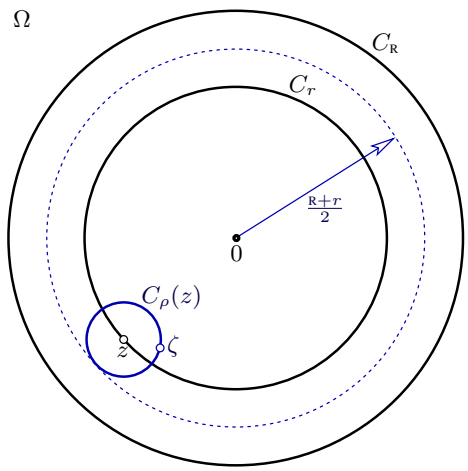
$$\begin{aligned}\big|h(z)\big| \;=\; \left|\frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\varphi(z)}{1+\varphi(z)}\right| \;\leqslant\; \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\frac{|z|}{\mathrm{R}}}{1-\frac{|z|}{\mathrm{R}}} \\ \;=\; \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,|z|}{\mathrm{R}-|z|}.\end{aligned}$$

(e) En effet, en prenant le maximum ci-dessus pour $|z| = r$, il vient sans effort :

$$\max_{|z|=r}\big|h(z)\big| \;\leqslant\; \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,r}{\mathrm{R}-r},$$

et il fallait être capable de voir que $2\,r = r + r$.

(f) La voici :



(g) Observons tout d'abord que pour $\zeta \in C_\rho(z)$ quelconque, on a :

$$|\zeta| \;\leqslant\; |\zeta - z| + |z| \;=\; \rho + r \;=\; \tfrac{\mathrm{R}-r}{2} + r \;=\; \tfrac{\mathrm{R}+r}{2} \;<\; \mathrm{R}.$$

Une application du résultat de la Question **(e)** au disque fermé en pointillés de rayon $\frac{\mathrm{R}+r}{2}$ centré en 0 qui contient le disque $\overline{\mathbb{D}}_\rho(z)$ donne :

$$\begin{aligned}\max_{|\zeta-z|=\rho}\big|h(\zeta)\big| \;&\leqslant\; \max_{|\zeta|\leqslant\frac{\mathrm{R}+r}{2}}\,|h(\zeta)| \\ &\leqslant\; \frac{\frac{\mathrm{R}+r}{2}+\frac{\mathrm{R}+r}{2}}{\mathrm{R}-\frac{\mathrm{R}+r}{2}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) \\ &=\; \frac{2\,\mathrm{R}+2\,r}{\mathrm{R}-r}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) \\ &\leqslant\; \frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).\end{aligned}$$

(h) Pour la dérivée n-ième de h en un point quelconque $z \in C_r$, la formule de Cauchy sur le cercle $C_\rho(z)$ s'écrit :

$$h^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2i\pi}\int_{C_\rho(z)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

et donc nous pouvons majorer simplement son module grâce à ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\big|h^{(n)}(z)\big| &= \left|\frac{n!}{2i\pi}\int_{C_\rho(z)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\right| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi}\,\frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\frac{1}{\rho^{n+1}}\,2\pi\,\rho \\
&= n!\,\frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\frac{2^n}{(\mathrm{R}-r)^n} \\
&= \frac{2^{n+2}\,n!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{n+1}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).
\end{aligned}$$

(i) Le produit infini étant normalement (absolument) convergent, cette formule valable pour z appartenant à $\mathbb{C}\backslash\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = Q'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{a_n-z} + \frac{d}{dz}\Big[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,\big(\frac{z}{a_n}\big)^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,\big(\frac{z}{a_n}\big)^{\kappa}\Big]\right),$$

signifie que la dérivée logarithmique du produit infini est la somme, convergente normalement sur les compacts, des dérivées logarithmiques des facteurs.

En cours au tableau, on a vu le cas simple où tous les facteurs du produit infini sont des fonctions holomorphes ne s'annulant jamais.

Dans une partie du polycopié (non traitée à l'oral) consacrée au Théorème de Mittag-Leffler, on exprime précisément ce qui est entendu par convergence d'une série de fonctions rationnelles.

(j) Puisque les zéros de $f(z)$ sont exactement les a_n, dans un petit voisinage ouvert $\omega_z \ni z$ de tout point z appartenant au disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, les singularités de la fonction $g_{\mathrm{R}}(z)$ sont illusoires, notamment lorsque $z = a_n$. De plus, quitte à rapetisser ces ouverts, on peut supposer que g_{R} ne s'annule jamais sur ω_z.

Ensuite, comme $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ est compact, un nombre fini $\omega_1, \ldots, \omega_{\mathrm{L}}$ de ces ouverts le recouvre grâce à Borel-Lebesgue, et donc l'ouvert $\omega := \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{\mathrm{L}} \supset \overline{\mathbb{D}}$ convient. On peut alors même réduire ω de telle sorte que $\omega = \mathbb{D}_{\mathrm{S}} \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ soit un disque ouvert de rayon $\mathrm{S} > \mathrm{R}$ légèrement plus grand.

L'intérêt, c'est que $\omega = \mathbb{D}_{\mathrm{S}}$ est simplement connexe, car alors un théorème du cours garantit l'existence d'une fonction holomorphe $h_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\omega)$ avec $h_{\mathrm{R}}(0) = 0$ telle que $e^{h_{\mathrm{R}}(z)} = g_{\mathrm{R}}(z)$.

(k) D'un premier côté, une dérivée κ-ième de la formule obtenue à la Question **(j)** fait disparaître les nombreux termes polynomiaux de degré $\leqslant \kappa - 1$ situés à la fin :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz}\right)^{\kappa}\frac{f'(z)}{f(z)} &= Q^{(\kappa+1)}(z) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}} + 0\right) \\
&= Q^{(\kappa+1)}(z) - \sum_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}}\frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}} - \sum_{|a_n|>\mathrm{R}}\frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}},
\end{aligned}$$

la dérivation terme à terme étant justifiée par une convergence normale présentée dans la section du polycopié consacrée au Théorème de Mittag-Leffler.

D'un deuxième côté, partons de la dérivée logarithmique de la fonction $g_{\mathrm{R}}(z)$:

$$\frac{g_{\mathrm{R}}'(z)}{g_{\mathrm{R}}(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \frac{1}{a_n - z},$$

et re-dérivons-la κ fois sans modération :

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^{\kappa} \frac{g_{\mathrm{R}}'(z)}{g_{\mathrm{R}}(z)} \\ &= \left(\frac{d}{dz}\right)^{\kappa} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}. \end{aligned}$$

Une comparaison « œil-de-lynx » entre ces deux formules conduit au résultat demandé :

$$Q^{(k+1)}(z) = h_{\mathrm{R}}^{(k+1)}(z) + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}.$$

(l) Prenons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 2\,\mathrm{R}$. Alors pour tout zéro a_n de f tel que $|a_n| \leqslant \mathrm{R}$ qui intervient dans la formule définissant $g_{\mathrm{R}}(z)$, on a la minoration :

$$\left|\frac{z}{a_n} - 1\right| \geqslant \left|\frac{z}{a_n}\right| - 1 \geqslant \frac{2\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}} - 1 = 1,$$

d'où découle la majoration demandée :

$$\begin{aligned} \big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \leqslant \left|\frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)}\right| \leqslant \frac{|f(z)|}{\prod_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} 1} &= \big|f(z)\big| \\ &\leqslant C\, e^{(2\,\mathrm{R})^{\rho}}. \end{aligned}$$

Comme $g_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière, le principe du maximum garantit alors que cette estimée reste vraie dans $\overline{\mathbb{D}}_{2\,\mathrm{R}}(0)$.

(m) Revenons maintenant à $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ — et non pas $\mathbb{D}_{2\,\mathrm{R}}$ — afin de pouvoir travailler avec $h_{\mathrm{R}} = \log g_{\mathrm{R}}$. En prenant le logarithme de l'inégalité de la Question **(l)**, mais vue sur C_{R}, nous obtenons :

$$\operatorname{Re} h_{\mathrm{R}}(z) = \log \big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \leqslant \log C + (2\,\mathrm{R})^{\rho} \qquad (\forall\, |z| = \mathrm{R}).$$

Autrement dit :

$$\boldsymbol{A}_{h_{\mathrm{R}}}(\mathrm{R}) \leqslant \log C + (2\,\mathrm{R})^{\rho}.$$

Maintenant, nous pouvons enfin appliquer l'inégalité de Borel-Carathéodory pour les dérivées, obtenue dans la Question **(h)**, avec l'ordre de dérivation $n := \kappa + 1$, ce qui nous donne, pour tout rayon $0 \leqslant r < \mathrm{R}$ strictement inférieur tout en tenant compte du principe du maximum :

$$\max_{|z|\leqslant r} \big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| \leqslant \frac{2^{\kappa+3}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R} - r)^{\kappa+2}} \,\big[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^{\rho}\big].$$

(n) Prenons $r := \frac{1}{2}\,\mathrm{R}$ dans l'inégalité qui précède :

$$\begin{aligned} \max_{|z|\leqslant \frac{\mathrm{R}}{2}} \big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| &\leqslant \frac{2^{2\kappa+5}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}^{\kappa+2}} \,\big[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^{\rho}\big] \\ &= \mathrm{O}\big(\mathrm{R}^{\rho-\kappa-1}\big), \end{aligned}$$

et observons, puisque $\rho - \kappa - 1 < 0$, que ce majorant tend vers zéro lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Ensuite, en revenant à la formule de la Question **(k)**, nous pouvons majorer :

$$\big|Q^{(k+1)}(z)\big| \leqslant \big|h_{\mathrm{R}}^{(k+1)}(z)\big| + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}}.$$

Toujours en supposant $|z| = \frac{1}{2}\,\mathrm{R}$, il vient pour les a_n concernés :

$$\big|a_n - z\big| \geqslant |a_n| - |z| \geqslant \tfrac{1}{2}\,|a_n|,$$

d'où un majorant utile pour la somme restante :

$$\frac{1}{|a_n - z|} \leqslant \frac{2}{|a_n|}.$$

Enfin, grâce au principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe entière $Q^{(\kappa+1)}(z)$ sur $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{1}{2}\mathrm{R}}$, nous obtenons pour tout $|z| \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{R}$ une inégalité :

$$\big|Q^{(k+1)}(z)\big| \leqslant \underbrace{\mathrm{O}\big(\mathrm{R}^{\rho-\kappa-1}\big)}_{\substack{\longrightarrow \\ \mathrm{R}\to\infty}\ 0} + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{2^{\kappa+1}\,\kappa!}{|a_n|^{\kappa+1}},$$

dans laquelle le deuxième majorant tend *aussi* vers 0 lorque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, parce que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{\kappa+1}} < \infty$ converge, comme cela a été rappelé plus haut.

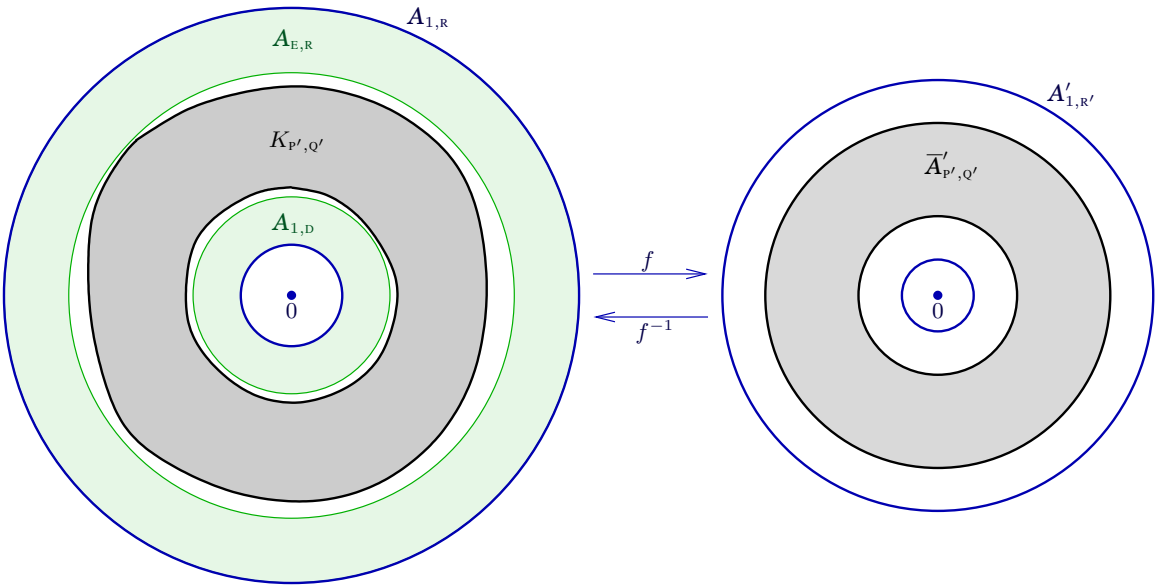
En conclusion, cette inégalité force via Liouville la dérivée $Q^{(\kappa+1)}(z) \equiv 0$ à être identiquement nulle, donc $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un poolynôme de degré $\leqslant \kappa$.

Exercice 2. (a) Comme f est bijective, il est clair que :

$$K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} = f^{-1}\Big(\overline{A}_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\Big) \qquad \text{où} \qquad \overline{A}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} = \big\{z' \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{P}' \leqslant |z'| \leqslant \mathrm{Q}'\big\},$$

et comme f^{-1} est continue, elle envoie cet anneau compact $\overline{A}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$ — contenu dans l'anneau ouvert $A_{1,\mathrm{R}'}$ sans effleurer $\partial A_{1,\mathrm{R}'}$ — sur un certain sous-ensemble de l'espace de départ qui est compact, d'après un théorème connu de topologie générale.

(b) L'intérêt d'élaborer une figure est de prendre conscience que le premier anneau-tampon $A_{1,\mathrm{D}}$ remplit au mieux l'espace entre le petit cercle bordant $C_1 \subset \partial A_{1,\mathrm{R}}$ et le compact $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, et aussi, que le deuxième anneau-tampon $A_{\mathrm{E},\mathrm{R}}$ remplit au mieux l'espace entre le grand cercle bordant $C_{\mathrm{R}} \subset \partial A_{1,\mathrm{R}}$ et le même compact $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$. Un autre intérêt, c'est que cela a permis d'ajouter quelques longues *heures-malus* de travail supplémentaire au troisième correcteur.



(c) Comme l'anneau ouvert $A_{1,\mathrm{D}}$ est connexe, et comme $|f|$ est continue, son image $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ est un ensemble connexe, d'après un théorème connu de topologie générale. Il est non vide parce que $\mathrm{D} > 1$.

De plus, comme f est un biholomorphisme, un théorème du cours assure que f est une application ouverte. Il s'ensuit que $|f|$ est aussi une application ouverte, car f est à valeurs dans $\mathbb{C}^* \supset A'_{1,\mathrm{R}'}$, et car $w \longmapsto |w|$ de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est ouverte. Par conséquent, $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ est bien un intervalle ouvert connexe.

Par ailleurs, par définition de :

$$\mathrm{D} \,=\, 1 + \mathsf{dist}\,\big(C_1,\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big),$$

on voit, comme cela a déjà été compris au moment d'élaborer la figure, que :

$$\emptyset \,=\, A_{1,\mathrm{D}} \cap K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'},$$

et puisque $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} = |f|^{-1}\big([\mathrm{P}',\mathrm{Q}']\big)$, ceci force :

$$\begin{aligned} |f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big) \,&\subset\, \big]1,\mathrm{R}'\big[\,\setminus\, \big[\mathrm{P}',\mathrm{Q}'\big] \\ &=\, \big]1,\mathrm{P}'\big[\,\cup\, \big]\mathrm{Q}',\mathrm{R}'\big[. \end{aligned}$$

En définitive, l'intervalle ouvert connexe non vide $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ ne peut donc être contenu que dans un seul des deux intervalles ouverts connexes $]1,\mathrm{P}'[$ et $]\mathrm{Q}',\mathrm{R}'[$, qui sont disjoints, car $\mathrm{P}' < \mathrm{Q}'$ depuis le début.

(d) Supposons comme indiqué que notre intervalle ouvert connexe $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ est contenu dans $]1,\mathrm{P}'[$. Il s'agit de démontrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(1 < |z| < 1{+}\delta(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad 1 < \big|f(z)\big| < 1{+}\varepsilon\Big).$$

De manière similaire à $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, avec $\varepsilon > 0$ petit, introduisons l'ensemble :

$$L_\varepsilon \,:=\, \big\{z \in A_{1,\mathrm{R}} :\, 1 + \varepsilon \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{Q}'\big\}.$$

Dès que $1 + \varepsilon \leqslant \mathrm{P}'$, on a clairement $L_\varepsilon \supset K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$. À nouveau, $L_\varepsilon = f^{-1}\big(\overline{A}'_{1+\varepsilon,\mathrm{Q}'}\big)$ est un compact de $A_{1,\mathrm{R}}$, puisque f est continue.

Ensuite, considérons la distance de ce compact au cercle unité :

$$\delta(\varepsilon) \ := \ \mathsf{dist}\big(C_1, L_\varepsilon\big) \ > \ 0.$$

Si z est un point proche de C_1 dans l'ensemble qui nous intéresse, *i.e.* si $1 < |z| < 1+\delta(\varepsilon)$, d'où $z \notin L_\varepsilon$, on en déduit comme on l'a déjà fait plus haut que :

$$|f(z)| \ \in \ \big]1, 1+\varepsilon\big[\ \cup \ \big]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'\big[,$$

et ce qui pourrait être gênant, c'est que cette valeur appartienne au deuxième intervalle $]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'[$, ce qui signifierait que $f(z)$ est très loin du cercle C_1.

Mais heureusement, comme ce compact $L_\varepsilon \supset K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$ est plus gros, il est clair que :

$$\delta(\varepsilon) \ \leqslant \ d \ = \ \mathsf{dist}\big(C_1, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big),$$

ce qui implique une inclusion entre anneaux cruciale :

$$\boldsymbol{A}_{1,1+\delta(\varepsilon)} \ \subset \ \boldsymbol{A}_{1,1+d}.$$

Si maintenant z est un point quelconque dans l'anneau qui nous intéresse :

$$z \ \in \ \boldsymbol{A}_{1,1+\delta(\varepsilon)} \ \subset \ \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| \ &\in \ |f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \\ &\subset \ \big]1, \mathrm{P}'\big[, \end{aligned} \qquad \text{[Hypothèse en cours]}$$

et en comparant avec l'appartenance obtenue plus haut, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| \ &\in \ \big]1, \mathrm{P}'\big[\ \bigcap \Big(\big]1, 1+\varepsilon\big[\ \cup \ \big]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'\big[\Big) \\ &= \ \big]1, 1+\varepsilon\big[. \end{aligned}$$

ce qui offre le résultat en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{|z|\to 1 \\ z\in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \ \big|f(z)\big| \ = \ 1.$$

Quand $|f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \subset \ ]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'[$, le même type de raisonnements (symétriques) permet d'obtenir que la limite en question vaut R'.

(e) En utilisant les compacts alternatifs paramétrés par $\varepsilon > 0$:

$$H_\varepsilon \ := \ \big\{z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \colon \ \mathrm{P}' \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{R}' - \varepsilon\big\},$$

le même type de raisonnements montre que la limite en question :

$$\lim_{\substack{|z|\to \mathrm{R} \\ z\in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \ \big|f(z)\big| \ \in \ \big\{1, \ \mathrm{R}'\big\}$$

existe et vaut ou bien 1, ou bien R'.

Supposons par l'absurde que cette limite vale aussi 1. Mais comme f est surjective, il existe en tout cas une suite $\big\{w_n\big\}_{n=1}^\infty$ de points $w_n \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ tels que $\big|f(w_n)\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{R}'$.

Observons qu'il est impossible que $|w_n| \longrightarrow 1$ ou que $|w_n| \longrightarrow \mathrm{R}$, car nous venons de supposer que $\big|f(z)\big| \longrightarrow 1$ quand $|z| \longrightarrow 1$ et quand $|z| \longrightarrow \mathrm{R}$. Donc cette suite $\big\{w_n\big\}_{n=1}^\infty$ reste dans un certain compact de l'anneau ouvert $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, et grâce à Cauchy, une certaine sous-suite $\big\{w_{n_k}\big\}_{k=1}^\infty$ converge vers un certain point intérieur :

$$w_{n_k} \ \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ w_\infty \ \in \ \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}.$$

Mais alors comme f est un biholomorphisme, on a $f(w_\infty) \in A'_{1,\mathrm{R}'}$, c'est-à-dire $1 < \big|f(w_\infty)\big| < \mathrm{R}'$, ce qui contredit le fait que la continuité de f en w_∞ donne :

$$\mathrm{R}' \,=\, \lim_{k\to\infty} \big|f\big(w_{n_k}\big)\big| \,=\, \big|f\big(w_\infty\big)\big|.$$

Ainsi, $|f|$ se prolonge par continuité à l'anneau fermé $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$, avec $|f|\big|_{C_1} \equiv 1$ ainsi que : $|f|\big|_{C_\mathrm{R}} \equiv \mathrm{R}'$.

(f) Grâce aux questions qui précèdent, nous savons que g, holomorphe dans $A_{1,\mathrm{R}}$, est continue sur $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$, puisque la singularité $z = 0$ de $\frac{1}{z^n}$ n'appartient pas à $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$.

La présence de z^{-n} en facteur force alors les limites des modules au bord à être égales :

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to 1} \big|z^{-n}\, f(z)\big| \,&=\, 1^{-n} \lim_{|z|\to 1} \big|f(z)\big| \,=\, 1,\\
\lim_{|z|\to \mathrm{R}} \big|z^{-n}\, f(z)\big| \,&=\, \mathrm{R}^{-n} \lim_{|z|\to \mathrm{R}} \big|f(z)\big| \,=\, \mathrm{R}^{-n}\, \mathrm{R}' \,=\, 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\big|g(z)\big| = 1$ sur $\partial A_{1,\mathrm{R}} = C_1 \cup C_\mathrm{R}$. Le principe du maximum donne alors $\big|g(z)\big| \leqslant 1$ dans $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$.

De plus, comme g ne s'annule jamais, la fonction $\frac{1}{g}$ est aussi holomorphe dans $A_{1,\mathrm{R}}$ et continue dans $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$, et son module vaut aussi $\frac{1}{1} = 1$ sur le bord $\partial A_{1,\mathrm{R}} = C_1 \cup C_\mathrm{R}$. Le principe du maximum — encore lui ! — donne donc $\big|\frac{1}{g(z)}\big| \leqslant 1$ dans $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$.

En définitive, $\big|g(z)\big| \equiv 1$ dans $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$.

Mais alors, le principe du maximum — encore lui et toujours lui ! qu'est-ce qu'il est collant ! — montre que g est constante, et comme elle est de module 1, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) \equiv e^{i\beta}$.

(g) Comme $e^{i\beta} \equiv g(z) = \frac{1}{z^n}\, f(z)$, nous obtenons miraculeusement :

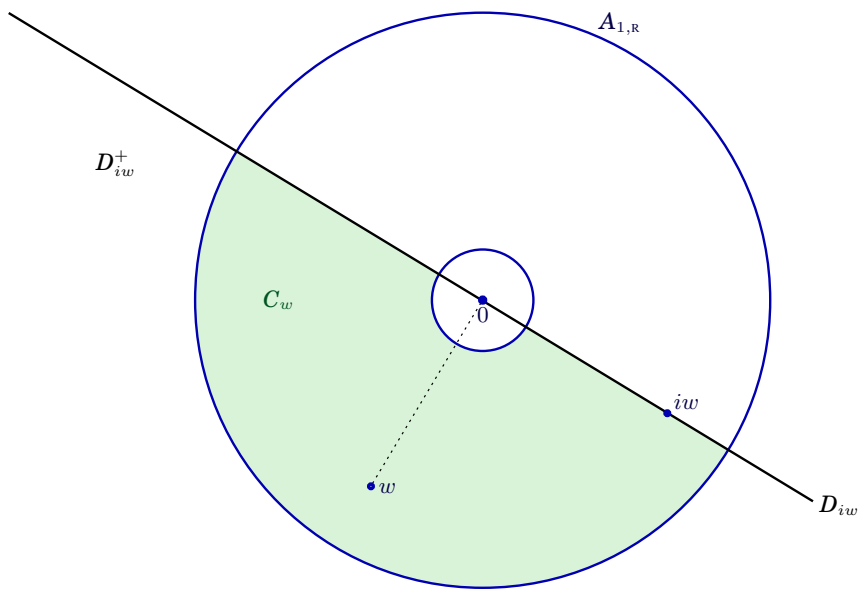
$$f(z) \,=\, e^{i\beta}\, z^n \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{A}_{1,\mathrm{R}}).$$

Si cet entier $n \geqslant 2$ n'était pas égal à 1, d'où $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$, alors la fonction f ne serait pas injective, car pour un rayon intermédiaire quelconque $1 < r < \mathrm{R}$, on aurait :

$$f(r) \,=\, e^{i\beta}\, r^n \,=\, e^{i\beta} \big(r\, e^{\frac{2i\pi}{n}}\big)^n \,=\, f\big(r\, e^{\frac{2i\pi}{n}}\big),$$

ce qui contredirait l'hypothèse que f est un biholomorphisme $A_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} A'_{1,\mathrm{R}'}$, donc *a minima* est une application injective.

(h) La figure suivante contient les 7 éléments exigés :



On « voit » que ce demi-anneau C_w n'a aucun « trou » en son intérieur de Jordan, donc cet ouvert est simplement connexe.

(i) Comme nous venons de démontrer de la manière la plus rigoureuse qui soit, du point de vue des mathématiques axiomatiques, que C_w est simplement connexe, et comme la fonction identité $z \longmapsto z$ ne s'annule jamais sur C_w, un théorème du cours fournit un logarithme complexe de cette fonction, et plus précisément, il fournit une fonction holomorphe $G \in \mathscr{O}\big(C_w\big)$ telle que :

$$e^{G(z)} \,=\, z \qquad\qquad (\forall\, z \in C_w),$$

d'où en prenant les modules :

$$e^{\mathsf{Re}\, G(z)} \,=\, \big|e^{G(z)}\big| \,=\, |z|,$$

et enfin, en prenant la puissance réelle moins p-ième :

$$e^{-\mathsf{p}\, \mathsf{Re}\, G(z)} \,=\, |z|^{-\mathsf{p}},$$

Ainsi, nous avons construit une fonction holomorphe :

$$g(z) \,:=\, e^{-\mathsf{p}\, G(z)},$$

qui satisfait bien $\big|g(z)\big| \equiv |z|^{-\mathsf{p}}$.

(j) Tout d'abord, on a bien compris que la fonction produit $g\, f \,\in\, \mathscr{O}\big(C_w\big) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{C}_w\big)$, holomorphe dans notre demi-anneau et continue jusqu'en son bord, satisfaisait :

$$\big|g(z)\, f(z)\big| \,=\, |z|^{-\mathsf{p}}\, \big|f(z)\big| \,=\, \phi(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{C}_w),$$

et que, d'après ce qui précède, elle atteignait le maximum de son module en le point intérieur w :

$$\max_{z \in \overline{C}_w} \big|g(z)\, f(z)\big| \,=\, \big|g(w)\, f(w)\big| \,=\, \phi(w) \,>\, 1.$$

Mais alors, le principe du maximum la force à être égale à une certaine constante :

$$g(z)\, f(z) \,\equiv\, \alpha \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{C}_w),$$

qui est de module $|\alpha| = \big|g(w)\,f(w)\big| > 1$ strictement supérieur à 1, et par conséquent aussi :

$$\phi(z) \equiv \big|g(z)\,f(z)\big| \equiv |\alpha| > 1 \qquad (\forall\, z \in \overline{C}_w).$$

Mais cela est impossible ! — car le bord de notre demi-anneau intersecte non trivialement le bord de l'anneau de départ le long de deux demi-cercles :

$$\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \partial \boldsymbol{C}_w = \big[C_1 \cap \overline{\boldsymbol{D}}^+_{iw}\big] \bigcup \big[C_{\mathrm{R}} \cap \overline{\boldsymbol{D}}^+_{iw}\big],$$

le long desquels notre fonction $\phi(z) = \frac{|f(z)|}{|z|^{\mathsf{p}}} \equiv |\alpha|$ avait été construite exprès pour valoir identiquement $1 \neq |\alpha|$ — contradiction !

(k) En supposant par l'absurde qu'il existe un (autre) point $w \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ avec :

$$\min_{z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}} \phi(z) = \phi(w) < 1,$$

tous ces arguments se transfèrent à la fonction inverse :

$$\psi(z) := \frac{|z|^{\mathsf{p}}}{|f(z)|} = \frac{1}{\phi(z)},$$

et on obtient $\psi \leqslant 1$ dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, c'est-à-dire $\phi \geqslant 1$.

En définitive, nous avons établi que :

$$\big|f(z)\big| \equiv |z|^{\frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}}} \qquad (\forall\, z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}).$$

(l) En effet, $h(z)$ est holomorphe, puisqu'elle est produit de fonctions holomorphes dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$. Elle est continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$, puisque f l'est d'après ce qui précède, et puisque $\log z$ est continue sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_- \supset \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$. Enfin :

$$\big|h(z)\big| = e^{-\mathsf{p}\,\mathrm{Re}\log z}\,\big|f(z)\big| = e^{-\mathsf{p}\log|z|}\,\big|f(z)\big| = |z|^{-\mathsf{p}}\,\big|f(z)\big| = \phi(z) \equiv 1.$$

(m) Comme $\big|h(z)\big| \equiv 1$, le module de la fonction $h(z)$ holomorphe dans l'ouvert connexe $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$ atteint son maximum en un (en tous les) point(s) intérieur(s) $z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, donc le principe du maximum la force à être constante dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$. Par continuité, elle est alors aussi constante sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \backslash \mathbb{R}_-$.

Mais attention ! Cette fonction $h(z)$ n'est *a priori pas* continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, car cet anneau est « tranché » par $\mathbb{R}_-$ à cause du logarithme.

(n) Grâce à notre connaissance de la fonction $\log z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$ pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ avec $\big|\mathrm{Arg}\,z\big| < \pi$, il vient :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A^-_{1,\mathrm{R}}}} h(z) = e^{-\mathsf{p}(-i\pi)}\,|z_0|^{-\mathsf{p}}\,f(z_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A^+_{1,\mathrm{R}}}} h(z) = e^{-\mathsf{p}i\pi}\,|z_0|^{-\mathsf{p}}\,f(z_0).$$

Comme h est constante ces deux limites doivent s'égaler, et comme $|z_0|^{-\mathsf{p}}\,f(z_0) \neq 0$, nous en tirons :

$$e^{-\mathsf{p}(-i\pi)} = e^{-\mathsf{p}i\pi} \iff e^{\mathsf{p}2i\pi} = 1 \iff \mathsf{p} \in \mathbb{Z}.$$

Toutefois, $\mathsf{p} = \frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}} \geqslant 1$, donc $\mathsf{p} \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

(o) Mais quand $\mathsf{p} = n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, nous avons déjà travaillé pour obtenir $\mathsf{p} = 1$! C'est terminé !

(p) Nous avons vu que les deux limites :

$$\ell_1 := \lim_{|z|\to 1} \big|f(z)\big| \qquad \text{et} \qquad \ell_{\mathrm{R}} := \lim_{|z|\to \mathrm{R}} \big|f(z)\big|$$

existent et valent simultanément ou bien $\ell_1 = 1$, $\ell_{\mathrm{R}} = \mathrm{R}$, ou bien $\ell_1 = \mathrm{R}$, $\ell_{\mathrm{R}} = 1$.

Dans le premier cas, la fonction $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans $A_{1,\mathrm{R}}$, continue et jamais nulle sur $\overline{A}_{1,\mathrm{R}}$, et son module vaut constamment 1 au bord. Une double application du principe du maximum (vue en TD et revue plus haut dans un contexte plus compliqué) à $\frac{f(z)}{z}$ et à $\frac{z}{f(z)}$ montre alors que cette fonction est constante. Donc il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) \equiv e^{i\beta}\, z$.

Une rotation ! Rien qu'une rotation ! Ah mais oui, un anneau, ça roule un anneau, ça roule tout seul !

Le deuxième cas se ramène au premier après avoir effectué la transformation $z \longmapsto \frac{\mathrm{R}}{f(z)}$, et donc on en déduit que $f(z) \equiv e^{i\beta}\, \frac{\mathrm{R}}{z}$.

Dans tous les cas, le groupe d'automorphismes holomorphes d'un anneau quelconque $A_{1,\mathrm{R}}$ est engendré par une unique inversion et des rotations d'angle quelconque :

$$\mathsf{Aut}_{\mathsf{bihol}}\big(A_{1,\mathrm{R}}\big) = \Big\langle z \longmapsto \frac{\mathrm{R}}{z},\ \big\{z \longmapsto e^{i\beta}\, z\big\}_{\beta\in\mathbb{R}}\Big\rangle.$$

(q) Avec la transformation de Cayley $w \longmapsto i\,\frac{1-w}{1+w} =: z$ qui établit un biholomorphisme du disque unité $\mathbb{D} = \{|w| < 1\}$ sur le demi-plan supérieur $\big\{\mathsf{Im}\, z > 0\big\}$, il suffit de trouver une application holomorphe surjective $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Un demi-plan, « c'est déjà la moitié d'être surjectif ! » Une idée serait d'étendre cette demi-nappe. Après l'essai $z \longmapsto z^2$ qui dédouble les angles mais ne couvre pas $\mathbb{R}^+$, puis l'essai $z \longmapsto z^3$, qui couvre $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, on a l'idée de centrer non pas en 0, mais en un point de $\mathbb{H}$, par exemple i, et on vérifie que l'application $z \longmapsto \big(z-i\big)^2$ est surjective de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{C}$.

9. Examen 5

Exercice 1. On introduit les deux fonctions définies pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$f(z) := \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \qquad \text{et} \qquad g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}.$$

(a) Justifier que f est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que g est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Indication: Avec $\mathrm{N} \geqslant 1$ entier, décomposer :

$$g(z) = \sum_{|n|\leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{(n-z)^2} + \sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{(n-z)^2},$$

et en supposant $|z| < \mathrm{N}$, majorer la deuxième somme par une série normale convergente.

(c) Montrer que f et g ont des pôles d'ordre 2 en $z = 0$, puis déterminer leurs parties singulières $\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z}$ et $\frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z}$ dans leurs développements de Laurent respectifs. Indication: Observer que f est paire.

(d) Justifier que f et g sont 1-périodiques.

(e) Montrer que la fonction $h := f - g$ se prolonge en une fonction holomorphe entière et qu'elle est 1-périodique.

(f) On introduit le fermé :

$$\Pi := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ -\tfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \tfrac{1}{2},\ \ |\mathrm{Im}\, z| \geqslant 1\big\}.$$

Dessiner Π soigneusement.

(g) Établir que f et g sont bornées en module sur Π.

(h) Montrer que h est bornée sur $\mathbb{C}$, puis qu'elle est constante.

(i) Montrer que :

$$\lim_{y\to\infty} f\big(i\,y\big) = 0 = \lim_{y\to\infty} g\big(i\,y\big).$$

(j) En effectuant la synthèse des questions qui précèdent, établir la formule, belle :

$$\frac{\pi^2}{\big(\sin\,(\pi\,z)\big)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}. \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}).$$

(k) En déduire la valeur exacte de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan, et soit $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ un ouvert qui le contient ainsi que son domaine intérieur Γ_{int}. On suppose données deux fonctions holomorphes $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui satisfont partout sur ce contour l'inégalité :

$$|g(z)| \,<\, |f(z)| \qquad (\forall\, z \in \Gamma).$$

On envisage alors la fonction $f + g$ comme une « perturbation » de f.

(a) On introduit la famille à un paramètre réel $t \in [0, 1]$ de fonctions holomorphes $f_t(z) := f(z) + t\, g(z)$ dans Ω. Montrer que la fonction :

$$\mathrm{N}(t) \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz$$

est bien définie et qu'elle est *continue* de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(b) Quelles valeurs peut prendre alors $\mathrm{N}(t)$? Indication: Sans chercher à reconstituer une démonstration, justifier la réponse en une ou deux lignes par un simple appel au cours.

(c) Montrer, avec multiplicités, l'égalité :

$$\#\,\mathsf{zéros}\,\big(f + g\big) \,=\, \#\,\mathsf{zéros}\,(f) \qquad (\text{dans } \Gamma_{\mathsf{int}}).$$

(d) Soit le polynôme $P(z) := 3\, z^{15} + 4\, z^8 + 6\, z^5 + 19\, z^4 + 3\, z + 2$. Montrer que P admet exactement 4 zéros dans le disque unité $\{|z| < 1\}$.

(e) Montrer que $P(z)$ admet exactement 11 zéros dans l'anneau $\big\{1 < |z| < 2\big\}$.

Exercice 3. L'objectif est, pour des réels quelconques $a, b > 0$, d'établir en détail la formule :

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x + a)^2 + b^2}\, dx \;=\; \frac{\log \sqrt{a^2 + b^2}}{b}\, \arctan \frac{b}{a}.$$

(a) Soient des réels δ, ε, R quelconques satisfaisant :

$$0 \,<\, \delta \,<\, \varepsilon \,<\, 1 \qquad\qquad \text{ainsi que} \qquad\qquad \max\big(1,\, \sqrt{a^2 + b^2}\big) \,<\, \mathrm{R}.$$

On introduit le cercle c_ε de centre 0 et de rayon ε, le cercle C_{R} de centre 0 et de rayon R, ainsi que les deux segments horizontaux :

$$I^+_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}} \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Im}\, z = \delta,\ \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - \delta^2}\big\},$$
$$I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}} \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Im}\, z = -\,\delta,\ \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - \delta^2}\big\}.$$

Enfin, on introduit les deux grands arcs de cercles $c_{\delta,\varepsilon} \subset c_\varepsilon$ et $C_{\delta,\mathrm{R}} \subset C_{\mathrm{R}}$ définis par :

$$c_{\delta,\varepsilon} \,:=\, c_\varepsilon \big\backslash \big\{\mathsf{Re}\, z > 0,\ -\delta < \mathsf{Im}\, z < \delta\big\},$$
$$C_{\delta,\mathrm{R}} \,:=\, C_{\mathrm{R}} \big\backslash \big\{\mathsf{Re}\, z > 0,\ -\delta < \mathsf{Im}\, z < \delta\big\}.$$

Dessiner très soigneusement le contour de Jordan $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ en forme de *trou de serrure*, orienté dans le sens trigonométrique, que délimitent la succession des quatre courbes $C_{\delta,\mathrm{R}}$, $I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$, $c_{\delta,\varepsilon}$, $I^+_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$, et signaler l'orientation de chacune de ces courbes sur la figure.

(b) On abrège $\rho := \sqrt{a^2 + b^2}$. Montrer que :

$$-\,a + i\, b \,=\, \rho\, e^{i\,\varphi_+}, \qquad \text{où} \qquad \varphi_+ \,:=\, \pi - \arctan\big(\tfrac{b}{a}\big),$$
$$-\,a - i\, b \,=\, \rho\, e^{i\,\varphi_-}, \qquad \text{où} \qquad \varphi_- \,:=\, \pi + \arctan\big(\tfrac{b}{a}\big).$$

(c) On introduit la fonction :

$$f(z) \;:=\; \frac{[\log z]^2}{(z+a)^2+b^2},$$

avec une puissance de $\log z$ d'une unité supérieure à celle de l'intégrale qui nous intéresse. Ici, la fonction $z \longmapsto \log z$ est supposée définie dans $\mathbb{C}\backslash[0,\infty[$, être holomorphe dans ce domaine, avec $\log(-1) = i\,\pi$. Calculer les résidus de f aux deux points :

$$w_- \;:=\; -a - i\,b \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad w_+ \;:=\; -a + i\,b.$$

Indication: On a donc $\log r\,e^{i\theta} = \log r + i\,\theta$ pour tout $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ avec $r > 0$ et $0 < \theta < 2\pi$. On calculera ces résidus en fonction de ρ, φ_-, φ_+.

(d) Trouver, en fonction de a, b, ρ, la valeur de :

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}} f(z)\,dz \;=\; \frac{\pi}{b}\left(4\pi \arctan\tfrac{b}{a} - 4i\log\rho\,\arctan\tfrac{b}{a}\right).$$

(e) On abrège par $\mathrm{A} + i\,\mathrm{B}$ la valeur de cette intégrale. Montrer que :

$$\mathrm{A} + i\,\mathrm{B} \;=\; \int_{C_\mathrm{R}} f(z)\,dz - \int_\varepsilon^\mathrm{R} \frac{\big[\log x + 2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx - \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^\mathrm{R} \frac{\big[\log x\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

(f) Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ une constante fixée. Montrer rigoureusement que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}}\;\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_\varepsilon^\mathrm{R} \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx \;=\; \int_0^\infty \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

Indication: On pourra utiliser le fait — que l'on justifiera très brièvement — qu'il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 < \infty$ telles que :

$$\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2 \;\leqslant\; \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2\,[\log x]^2 \qquad (\forall\, 0 < x < 1),$$

$$\frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2} \;\leqslant\; \frac{\mathrm{M}_3}{x\sqrt{x}} \qquad (\forall\, 1 < x).$$

(g) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

(h) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{C_\mathrm{R}} f(z)\,dz.$$

(i) Conclure.

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) Puisque la fonction $z \longmapsto \sin(\pi z)$ est holomorphe *entière*, *i.e.* définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, et puisque son lieu d'annulation est précisément égal à $\mathbb{Z}$, la première fonction $f(z)$ est holomorhe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

(b) Quant à $g(z)$, bien que ses pôles $z = n$ soient visibles à l'œil nu, il nous faut encore justifier la convergence de la série qui la définit. À cette fin, fixons un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ et décomposons, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$g(z) \,=\, \underbrace{\sum_{|n|\leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{(n-z)^2}}_{=:\, g_{\mathrm{N}}(z)} + \underbrace{\sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{(n-z)^2}}_{=:\, \boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)}.$$

Ici, il est clair que g_{N} est holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)\big\backslash\big\{-\mathrm{N}+1,\ldots,0,\ldots,\mathrm{N}-1\big\}$.

Pour ce qui est de la série-reste $\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)$ dont tous les éléments sont holomorphes dans $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)$, en supposant $|z| < \mathrm{N}$, nous pouvons la majorer par une *série normale* convergente :

$$\begin{aligned}
\big|\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)\big| &\leqslant \sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \Big|\frac{1}{(n-z)^2}\Big| \\
&\leqslant \sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{\big(|n|-\mathrm{N}\big)^2} \\
&= \sum_{|n|\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \;=\; 2\left(\tfrac{\pi^2}{6}-1\right) \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

et ceci garantit, grâce à un théorème magique de Cauchy, que $\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)$ est holomorphe dans le disque $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)$. Au final, la somme $g(z) = g_{\mathrm{N}}(z) + \boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)\big\backslash\big\{-\mathrm{N}+1,\ldots,0,\ldots,\mathrm{N}-1\big\}$, et comme $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ était arbitraire, on a bien $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$.

(c) On sait que la fonction $z \longmapsto \sin(\pi z)$ s'annule à l'ordre 1 en $z = 0$. Donc $f(z)$ admet un pôle d'ordre 2 en $z = 0$. De plus, comme f est visiblement paire, on doit avoir $a_{-1} = 0$ dans son développement de Laurent en $z = 0$. Dans ces conditions :

$$a_{-2} \,=\, \lim_{z\to 0} z^2\, f(z) \,=\, \lim_{z\to 0} \left(\frac{\pi\, z}{\sin(\pi\, z)}\right)^2 \,=\, 1^2 \,=\, 1.$$

Pour ce qui est de :

$$g(z) \,=\, \frac{1}{z^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{(n-z)^2},$$

le même raisonnement que dans la Question **(b)** montre que la (grosse) somme est holomorphe dans un voisinage de 0, et ainsi l'unique terme singulier $\frac{1}{z^2}$ signifie que $b_{-1} = 0$ et que $b_{-2} = 1$. Tiens ! Comme pour f !

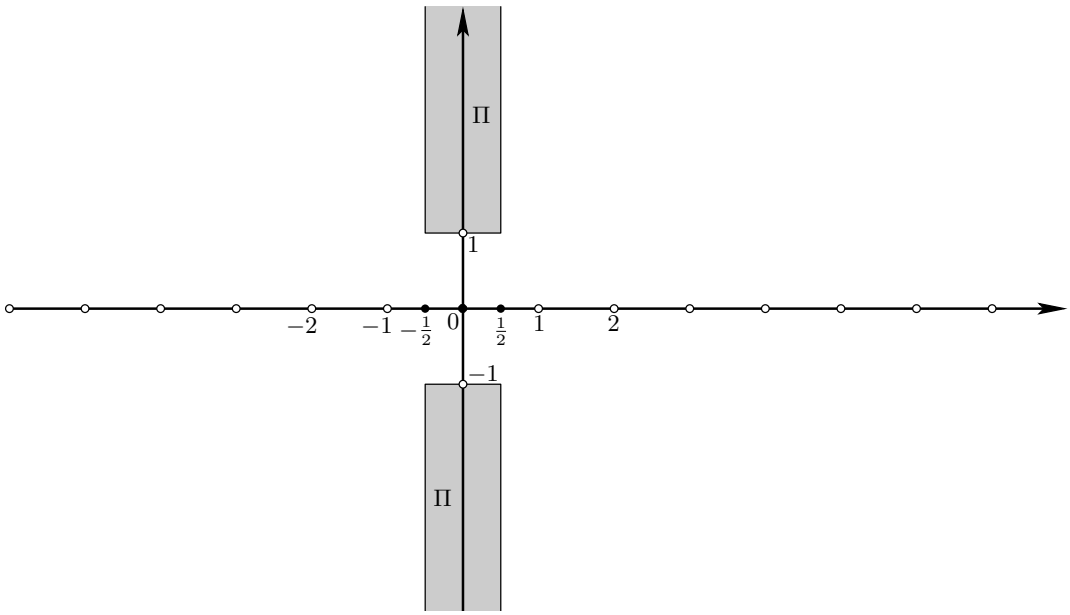
(d) La fonction f est 1-périodique, puisque $z \longmapsto \sin(\pi z)$ l'est. Pour ce qui est de g, quel que soit $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, en effectuant un décalage sommatoire $n - 1 =: m$, on trouve :

$$g(z+1) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z-1)^2} \,=\, \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m-z)^2} \,=\, g(z),$$

ces calculs formels étant justifiés par la convergence normale des sommes-restes correspondantes, convergence que nous avons établie dans la Question **(b)**.

(e) Grâce à la Question **(c)**, les deux fonctions f et g ont même partie singulière en 0. Par 1-périodicité, f et g ont aussi mêmes parties singulières en tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$. Dans la soustraction $f - g$, toutes les singularités en les $z = n$ sont alors éliminées d'un seul coup, donc h est holomorphe entière. Évidemment, elle hérite aussi d'une agréable 1-périodicité.

(f) Voici à quoi ressemble Π, ensemble fondamental qui pourrait être démultiplié par 1-périodicité.



(g) Soit donc $z = x + i\,y \in \Pi$, c'est-à-dire avec $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|y| \geqslant 1$.

Premièrement, pour majorer la fonction f qui est paire, on peut supposer $y \geqslant 1$, et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| \,&=\, \frac{\pi^2\,|2\,i|^2}{\big|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\big|^2} \,=\, \frac{4\,\pi^2}{\big|e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}\big|^2} \,\leqslant\, \frac{4\,\pi^2}{\big(e^{\pi\,y} - e^{-\pi\,y}\big)^2} \\ &\leqslant\, \frac{4\,\pi^2}{\big(e^{\pi} - e^{-\pi}\big)^2} \,<\, \infty. \end{aligned}$$

Deuxièmement, nous pouvons majorer dans Π la fonction g comme suit :

$$\big|g(z)\big| \,\leqslant\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\big|n - x - i\,y\big|^2} \,\leqslant\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n-x|^2} \,\leqslant\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\big(|n| - \frac{1}{2}\big)^2} \,<\, \infty.$$

(h) Nous venons de voir que $h = f - g$ est bornée en module sur Π, puisque f et g le sont. Ensuite, sur le rectangle compact $\big\{\big|\mathsf{Re}\,z\big| \leqslant \frac{1}{2},\ |\mathsf{Im}\,z| \leqslant 1\big\}$ étranglé entre les deux

colonnes verticales de Π, il est évident que h est bornée, car elle est continue sur $\mathbb{C}$. Ainsi, h est bornée sur la bande infinie $\big\{\big|\mathsf{Re}\, z\big| \leqslant \frac{1}{2}\big\}$, puis sur $\mathbb{C}$ tout entier, par 1-périodicité.

L'impitoyable théorème de Liouville force alors h à être constante.

(i) Pour ce qui est de f, utilisons l'estimation établie dans la Question **(g)** ci-dessus :

$$\lim_{y\to\infty} \big|f\big(i\,y\big)\big| \;\leqslant\; \lim_{y\to\infty} \frac{4\,\pi^2}{\big(e^{\pi\,y} - e^{-\pi\,y}\big)^2} \;=\; 0.$$

Quant à la série g, puisqu'on peut supposer $1 \leqslant y \longrightarrow \infty$, nous pouvons majorer chacun de ses termes par des quantités indépendantes de y :

$$\frac{1}{|n - i\,y|^2} \;=\; \frac{1}{n^2 + y^2} \;\leqslant\; \frac{1}{n^2+1},$$

dont la somme complète $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1} < \infty$ converge, et alors le théorème de convergence dominée pour les séries offre le résultat :

$$\lim_{y\to\infty} \big|g\big(i\,y\big)\big| \;=\; \lim_{y\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - i\,y)^2} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(n - i\,y)^2} \;=\; 0.$$

(j) Nous avons démontré en **(h)** que la fonction holomorphe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, égale à $f - g$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, est constante sur $\mathbb{C}$. Que vaut, alors, cette constante ?

Puisque la demi-droite verticale $\big\{i\,y\colon\; y \geqslant 1\big\}$ est contenue dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et puisque nous venons de voir que f *et* g tendent vers zéro quand on prend l'ascenseur vers l'infini du ciel imaginaire, la constante en question est forcément nulle. Ainsi, $h(z) \equiv 0$, donc $f(z) \equiv g(z)$, ce qui est la belle formule !

(k) Récrivons notre belle formule sous la forme :

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(n-z)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{\big[\sin\,(\pi\,z)\big]^2} - \frac{1}{z^2},$$

réduisons le membre de droite au même dénominateur, et effectuons un développement limité :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2\,z^2 - \big[\sin\,(\pi\,z)\big]^2}{z^2\,\big[\sin\,(\pi\,z)\big]^2} \;&=\; \frac{\pi^2\,z^2 - \big[\pi\,z - \frac{1}{6}\,\pi^3\,z^3 + \mathrm{O}(z^5)\big]^2}{z^2\,\big[\pi\,z - \frac{1}{6}\,\pi^3\,z^3 + \mathrm{O}(z^5)\big]^2} \;=\; \frac{\frac{2\,\pi^4}{6}\,z^4 + \mathrm{O}(z^6)}{\pi^2\,z^4 + \mathrm{O}(z^6)}\\ &=\; \frac{\pi^2}{3} + \mathrm{O}(z^2).\end{aligned}$$

Enfin, le théorème de convergence dominée pour les séries — encore lui ! — permet de justifier que :

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \lim_{z\to 0} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(n-z)^2} \;=\; \lim_{z\to 0} \Big(\frac{\pi^2}{3} + \mathrm{O}(z^2)\Big) \;=\; \frac{\pi^2}{3},$$

d'où en conclusion :

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. (a) Pour tout $z \in \Gamma$, puisque $0 \leqslant t \leqslant 1$, on peut minorer :

$$\begin{aligned} \big|f_t(z)\big| &\geqslant |f(z)| - \big|t\,g(z)\big| \\ &\geqslant |f(z)| - |g(z)| \\ &> 0. \end{aligned}$$

De plus, comme l'ensemble $[0,1] \times \Gamma$ est *compact*, cette minoration implique — exercice de révision en topologie — qu'il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait en fait :

$$\big|f_t(z)\big| \geqslant c > 0 \qquad (\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, z \in \Gamma).$$

Par conséquent, la fonction :

$$F(t,z) := \frac{f'(z) + t\,g'(z)}{f(t) + t\,g(z)}$$

est continue sur le compact $[0,1] \times \Gamma$. Donc le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique comme de la crème solaire sur le capot d'une Bugatti orange.

(b) Un théorème vu en cours énonce que $\mathrm{N}(t) \in \mathbb{Z}$, toujours, et même, que $\mathrm{N}(t)$ compte, avec multiplicités, le nombre de zéros que la fonction possède $f_t(z)$ dans Γ_{int}, sachant que l'inégalité vue plus haut garantissait sans que nous l'ayons expressément mentionné, que $f_t(z)$ n'a *aucun* zéro sur Γ. Et tout ceci est vrai quel que soit $t \in [0,1]$.

(c) Comme $t \longmapsto \mathrm{N}(t)$ est continue de l'intervalle connexe $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme elle est en fait à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et comme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ est *discret*, cette application est nécessairement *constante*, et donc, l'orange crémée tombe entre nos mains après avoir rebondi sur le capot :

$$\#\,\mathsf{zéros}\,(f) = \mathrm{N}(0) = \mathrm{N}(t) = \mathrm{N}(1) = \#\,\mathsf{zéros}\,\big(f + 1\,g\big).$$

(d) En effet, prenons $f(z) := 19\,z^4$ et aussi $g(z) := P(z) - f(z)$, puis, majorons bêtement sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$

$$\begin{aligned} |g(z)| = \Big|3\,z^{15} + 4\,z^8 + 6\,z^5 + 0 + 3\,z + 2\Big| &\leqslant 3\,|z|^{15} + 4\,|z|^8 + 6\,|z|^5 + 0 + 3\,|z| + 2 \\ &= 3 + 4 + 6 + 0 + 3 + 2 \\ &= 18 \\ &< 19 = \big|19\,z^4\big| = |f(z)|, \end{aligned}$$

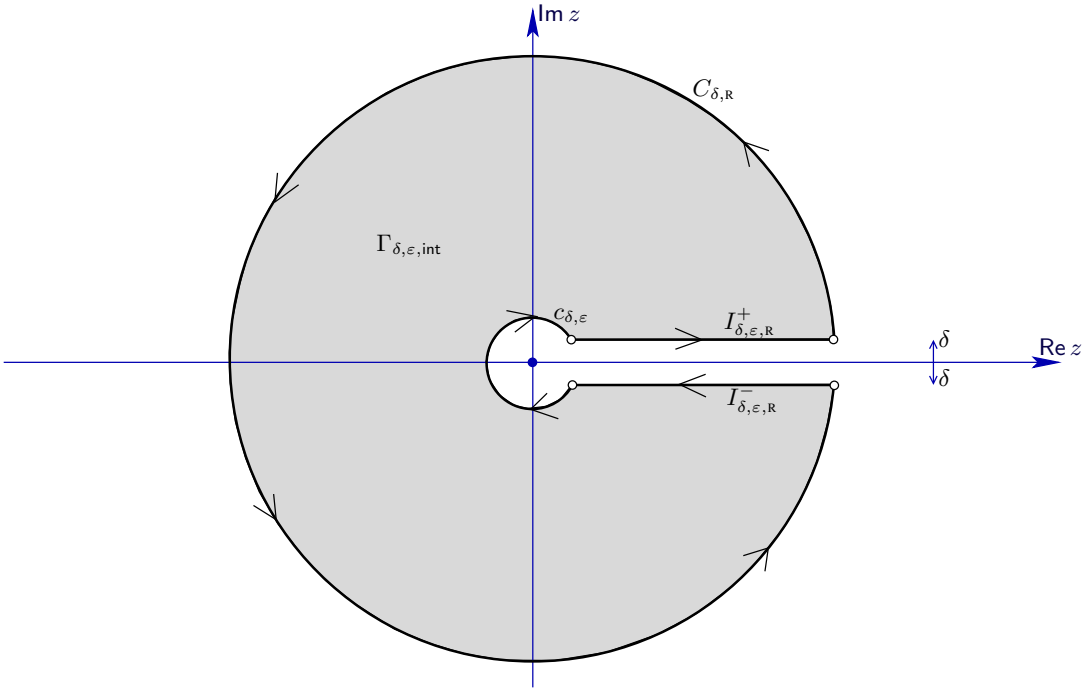
donc le résultat de la Question **(c)** — qui n'est autre que le *Théorème de Rouché* démontré d'une autre manière en cours — garantit que $P(z) = f(z) + g(z)$ a le même nombre de zéros dans $\{|z| < 1\}$ que $f(z) = 19\,z^4$, fonction qui a évidemment 4 zéros !

(e) On sait grâce au Théorème de d'Alembert-Gauss que notre polynôme $P(z)$ de degré $15 = 4{+}11$ possède précisément 15 zéros dans $\mathbb{C}$, comptés avec multiplicité. Pour conclure, il suffirait de faire voir que $P(z)$ n'a *aucun* zéro dans $\{|z| \geqslant 2\}$, ce qui n'est pas sorcier.

Étant donné un rayon $\mathrm{R} \geqslant 2$ quelconque, et un point $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = \mathrm{R}$ quelconque, il suffit en effet de minorer astucieusement :

$$\begin{aligned}
\big|P(z)\big| &\geqslant 3\,|z|^{15} - 4\,|z|^{8} - 6\,|z|^{5} - 19\,|z|^{4} - 3\,|z| - 2 \\
&= 3\,\mathrm{R}^{15} - 4\,\mathrm{R}^{8} - 6\,\mathrm{R}^{5} - 19\,\mathrm{R}^{4} - 3\,\mathrm{R} - 2 \\
&= \mathrm{R}^{8}\Big(3\,\mathrm{R}^{7} - 4 - \tfrac{6}{\mathrm{R}^{3}} - \tfrac{19}{\mathrm{R}^{4}} - \tfrac{3}{\mathrm{R}^{7}} - \tfrac{2}{\mathrm{R}^{8}}\Big) \\
&\geqslant 2^{8}\Big(\underbrace{3\,2^{7} - 4 - \tfrac{6}{2^{3}} - \tfrac{19}{2^{4}} - \tfrac{3}{2^{7}} - \tfrac{2}{2^{8}}}_{>\,0}\Big).
\end{aligned}$$

Exercice 3. **(a)** *Maître*, votre dévoué serviteur vous apporte la pièce métallique désirée :



(b) Pour $a, b > 0$, nous savons qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}
a + i\,b &= \rho\,\Big(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big) \\
&= \rho\,\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big),
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \arctan \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\
&= \arctan \tfrac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
-\,a - i\,b &= -\,\big(a + i\,b\big) \\
&= -\,\rho\,e^{i\,\arctan\frac{b}{a}} \\
&= \rho\,e^{i\,\left(\pi + \arctan\frac{b}{a}\right)} \;=:\; \rho\,e^{i\,\varphi_{-}},
\end{aligned}$$

Rappelons que la fonction :

$$\mathsf{arctan}: \quad]-\infty,\infty[\quad \longrightarrow \quad]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[$$

est définie pour tous les nombres réels, et qu'elle est impaire. Donc la formule ci-dessus est en fait aussi vraie pour $b \in \mathbb{R}$ de signe quelconque, ce qui nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} -a+i\,b &= -\big(a-i\,b\big) \\ &= -\rho\, e^{i\,\mathsf{arctan}\,\frac{-b}{a}} \\ &= \rho\, e^{i\,\left(\pi-\mathsf{arctan}\,\frac{b}{a}\right)} \;=:\; \rho\, e^{i\,\varphi_+}. \end{aligned}$$

(c) La factorisation $(z+a)^2+b^2=(z-w_-)\,(z-w_+)$ montre que ces deux uniques pôles sont *simples*, ce qui facilite le calcul de :

$$\begin{aligned} \mathsf{Res}_f(w_-) &= \lim_{z\to w_-} \underline{(z-w_-)}_{\circ}\, \frac{[\mathsf{log}\,z]^2}{\underline{(z-w_-)}_{\circ}\,(z-w_+)} \\ &= \frac{\big[\mathsf{log}\,w_-\big]^2}{w_- - w_+} \\ &= \frac{\big[\mathsf{log}\,\rho + i\,\varphi_-\big]^2}{-\,2i\,b}, \end{aligned}$$

puis celui très similaire de :

$$\begin{aligned} \mathsf{Res}_f(w_+) &= \lim_{z\to w_+} \underline{(z-w_+)}_{\circ}\, \frac{[\mathsf{log}\,z]^2}{(z-w_-)\,\underline{(z-w_+)}_{\circ}} \\ &= \frac{\big[\mathsf{log}\,w_+\big]^2}{w_+ - w_-} \\ &= \frac{\big[\mathsf{log}\,\rho + i\,\varphi_+\big]^2}{2i\,b}. \end{aligned}$$

(d) Le Théorème des résidus de Jordan-Cauchy offre :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}} f(z)\,dz &= \frac{2i\pi}{2i\,b}\left(\big[\mathsf{log}\,\rho + i\,\varphi_+\big]^2 - \big[\mathsf{log}\,\rho + i\,\varphi_-\big]^2\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(2\,\mathsf{log}\,\rho\,\big(i\,\varphi_+ - i\,\varphi_-\big) - \big(\varphi_+\big)^2 + \big(\varphi_-\big)^2\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(2\,\mathsf{log}\,\rho\,\big(-\,2i\,\mathsf{arctan}\,\tfrac{b}{a}\big) - \big(\pi - \mathsf{arctan}\,\tfrac{b}{a}\big)^2 + \big(-\,\pi - \mathsf{arctan}\,\tfrac{b}{a}\big)^2\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(4\pi\,\mathsf{arctan}\,\tfrac{b}{a} - 4i\,\mathsf{log}\,\rho\;\mathsf{arctan}\,\tfrac{b}{a}\right) \\ &=: \mathrm{A} + i\,\mathrm{B}. \end{aligned}$$

(e) Il suffit de faire tendre $\delta \xrightarrow{>} 0$, en prenant bonne note du fait que le segment orienté $I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$ tend, par en-dessous l'axe réel positif $\mathbb{R}_+$, vers l'intervalle $[\mathrm{R},\varepsilon]$ *orienté de la droite vers la gauche*, et en faisant bien attention au fait que les valeurs du logarithme $\mathsf{log}\,e^{i\theta} = i\,\theta$ tendent vers $2i\pi$ lorsque $\theta < 2\pi$ tend vers 2π, toujours lorsqu'on s'approche de l'axe réel (strictement) positif *par en-dessous*.

Enfin, on vérifie mentalement que toutes les intégrales considérées sont continues en $\delta > 0$, grâce au fait que $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{R} < \infty$ sont fixés.

(f) L'existence de constantes $0 < \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 < \infty$ telles que ces deux inégalités soient satisfaites découle aisément d'une connaissance du comportement de $x \longmapsto \log x$ lorsque $0 \overset{<}{\longleftarrow} x$ et lorsque $x \longrightarrow \infty$, et aussi, du fait que $b > 0$.

Ensuite, on retrouve par un petit calcul connu que $x \longmapsto \log x$ a pour primitive $x \log x - x$:

$$\int 1 \cdot \log x \, dx \;=\; x \log x - \int x \, \frac{1}{x} \;=\; x \log x - x,$$

et puisque $\varepsilon \log \varepsilon \longrightarrow 0$ lorsque $0 \overset{<}{\longleftarrow} \varepsilon$, il en découle que $\int_0^* \log x \, dx$ est intégrable en 0.

On doit en principe avoir déjà vu dans sa longue vie étudiante que la fonction $x \longmapsto [\log x]^2$ est aussi intégrable en 0, et si on ne l'a pas encore vu, il suffit, en intégrant par parties, d'en trouver la primitive :

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \big[\log x\big]^2 \, dx \;&=\; x \, \big[\log x\big]^2 - \int x \, \frac{2 \log x}{x} \\ &=\; x \, \big[\log x\big]^2 - 2 \, x \log x + 2 \, x, \end{aligned}$$

et de se souvenir qu'on a aussi $\varepsilon \, \big[\log \varepsilon\big]^2 \longrightarrow 0$ lorsque $0 \overset{<}{\longleftarrow} \varepsilon$. (Plus généralement, toutes les puissances entières $[\log x]^k$ sont intégrables en 0.)

En découpant l'intégrale :

$$\int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2 + b^2} \, dx \;=\; \int_\varepsilon^1 + \int_1^{\mathrm{R}},$$

l'existence et la valeur de la double limite en question est alors une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée grâce aux deux inégalités exhibées.

(g) Paramétrons le cercle c_ε par $z = \varepsilon \, e^{i\theta}$, d'où $dz = \varepsilon \, i \, e^{i\theta} \, d\theta$. En supposant $0 < \varepsilon < 1$, nous venons de nous convaincre qu'il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_4, \mathrm{M}_5 < \infty$ telles que :

$$\frac{\big|\log \varepsilon + i \, \theta\big|^2}{\big(\varepsilon \, e^{i\theta} + a\big)^2 + b^2} \;\leqslant\; \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_5 \, \big(\log \varepsilon\big)^2 \qquad {\scriptstyle (\forall \, 0 < \theta < 2\pi)},$$

donc :

$$\begin{aligned} \bigg| \int_{c_\varepsilon} f(z) \, dz \bigg| \;&=\; \bigg| \int_0^{2\pi} \frac{\big[\log \varepsilon + i \, \theta\big]^2}{\big(\varepsilon \, e^{i\theta} + a\big)^2 + b^2} \; \varepsilon \, i \, e^{i\theta} \, d\theta \bigg| \\ &=\; \int_0^{2\pi} \Big(\mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_5 \, \big(\log \varepsilon\big)^2\Big)^2 \, \varepsilon \; d\theta \\ &=\; 2\pi \, \Big(\mathrm{M}_4 \, \varepsilon + \mathrm{M}_5 \, \varepsilon \, \big(\log \varepsilon\big)^2\Big) \quad \xrightarrow[>]{\varepsilon \longrightarrow 0} \quad 0. \end{aligned}$$

(h) De manière similaire, il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_7 < \infty$ telles que pour tout $1 < \mathrm{R}$ on a :

$$\frac{\big|\log \mathrm{R} + i\theta\big|^2}{\big(\mathrm{R} \, e^{i\theta} + a\big)^2 + b^2} \;\leqslant\; \frac{\mathrm{M}_6 + \mathrm{M}_7 \, \big(\log \mathrm{R}\big)^2}{\mathrm{R}^2} \qquad {\scriptstyle (\forall \, 0 < \theta < 2\pi)},$$

donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{\big[\log \mathrm{R} + i\theta\big]^2}{\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}+a\big)^2+b^2}\ \mathrm{R}\,i\,e^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{M}_6+\mathrm{M}_7\big(\log \mathrm{R}\big)^2}{\mathrm{R}^2}\ \mathrm{R}\,d\theta \\
&= 2\pi\,\frac{\mathrm{M}_6+\mathrm{M}_7\big(\log \mathrm{R}\big)^2}{\mathrm{R}^1} \quad \xrightarrow{\mathrm{R}\longrightarrow\infty} \quad 0.
\end{aligned}$$

(i) D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}+i\,\mathrm{B} &= \frac{4\pi^2}{b}\,\mathsf{arctan}\,\frac{b}{a} - i\,\frac{4\pi}{b}\,\mathsf{arctan}\,\frac{b}{a}\,\mathsf{log}\,\sqrt{a^2+b^2} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}}\ \lim_{\mathrm{R}\to\infty}\left(\int_{C_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz - \int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big[\mathsf{log}\,x+2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx - \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big(\mathsf{log}\,x\big)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx\right) \\
&= 0 - \int_0^\infty \frac{\big[\mathsf{log}\,x+2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx - 0 + \int_0^\infty \frac{\big[\mathsf{log}\,x\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.
\end{aligned}$$

De manière cruciale, la puissance $(\bullet)^2$ de $\mathsf{log}\,x$ *disparaît dans la soustraction*, ce qui nous donne :

$$\mathrm{A}+i\,\mathrm{B} = \int_0^\infty \frac{-4i\pi\,\mathsf{log}\,x+4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

et en identifiant les parties imaginaires :

$$\frac{4\pi}{b}\,\mathsf{arctan}\,\frac{b}{a}\,\mathsf{log}\,\sqrt{a^2+b^2} = 4\pi\int_0^\infty \frac{\mathsf{log}\,x}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

nous parvenons royalement au résultat demandé !

11. Examen 6

Exercice 1. La fonction de Bessel de 1ère espèce et d'indice 0 est définie par :

$$J_0(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2} \, z^{2n}.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. Indication: Utiliser la formule de D'Alembert ; ou utiliser la formule de Stirling qui fournit un équivalent de $n!$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(b) Montrer que $w(z) := J_0(z)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$0 \;\equiv\; z^2\, w''(z) + z\, w'(z) + z^2\, w(z).$$

Exercice 2. Soit $C := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$ le cercle unité, parcouru dans le sens trigonométrique.

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, l'intégrale :

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}.$$

Indication: Utiliser la formule du binôme de Newton.

(b) En déduire les valeurs de :

$$I_{2n} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t \, dt \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad J_{2n} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t \, dt.$$

(c) Trouver les valeurs de :

$$I_{2n+1} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} t \, dt \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad J_{2n+1} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} t \, dt.$$

Exercice 3. [Théorème des trois cercles de Hadamard] Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert *connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui contient un anneau *fermé* :

$$A_{r,\mathrm{R}} \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ r \leqslant |z| \leqslant \mathrm{R}\big\} \;\subset\; \Omega,$$

où $0 < r < \mathrm{R}$ sont deux rayons positifs fixés. Pour $\rho \in [r, \mathrm{R}]$ quelconque, on note :

$$M_f(\rho) \;:=\; \max_{|z|=\rho} \big|f(z)\big|.$$

(a) Après avoir dressé une figure soignée, pour ρ fixé avec $r \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R}$, montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ unique tel que :

$$\rho \;=\; r^{\theta}\, \mathrm{R}^{1-\theta},$$

et donner la valeur explicite de θ.

(b) Montrer, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \geqslant 1$ que l'on a :

$$\rho^p\, M_f(\rho)^q \;\leqslant\; \max\big\{r^p\, M_f(r)^q,\ \ \mathrm{R}^p\, M_f(\mathrm{R})^q\big\}.$$

(c) En déduire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\rho^\alpha\, M_f(\rho) \;\leqslant\; \max\big\{r^\alpha\, M_f(r),\;\; \mathrm{R}^\alpha\, M_f(\mathrm{R})\big\}.$$

(d) En déduire que :

$$M_f(\rho) \;\leqslant\; M_f(r)^\theta\, M_f(\mathrm{R})^{1-\theta} \qquad\qquad (\forall\, \rho \text{ avec } r \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R}).$$

(e) Interpréter le résultat obtenu en termes de fonctions convexes.

Exercice 4. Pour un paramètre réel $t \in \mathbb{R}$, l'objectif de cet exercice est de déterminer la limite, quand $\mathbb{R} \longrightarrow \infty$, des intégrales :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \;:=\; \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\sin x}{x}\, e^{it\,x}\, dx.$$

(a) On introduit la fonction méromorphe $f_t(z) := \frac{\sin z}{z}\, e^{itz}$. Vérifier que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, puis montrer que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe *entière*.

(b) Pour $\mathrm{R} > 1$ quelconque, soit le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$. Soit aussi β_{R} la courbe orientée, constituée des trois morceaux : le segment $[-\mathrm{R}, -1]$; le demi-cercle unité *inférieur*, *i.e.* situé *sous* l'axe des abscisses, orienté dans le sens trigonométrique, contenant -1, $-i$, 1 ; le segment $[1, \mathrm{R}]$. Dessiner très soigneusement $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$, $0 \in \mathbb{C}$, β_{R}, $-\mathrm{R}$, -1, $-i$, 1, R.

(c) Montrer l'égalité :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}]} f_t(z)\, dz \;=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} f_t(z)\, dz.$$

(d) Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $g_s(z) := \frac{1}{2i}\, \frac{e^{isz}}{z}$. Vérifier que :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \;=\; J_{\mathrm{R}}(t+1) - J_{\mathrm{R}}(t-1) \qquad \text{en posant} \qquad J_{\mathrm{R}}(s) \;:=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} g_s(z)\, dz.$$

(e) On introduit les deux courbes :

$\gamma_{\mathrm{R}}^+ \;:=$ demi-cercle supérieur centré en 0 de rayon R orienté positivement contenant R, $i\,\mathrm{R}$, $-\mathrm{R}$,

$\gamma_{\mathrm{R}}^- \;:=$ demi-cercle inférieur centré en 0 de rayon R orienté négativement contenant R, $-i\,\mathrm{R}$, $-\mathrm{R}$.

Exécuter très soigneusement une nouvelle figure complète, contenant tous les élément précédents ainsi que γ_{R}^-, $-i\,\mathrm{R}$, γ_{R}^+, $i\,\mathrm{R}$.

(f) Montrer que :

$$J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}}\, d\theta.$$

(g) Calculer $\mathrm{Res}_{g_s}(0)$.

(h) Montrer que :

$$J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \pi - \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}}\, d\theta.$$

(i) Montrer que pour tout $s < 0$, on a :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}}\, d\theta.$$

Indication: Utiliser un théorème expéditif du cours d'Intégration.

(j) Montrer que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \begin{cases} \pi & \text{lorsque } \; s>0, \\ \pi/2 & \text{pour } \; s=0, \\ 0 & \text{lorsque } \; s<0. \end{cases}$$

(k) En déduire les valeurs recherchées :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\sin x}{x}\, e^{itx}\, dx \;=\; \begin{cases} \pi & \text{lorsque } \; |t|<1, \\ \pi/2 & \text{pour } \; t=-1,1, \\ 0 & \text{lorsque } \; |t|>1. \end{cases}$$

(l) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ telle que $z^2\, f(z)^2 = \sin\,(z^2)$.

Exercice 5. [Produits de Blaschke finis] L'objectif de cet exercice est de décrire *toutes* les fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0) = \{|z| < 1\}$, continues sur sa fermeture $\overline{\mathbb{D}}$, et dont le module prend une valeur *constante* au bord, sur le cercle unité $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$.

(a) Plus généralement, soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné non vide, et soit $h \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction holomorphe dans Ω et continue jusqu'au bord $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$, dont le module $|h(\zeta)| \equiv a \in \mathbb{R}_+$ est constant pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Quand $a = 0$, justifier que $h(z) \equiv 0$ dans $\Omega \cup \partial\Omega$.

(b) On suppose dorénavant que le module $|h(\zeta)| \equiv a \in \mathbb{R}_+^*$ est constant non nul sur le bord pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Quand $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$, montrer que $|h(z)| \equiv a$ est constant partout, pour tout $z \in \overline{\Omega} \cup \Omega$.
Indication: Penser à $\frac{1}{h(z)}$.

(c) Sous l'hypothèse de la Question **(b)**, montrer que $h(z) \equiv \mu \in \mathbb{C}^*$ est alors *constante*, partout dans $\Omega \cup \partial\Omega$.

(d) En supposant que h est *non constante* dans $\overline{\Omega}$, toujours avec $\big|h\big|_{\partial\Omega}$ constant, déduire que h admet alors (au moins) un zéro dans Ω.

(e) Soit donc une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$ dont le module est constant sur $\partial\mathbb{D}$. En déduire que f est ou bien constante, ou bien admet une factorisation de la forme :

$$f(z) \;=\; \big(z-\alpha_1\big)^{m_1} \cdots \big(z-\alpha_p\big)^{m_p}\, g(z),$$

où $p \geqslant 1$ est entier, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{D}$ sont mutuellement distincts, où $m_1, \ldots, m_p \geqslant 1$ sont entiers, et où $g \in \mathscr{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^*)$ est une fonction holomorphe jamais nulle dans $\mathbb{D}$. Indication: Justifier, lorsque f est non constante, qu'elle n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$. Dresser une figure parlante.

(f) On supppose dorénavant que f n'est pas constante. Soit $\alpha \in \mathbb{D}$, et soit la fonction-type :

$$\phi_\alpha(z) \;:=\; \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Montrer que $\big|\phi_\alpha(z)\big| \equiv 1$ sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$.

(g) Soit la fonction :

$$h(z) \;:=\; f(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{(\phi_{\alpha_i}(z))^{m_i}}.$$

Montrer que h définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ dont le module $|h(z)| \equiv c \in \mathbb{R}_+^*$ est *constant* non nul sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.

(h) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$f(z) \equiv \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \Big(\frac{z - \alpha_i}{1 - \overline{\alpha}_i z}\Big)^{m_i} \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

(i) Trouver toutes les fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$ dont le module est constant sur le cercle unité.

Exercice 6. [Théorème de Gauss-Lucas] On rappelle que l'*enveloppe convexe* d'un ensemble fini $E_w := \big\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\big\}$ de points $w_\ell \in \mathbb{C}$ avec $1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}$ est définie comme :

$$\widehat{E_w} := \Big\{\lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{L}}\, w_{\mathrm{L}} \colon\ 0 \leqslant \lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{L}} \leqslant 1,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{L}} = 1\Big\}.$$

Soit un polynôme holomorphe $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ de degré $n \geqslant 1$, donc avec $a_n \neq 0$, et soient $z_1, \dots, z_n$ ses zéros, comptés avec multiplicités.

L'objectif est d'établir que les zéros $w_1, \dots, w_{n-1}$ de son polynôme dérivé $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$ sont tous situés dans l'*enveloppe convexe* des zéros $z_1, \dots, z_n$.

(a) Pour un entier quelconque $1 \leqslant j \leqslant n-1$, si $w_j \neq z_1, \dots, z_n$ n'est *pas* l'un des zéros de $P(z)$, établir la formule :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_j - z_i}{|w_j - z_i|^2}.$$

Indication: Décomposer $\frac{P'(z)}{P(z)}$ en élément simples et obtenir $\frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}$.

(b) Ré-écrire cette identité algébrique de manière à conclure. Indication: Trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. (a) En vertu de l'équivalent de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, l'inverse $\frac{1}{\mathrm{R}}$ du rayon de convergence de $J_0(z)$ vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{R}} &= \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\right|^{\frac{1}{2n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2n}}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{e}{n\left[2\pi\, n\right]^{\frac{1}{n}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence $\mathrm{R} = \infty$ est infini, ce qui veut dire que $J_0(z)$ est une fonction holomorphe *entière*, définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.

(b) D'après un théorème du cours, la série de $J_0(z)$ et toutes ses séries dérivées terme terme à des ordres quelconques sont normalement convergentes sur les compacts arbitraires $K \subset \mathbb{C}$. Pour vérifier que l'équation différentielle est satisfaite, nous pouvons donc dériver gaillardement et effectuer sans inquiétude des manipulations algébriques élémentaires *derrière* le signe de sommation infinie :

$$\begin{aligned}
z^2\, J_0''(z) + z\, J_0'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(z^2\,(-1)^n\,\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\,2n\,(2n-1)\,z^{2n-2} + z\,(-1)^n\,\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\,2n\,z^{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n\,2n\,\big(2n-1+1\big)\,\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\,z^{2n}\right) \\
&= -\,z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2^{2(n-1)}\,\big((n-1)!\big)^2}\,z^{2(n-1)} \\
&= -\,z^2\, J_0(z),
\end{aligned}$$

petites manipulations en catimini de niveau L1$^+$ qui concluent !

Exercice 2. (a) En vertu du théorème facile et crucial maintes fois cité et utilisé en cours :

$$\int_{|z|=1} z^m\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{pour } m = -1, \\ 0 & \text{lorsque } m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \end{cases}$$

nous pouvons aisément calculer en développant grâce à la formule du binôme de Newton :

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} \binom{2n}{k} \int_C z^{2n-2k-1}\, dz = \binom{2n}{n}\, 2i\pi.$$

(b) En paramétrant le cercle unité par $z = e^{it}$, pour $t \in [-\pi, \pi]$, d'où $dz = i\, e^{it}\, dt$, puis $\frac{dz}{z} = i\, dt$, nous pouvons ré-exprimer l'intégrale dont nous venons de calculer la valeur :

$$\binom{2n}{n} 2i\pi \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \big(e^{it} + e^{-it}\big)^{2n}\, i\, dt \;=\; i\, 2^{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos t\big)^{2n}\, dt,$$

pour trouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt \;=\; \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t\, dt,$$

cette dernière égalité étant immédiate par changement de variable, puisque $\sin t = \cos\big(t - \frac{\pi}{2}\big)$.

(c) En vertu de ce changement de variable $t \longmapsto t - \frac{\pi}{2}$, et du fait que $t \longmapsto \sin^{2n+1} t$ est une fonction *impaire*, on retrouve, sans aucun calcul, l'Être le plus séduisant de toutes les mathématiques, le zéro adoré :

$$0 \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} t\, dt \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} t\, dt.$$

Exercice 3. (a) On a $\log \rho \in \big[\log r, \log \mathrm{R}\big]$, donc il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que :

$$\log \rho \;=\; \theta \log r + (1 - \theta) \log \mathrm{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta \;=\; \frac{\log \mathrm{R} - \log \rho}{\log \mathrm{R} - \log r}.$$

En exponentiant cela, on déduit le résultat souhaité :

$$\rho \;=\; e^{\log \rho} \;=\; e^{\theta \log r + (1-\theta) \log \mathrm{R}} \;=\; r^{\theta}\, \mathrm{R}^{1-\theta}.$$

(b) La fonction $z \longmapsto z^p\, f(z)^q$ est holomorphe à l'intérieur de $A_{r,\mathrm{R}}$, continue jusqu'au bord, *i.e.* continue sur le compact $\overline{A}_{r,\mathrm{R}}$, puisqu'elle est en fait holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{A}_{r,\mathrm{R}}$. L'inégalité demandée est alors une application immédiate du principe du maximum, vu en cours.

(c) On peut ré-écrire l'inégalité obtenue en **(b)** comme :

$$\rho^{p/q}\, M_f(\rho) \;\leqslant\; \max\Big\{r^{p/q}\, M_f(r),\;\; \mathrm{R}^{p/q}\, M_f(\mathrm{R})\Big\}.$$

Il suffit alors de considérer une suite p_n/q_n, avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, de rationnels qui convergent vers $\alpha \longleftarrow p_n/q_n$, et de passer à la limite.

(d) D'une part, si $M_f(r) = 0$, ou si $M_f(\mathrm{R}) = 0$, ce qui veut dire que f est nulle sur le cercle C_r ou sur le cercle C_{R} dont tous les points sont d'accumulation, le résultat est satisfait car le principe des zéros isolés force alors la fonction f, holomorphe dans $\Omega \supset C_r \cup C_{\mathrm{R}}$, à être identiquement nulle, et dans ces deux cas, l'inégalité $0 \leqslant 0^{\theta} \cdot M_f(\mathrm{R})^{1-\theta}$ ou $0 \leqslant M_f(r)^{\theta} \cdot 0^{1-\theta}$ est trivialement vérifiée.

Encore du zéro partout ! Beau barème — merci Monsieur de Marçay !

Nous pouvons donc supposer que $M_f(r) \neq 0$ et que $M_f(\mathrm{R}) \neq 0$. En prenant alors la valeur astucieuse :

$$\alpha \;:=\; \frac{-\log M_f(\mathrm{R}) + \log M_f(r)}{\log \mathrm{R} - \log r},$$

pour laquelle :

$$r^{\alpha}\, M_f(r) \;=\; \mathrm{R}^{\alpha}\, M_f(\mathrm{R}),$$

nous nous arrangeons pour que les deux termes dont on prend le maximum dans la Question **(c)** soient égaux — donc il n'y a plus à prendre de maximum !

Cette Question **(c)** fournit alors l'inégalité :

$$\rho^\alpha\, M_f(\rho) \leqslant r^\alpha\, M_f(r),$$

qui, au prix de calculs un peu exigeants, nous conduit par la main jusqu'à la conclusion désirée :

$$\begin{aligned}
M_f(\rho) &\leqslant \rho^{-\alpha}\, r^\alpha\, M_f(r) \\
&= e^{\alpha\,(\log r - \log \rho)}\, e^{\log M_f(r)} \\
&= e^{\frac{-\log M_f(\mathrm{R}) + \log M_f(r)}{\log \mathrm{R} - \log r}\,(\log r - \log \rho)}\, e^{\log M_f(r)} \\
&= e^{\frac{\log \rho - \log r}{\log \mathrm{R} - \log r}\,\log M_f(\mathrm{R})}\;\; e^{\left(\frac{\log r - \log \rho}{\log \mathrm{R} - \log r} + 1\right)\log M_f(r)} \\
&= \big[M_r(\mathrm{R})\big]^{\frac{\log \rho - \log r}{\log \mathrm{R} - \log r}}\;\big[M_f(r)\big]^{\frac{\log \mathrm{R} - \log \rho}{\log \mathrm{R} - \log r}} \\
&= M_f(\mathrm{R})^{1-\theta}\, M_f(r)^\theta.
\end{aligned}$$

(e) L'inégalité obtenue peut s'interpréter en disant que la fonction $H\colon x \longmapsto \log M_f(e^x)$ est *convexe*, puisque :

$$\begin{aligned}
H\big(\theta\, x + (1-\theta)\, y\big) &= \log\big(M_f\,\big(e^{\theta x}\, e^{(1-\theta) y}\big)\big) \\
[x := \log r,\ y = \log \mathrm{R}] \qquad &\leqslant \theta \log M_f(e^x) + (1-\theta) \log M_f(e^y) \\
&= \theta\, H(x) + (1-\theta)\, H(y).
\end{aligned}$$

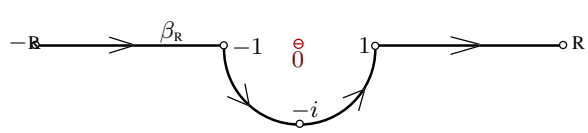
Exercice 4. (a) En-dehors de l'origine, la fonction est holomorphe partout dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, car $\sin z$ et $e^{it\,z}$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier, et car $\frac{1}{z} \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$.

Rappelons que $\sin z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, d'où $\sin z = z + \mathrm{O}(z^2)$, et par conséquent :

$$\frac{\sin z}{z} = 1 + \mathrm{O}(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\, \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

est holomorphe au voisinage de 0, grâce au théorème d'élimination des singularités de Riemann, ou grâce au théorème de Laurent.

(b) Voici la figure demandée.



(c) On décompose chacune de ces deux intégrales en trois sous-intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}]} f_t(z)\, dz &= \int_{[-\mathrm{R},-1]} f_t(x)\, dx + \int_{[-1,1]} f_t(x)\, dx + \int_{[1,\mathrm{R}]} f_t(x)\, dx, \\
\int_{\beta_\mathrm{R}} f_t(z)\, dz &= \int_{[-\mathrm{R},-1]} f_t(x)\, dx + \int_{C^-} f_t(z)\, dz + \int_{[1,\mathrm{R}]} f_t(x)\, dx,
\end{aligned}$$

où C^- est le demi-cercle unité inférieur parcouru dans le sens trigonométrique. Pour vérifier que ces deux intégrales sont égales, il suffit par soustraction, d'établir que celles au milieu sont égales :

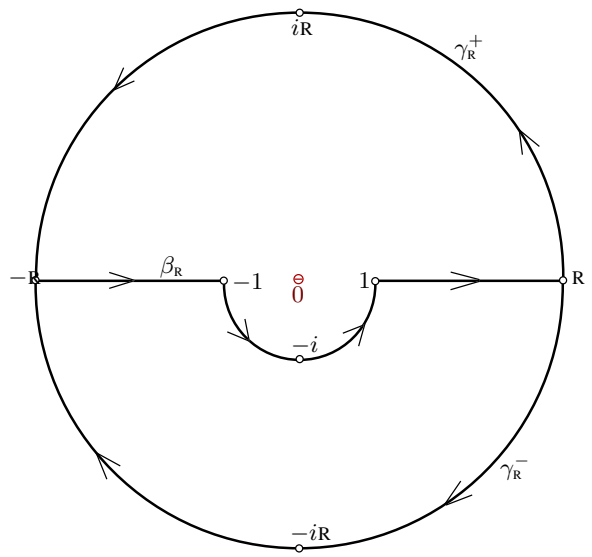
$$0 \overset{?}{=} \int_{[-1,1]} f_t(z)\, dz - \int_{C^-} f_t(z)\, dz.$$

Mais la concaténation du segment $[-1,1]$ avec le demi-cercle inférieur C^- constitue une courbe fermée dans l'ouvert $\Omega := \mathbb{C}$, convexe, étoilé, simplement connexe (et tutti quanti), dans lequel les fonctions holomorphes admettent toujours une primitive. Grâce à un théorème du cours maintes fois répété au tableau, l'intégrale de $f_t(z)$ sur cette concaténation fermée est *nulle*, ce qui équivaut à l'égalité en question.

(d) Grâce à ce que nous venons de voir, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{R}}(t) \;=\; \int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}]} \frac{\sin z}{z}\, e^{itz}\, dz \;=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} \frac{\sin z}{z}\, e^{itz}\, dz \;&=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i\, z}\, e^{itz}\, dz \\ &=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i(t+1)z}}{z}\, dz - \int_{\beta_{\mathrm{R}}} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i(t-1)z}}{z}\, dz \\ &=\; J_{\mathrm{R}}(t+1) - J_{\mathrm{R}}(t-1). \end{aligned}$$

(e) Voici, sans insolence, la figure demandée, Ô Maître, Ô dur Maître !



(f) Le contour fermé $\beta_{\mathrm{R}} \cup \gamma_{\mathrm{R}}^-$ ne contient pas, dans son intérieur de Jordan, l'unique singularité, $\{0\}$, de la fonction méromorphe $g_s(z) = \frac{1}{2i}\,\frac{e^{isz}}{z}$. Donc le théorème de Jordan-Cauchy donne l'annulation de l'intégrale de cette fonction le long de ce contour, et en paramétrisant la courbe γ_{R}^- *inverse*, c'est-à-dire parcourue dans le sens *positif*, par $z = \mathrm{R}\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\pi, 2\pi]$, d'où $dz = \mathrm{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta$, on obtient bien :

$$0 \;=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}} \cup \gamma_{\mathrm{R}}^-} g_s(z)\, dz \;=\; J_{\mathrm{R}}(s) - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i\, s\, \mathrm{R}\, e^{i\theta}}}{\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, \mathrm{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(g) Rien de plus aisé, ma Caramelle maternelle !

$$\mathsf{Res}_{g_s}(0) \;=\; \lim_{z\to 0} z\, \frac{1}{2i}\, \frac{e^{isz}}{z} \;=\; \frac{1}{2i}\, e^0 \;=\; \frac{1}{2i}.$$

(h) L'*autre* contour fermé $\beta_{\mathrm{R}} \cup \gamma_{\mathrm{R}}^+$ possède maintenant un intérieur de Jordan qui *contient* l'unique singularité $\{0\}$ de $g_s(z)$. Nous devons donc appliquer le Théorème des résidus, vu lors de l'ultime séance de cours qui précédait cet examen partiel.

Sans hésitation, grâce à une paramétrisation du demi-cercle γ_{R}^{+} par $z = \mathrm{R}\, e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \pi]$, nous obtenons :

$$\pi \,=\, 2i\pi\, \frac{1}{2i} \,=\, \int_{\beta_{\mathrm{R}} \cup \gamma_{\mathrm{R}}^{+}} g_s(z)\, dz \,=\, J_{\mathrm{R}}(s) + \int_0^{\pi} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i\, s\, \mathrm{R}\, e^{i\theta}}}{\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, \mathrm{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(i) On a :

$$\left|e^{is\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}}\right| \,=\, \left|e^{i\,s\,\mathrm{R}\cos\theta - s\,\mathrm{R}\sin\theta}\right| \,=\, e^{-s\,\mathrm{R}\sin\theta},$$

et pour $\pi < \theta < 2\pi$ avec $s < 0$, ce majorant est < 1 puisque trois fois le signe moins donne un signe moins, et tend vers zéro lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique immédiatement.

(j) Tout d'abord, la Question **(i)** qui précède donne, pour $s < 0$:

$$\left|J_{\mathrm{R}}(s)\right| \,\leqslant\, \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\, e^{-s\,\mathrm{R}\sin\theta}\, d\theta \,\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.$$

Ensuite, pour $s = 0$, il est clair que :

$$J_{\mathrm{R}}(0) \,=\, \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i0}\, d\theta \,=\, \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, une modification légère du raisonnement effectué à l'instant dans la Question **(i)** montre, en revenant à l'identité de la Question **(h)**, que pour $s > 0$, on a de même grâce à une convergence très dominante :

$$\left|J_{\mathrm{R}}(s) - \pi\right| \,\leqslant\, \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\, e^{-\,s\,\mathrm{R}\sin\theta}\, d\theta \,\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.$$

(k) En revenant à la Question **(d)** :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \,=\, J_{\mathrm{R}}(t+1) - J_{\mathrm{R}}(t-1),$$

on vérifie mentalement que le résultat qui précède conclut.

(l) On constate que $\frac{\sin(z^2)}{z^2}$ est holomorphe jamais nulle près de 0. On peut en prendre le logarithme, puis une racine carrée $f(z)^2 = \frac{\sin(z^2)}{z^2}$.

Exercice 5. (a) Un des principes du maximum vu en cours offre sans efforts l'inégalité qui force h à être identiquement nulle :

$$\left|h(z)\right| \,\leqslant\, 0 \,=\, \max_{\zeta \in \partial\Omega} \left|h(\zeta)\right| \qquad (\forall\, z \in \overline{\Omega}).$$

(b) Notons donc $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ la valeur *constante* de $|h|$ sur $\partial\Omega$, et supposons h jamais nulle dans Ω. Alors la fonction $\frac{1}{h(z)}$ est holomorphe dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, et de module constant, égal à $\frac{1}{a}$, sur le bord $\partial\Omega$. Grâce au principe du maximum appliqué à $\frac{1}{h(z)}$, pour tout $z \in \Omega$, il vient :

$$\left|\frac{1}{h(z)}\right| \,\leqslant\, \frac{1}{a} \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \left|h(z)\right| \,\geqslant\, a.$$

De plus évidemment, $|h(z)| \leqslant a$ pour tout $z \in \Omega \cup \partial\Omega$, grâce au principe du maximum appliqué à h.

Mais alors ces deux inégalités inverses l'une de l'autre forcent $|h(z)|$ à être constant dans Ω, identiquement égal à $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

(c) On peut ré-appliquer le principe du maximum pour conclure directement.

Voici un autre argument qui effectue un détour. En dérivant l'identité $h(z)\overline{h}(\overline{z}) \equiv a^2$ par rapport à z, en utilisant l'annulation $\frac{\partial}{\partial z}(\overline{z}) = 0$, puisqu'une fonction antiholomorphe est indépendant de z, on obtient :

$$h'(z)\,\overline{h}(\overline{z}) \,\equiv\, 0.$$

Comme $\overline{h}$ n'est pas identiquement nulle dans Ω, cela force la fonction holomorphe $h(z)$ dans Ω à être identiquement nulle dans un sous-ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, et donc le principe d'unicité et la connexité de Ω donnent $h'(z) \equiv 0$, donc h est constante.

(d) C'est exactement la contraposée de ce que nous venons de démontrer !

(e) Si f est non constante, d'après la Question **(d)** qui précède, f admet au moins un zéro dans $\mathbb{D}$. Nous affirmons alors que f n'admet qu'un nombre *fini* de zéros dans $\mathbb{D}$.

Sinon, si f admettait un nombre infini de zéros dans $\mathbb{D}$, disons une suite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments $\alpha_n \in \mathbb{D}$ avec $0 = f(\alpha_n)$, alors quitte à extraire une sous-suite, on pourrait supposer que $\alpha_n \longrightarrow \alpha_\infty \in \overline{\mathbb{D}}$ possède une limite dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$.

Grâce au principe des zéros isolés, on ne pourrait pas avoir $\alpha_\infty \in \mathbb{D}$ (sinon, f serait identiquement nulle, ce qui n'est pas). Donc on aurait $\alpha_\infty \in \partial\mathbb{D}$.

Bien sûr, par continuité de f, il viendrait $f(\alpha_\infty) = 0$, puis $f\big|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0$, et donc on aurait $f \equiv 0$ dans $\overline{\mathbb{D}}$ à cause du principe du maximum, ce qui n'est pas.

Notons alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ avec $p \geqslant 1$ les zéros distincts de f, et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités. Rappelons que si α est un zéro d'une fonction holomorphe $h(z) \not\equiv 0$ définie au voisinage de α, alors on a une factorisation locale $h(z) = (z-\alpha)^m\, q(z)$ avec $m \geqslant 1$ entier et avec $q(z)$ holomorphe jamais nulle près de α.

En effectuant des factorisations locales de f en tous les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, on obtient la représentation demandée.

(f) Vérifions par le calcul que le module de $\phi_\alpha(e^{i\theta})$ vaut 1 pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\big|\phi_\alpha(e^{i\theta})\big| \,=\, \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\overline{\alpha}\,e^{i\theta}}\right| \,=\, \frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{\big|e^{i\theta}\,(e^{-i\theta}-\overline{\alpha})\big|} \,=\, \frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{|e^{-i\theta}-\overline{\alpha}|} \,=\, \frac{e^{i\theta}-\alpha}{\big|\overline{e^{i\theta}-\alpha}\big|} \,\equiv\, 1.$$

(g) Ce qui précède nous permet d'écrire :

$$h(z) \,=\, g(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \big(1-\overline{\alpha}_i\, z\big)^{m_i},$$

et donc h est holomorphe dans $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, pour $|z| = 1$, on a $\big|\phi_\alpha(z)\big| \equiv 1$, et donc $|h(z)| = |f(z)|$ sur $\partial\mathbb{D}$. Ainsi, h est de module constant non nul sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.

(h) D'après les Question **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, $h(z)$ est ou bien constante, ou bien admet un zéro dans $\mathbb{D}$. Mais puisque ni g ni aucun des $\big(1-\overline{\alpha}_i z\big)$ n'admet de zéro dans $\mathbb{D}$, car $\big|\frac{1}{\overline{\alpha}_i}\big|$ est de module > 1, cette fonction h n'a aucun zéro dans $\mathbb{D}$, donc est constante, et cette constante est non nulle. En notant $\frac{1}{\lambda} \equiv h(z)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on en déduit le résultat demandé sur f en inversant l'identité suivante :

$$\frac{1}{\lambda} \,\equiv\, g(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \big(1-\overline{\alpha}_i\, z\big)^{m_i} \,=\, f(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{(z-\alpha_i)^{m_i}} \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \big(1-\overline{\alpha}_i\, z\big)^{m_i}$$

(i) Grâce au travail qui précède, une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, et dont le module est constant sur le cercle unité est ou bien constante, ou bien nécessairement de

la forme :

$$f(z) \equiv \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \Big(\frac{z - \alpha_i}{1 - \overline{\alpha}_i z} \Big)^{m_i} \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

Mais comme $p \geqslant 1$, chaque dénominateur $\frac{1}{(1-\overline{\alpha}_i z)^{m_i}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ possède un *zéro* au point $\frac{1}{\overline{\alpha}_i}$. Certes, ces points $\frac{1}{\overline{\alpha}_i}$ sont situés *hors* de $\overline{\mathbb{D}}$, puisque $|\alpha_i| < 1$, mais ils appartiennent tout de même à $\mathbb{C}$.

Par conséquent, il est nécessaire que $p = 0$, à savoir que $f(z)$ n'incorpore aucun *facteur de Blaschke* $\big(\frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha}_i z}\big)^{m_i}$, et donc en conclusion, seules les fonctions constantes $f(z) \equiv \lambda$ répondent à la question posée.

Exercice 6. (a) Une proposition vue en cours donne directement :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{z - z_i} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}),$$

mais on peut retrouver cette identité en partant de la représentation scindée $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ dont on prend la *dérivée* dite *logarithmique*, qui s'écrit de manière formelle comme suit, sans se soucier de problèmes d'existence :

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} &= \big(\log P(z)\big)' = \frac{d}{dz}\Big[\log a_n + \log\big(z - z_1\big) + \cdots + \log\big(z - z_n\big)\Big] \\ &= 0 + \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}. \end{aligned}$$

Un calcul alternatif et rigoureusement rigoureux consisterait à prendre le temps d'écrire, grâce à la règle de Leibniz pour la différentiation d'un produit de fonctions :

$$P'(z) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_n \prod_{i' \neq i} \big(z - z_{i'}\big),$$

puis à quotienter pour obtenir la décomposition rationnelle en élément simples :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_n \prod_{i' \neq i} \big(z - z_{i'}\big)}{a_n \prod_{1 \leqslant i' \leqslant n} \big(z - z_{i'}\big)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{(z - z_i)}.$$

Ensuite, appliquons cette belle identité à $z := w_j$ égal à une racine de $P'(z)$, en supposant $w_j \neq z_1, \ldots, z_n$, et en utilisant le fait que le dieu *Zéro* (dont la mythologie grecque ignorait l'existence) est tellement au *Centre du Monde* — mathématique — qu'il est égal à son propre conjugué :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{P'(w_j)}{P(w_j)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{w_j - z_i} = 0 = \overline{0} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{\overline{w}_j - \overline{z}_i} \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{w_j - z_i}{|w_j - z_i|^2}. \end{aligned}$$

(b) En mettant $w_j \neq z_1, \ldots, z_n$ à gauche, cette identité se ré-écrit sous une forme :

$$w_j \Big(\tfrac{1}{|w_j - z_1|^2} + \cdots + \tfrac{1}{|w_j - z_n|^2} \Big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \tfrac{1}{|w_j - z_i|^2}\, z_i$$

telle qu'on peut ensuite diviser, et obtenir :

$$w_j \;=\; \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\frac{1}{|w_j-z_i|^2}}{\frac{1}{|w_j-z_1|^2}+\cdots+\frac{1}{|w_j-z_n|^2}}\; z_i \;=:\; \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i\, z^i,$$

ce qui fait apparaître des nombres $1 \leqslant \lambda_i \leqslant n$ dont la somme est visiblement égale à 1.

Enfin, il ne fallait pas oublier le cas laissé suspendu où w_j est égal à l'un des z_i, cas où toutes ces considérations s'effondrent. Mais quand $w_j = z_i$, il est évident et trivial que w_j appartient à l'enveloppe convexe de $\{z_1, \ldots, z_n\}$, puisque l'enveloppe convexe $\widehat{E} \supset E$ d'un ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$ contient toujours l'ensemble (exercice mental).

13. Examen 7

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}$, soient $n \geqslant 1$ points distincts $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et soit un cercle $C \subset \mathbb{C}$ dont le disque intérieur Δ contient tous ces z_i, pour $i = 1, \ldots, n$. Soit le polynôme :

$$p(z) := \big(z - z_1\big)\big(z - z_2\big) \cdots \big(z - z_n\big),$$

et soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Delta \cup C$.

(a) Montrer que :

$$P(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(w)}{p(w)} \frac{p(w) - p(z)}{w - z}\, dw,$$

satisfait $P(z_i) = f(z_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$.

(b) Montrer que $P(z) \in \mathbb{C}_{n-1}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant n - 1$.

(c) On fixe un rayon $\mathrm{R} > 0$. Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N}(\mathrm{R}) \gg 1$ assez grand pour que, quel que soit $n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{R})$, le polynôme :

$$P_n(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!},$$

n'ait aucun zéro dans le disque fermé $\big\{|z| \leqslant \mathrm{R}\big\}$.

(d) Soit Ω un ouvert connexe borné non vide dans $\mathbb{C}$, et soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\Omega \cup \partial\Omega\big)$ continue jusqu'au bord de l'ouvert, qui satisfait $|f(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Montrer que, ou bien f possède au moins un zéro $a \in \Omega$, ou bien f est constante.

(e) On suppose maintenant Ω simplement connexe, à bord $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui est un contour de Jordan, toujours avec $|f(\zeta)| = 1$ sur $\partial\Omega$. Ensuite, on suppose que f possède un unique pôle simple $a \in \Omega$. Montrer que toute valeur $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| > 1$ est prise par $f(z)$ avec $z \in \Omega$, une et une seule fois.

Exercice 2. Soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ avec $f(0) = 1$, qui est de *type exponentiel minimal*, au sens où :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, C_\varepsilon < \infty \qquad \text{tel que} \qquad \Big(\big|f(z)\big| \leqslant C_\varepsilon\, e^{\varepsilon\,|z|} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\Big).$$

Soient $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ les zéros de f, supposés en nombre infini (dénombrable), répétés avec multiplicités, ordonnés par modules $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ croissants.

On suppose de plus que :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|} < \infty.$$

(a) Montrer que le produit infni $\prod_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ converge absolument sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, vers une fonction holomorphe entière.

(b) Montrer que $z \longmapsto \prod_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ est de type exponentiel minimal. Indication: Utiliser $1 + x \leqslant e^x$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) L'objectif est maintenant d'établir que $f(z) \overset{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ s'identifie à ce produit infini, sans aucun facteur supplémentaire, toujours avec $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ de type exponentiel minimal, satisfaisant $f(0) = 1$, et ayant une infnité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big).$$

(d) Pour $r > 0$ fixé, on découpe :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{|a_n| \leqslant 2r} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \prod_{2r < |a_n|} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big).$$

Montrer, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r$, la majoration :

$$\left| \frac{f(z)}{\prod_{|a_n| \leqslant 2r} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)} \right| \,\leqslant\, C_\varepsilon \, e^{4\varepsilon r}.$$

Indication: Commencer à raisonner avec $|z| = 4\,r$.

(e) Montrer qu'il existe $r(\varepsilon) \gg 1$ assez grand afin que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r \geqslant r(\varepsilon)$, on ait :

$$\big|e^{g(z)}\big| \,\leqslant\, C_\varepsilon \, e^{5\varepsilon r}.$$

Indication: Utiliser l'inégalité $1 - x \geqslant e^{-2x}$, valable pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

(f) On note :

$$A_g(r) \,:=\, \max_{\theta \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} g\big(r\, e^{i\theta}\big),$$

et on développe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, z^n$ en série entière convergente de rayon infini. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$b_n \, r^n \,=\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\operatorname{Re} g\big(re^{i\theta}\big) - A_g(r)\Big) \, e^{-in\theta} \, d\theta.$$

(g) Établir que $g(z) \equiv 0$, puis conclure.

(h) Soit maintenant $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec $h(0) = 1$, satisfaisant, pour certaines constantes $0 \leqslant \mathrm{A}, \mathrm{B} < \infty$ convenables :

$$\big|h(z)\big| \,\leqslant\, \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|}.$$

On suppose $h(-z) = h(z)$ paire, de zéros *distincts non nuls* $\pm a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, et on suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < \infty$. Montrer que :

$$h(z) \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\Big) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

(i) Obtenir l'identité d'Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 3. Soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ non constante. On suppose que $f(0)$ est réel, avec :

$$0 \,<\, f(0) \,<\, 1.$$

Soit l'application $T\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par :

$$T(w) \,:=\, \frac{w - f(0)}{1 - f(0)\,w} \,=:\, \zeta.$$

(a) Montrer que $\big|T\big(f(z)\big)\big| < |z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) Calculer l'inverse $w = T^{-1}(\zeta)$, après avoir justifié que $T\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

(c) On prend $z \in \mathbb{D}$ de la forme $z = r\,e^{i\theta}$ de module $0 \leqslant r < 1$, et on note son image par la composée $T \circ f$:

$$T\big(f(z)\big) \,=:\, \rho\, e^{i\varphi},$$

de module $0 \leqslant \rho < 1$.

On considère le cercle $\big\{|\zeta| = \rho\big\}$, et on introduit :

$$c(\rho) \,:=\, f_0\, \frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1-f_0\rho)\,(1+f_0\,\rho)},$$

où on a abrégé $f_0 := f(0)$.

Vérifier que $0 < c(\rho) \leqslant f_0$, puis, montrer que :

$$T^{-1}\big(\rho\, e^{i\varphi}\big) - c(\rho) \,=\, \rho\, \frac{(1-f_0)\,(1+f_0)}{(1-f_0\,\rho)\,(1+f_0\,\rho)}\, \frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}}.$$

(d) Montrer que $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est un cercle, que l'on déterminera.

(e) Montrer que ce cercle a pour diamètre le segment $\big[T^{-1}(-\rho),\ T^{-1}(\rho)\big]$, et que :

$$-1 \,<\, T^{-1}(-\rho) \,\leqslant\, T^{-1}(\rho) \,<\, 1.$$

(f) Premier cas : on suppose que $0 \leqslant \rho \leqslant f_0$. Montrer que :

$$\frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(g) Deuxième cas : on suppose que $f_0 < \rho < 1$. Montrer que :

$$\big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(h) Toujours avec $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ et avec $\big|T\big(f(z)\big)\big| = \rho$, établir l'inégalité :

$$\frac{f_0 - |z|}{1 - f_0\,|z|} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{f_0 + |z|}{1 + f_0\,|z|}.$$

(i) Sans l'hypothèse $0 < f(0) < 1$, montrer que toute application holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ satisfait la paire d'inégalités :

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)| \cdot |z|} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)| \cdot |z|} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Exercice 4. L'objectif est de déterminer la valeur exacte de $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ et de $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$, avec des techniques d'Analyse Complexe.

(a) Montrer que $\infty = \int_0^\infty \left|\sin x^2\right| dx$. Indication: Effectuer le changement de variable $u := x^2$.

(b) Pour $\mathrm{R} > 0$ quelconque, on introduit la courbe fermée simple orientée dans le sens trigonométrique :

$$\Gamma_{\mathrm{R}} := \big[0, \mathrm{R}\big] \cup \mathrm{arc}\big(\mathrm{R},\ \mathrm{R}\,e^{i\pi/4}\big) \cup \big[\mathrm{R}e^{i\pi/4},\ 0\big] =: \Gamma_{\mathrm{R},1} \cup \Gamma_{\mathrm{R},2} \cup \Gamma_{\mathrm{R},3}.$$

Dessiner Γ_{R}, en indiquant l'orientation des 3 morceaux de son bord, ainsi que son intérieur $\Gamma_{\mathrm{R},\mathrm{int}}$.

(c) Que vaut $\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} e^{-z^2}\,dz$?

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \mathrm{R} \int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \sin t}\,dt.$$

Indication: Utiliser la minoration $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\,t$, valable pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(e) En admettant la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, établir que :

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. **(a)** Remplaçons $z := z_i$, utilisons $p(z_i) = 0$:

$$\begin{aligned} P(z_i) &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,\frac{p(w)}{w-z_i}\,dw - \underline{p(z_i)}_{\circ}\,\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,\frac{1}{w-z_i}\,dw \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{w-z_i}\,dw - 0 \\ &= f(z_i), \end{aligned}$$

et réalisons que la formule de Cauchy sur un cercle s'applique directement.

(b) Écrivons après développement :

$$\begin{aligned} p(z) &= \big(z-z_1\big)\,\big(z-z_2\big)\,\cdots\,\big(z-z_n\big) \\ &=: z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_1\,z + a_0, \end{aligned}$$

avec certains coefficients a_k, dont l'expression en fonction de $z_1, \ldots, z_n$ ne sera pas utile, puis, au moyen de la formule classique :

$$A^{\mathrm{N}} - B^{\mathrm{N}} = \big(A-B\big)\,\Big(A^{\mathrm{N}-1} + A^{\mathrm{N}-2}\,B + \cdots + A\,B^{\mathrm{N}-2} + B^{\mathrm{N}-1}\Big),$$

éliminons le dénominateur dans le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{p(w)-p(z)}{w-z} &= \frac{w^n - z^n}{w-z} + a_{n-1}\,\frac{w^{n-1}-z^{n-1}}{w-z} + \cdots + a_2\,\frac{w^2-z^2}{w-z} + a_1\,\frac{w-z}{w-z} + a_0\,(1-1) \\ &= \big(w^{n-1} + \cdots + z^{n-1}\big) + a_{n-1}\,\big(w^{n-2} + \cdots + z^{n-2}\big) + \cdots + a_2\,\big(w+z\big) + a_1 + 0 \\ &=: z^{n-1} + A_{n-2}(w)\,z^{n-2} + \cdots + A_1(w)\,z^1 + A_0(w), \end{aligned}$$

et observons qu'il s'agit d'un polynôme en z de degré $n-1$, à coefficients $A_{n-2}(w), \ldots, A_1(w), A_0(w)$ qui sont eux-mêmes des polynômes en w, donc sont holomorphes dans $\mathbb{C} \supset \Omega$.

Par linéarité de l'intégrale, l'expression considérée :

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,\Big\{z^{n-1} + A_{n-2}\,z^{n-2} + \cdots + A_1(w)\,z^1 + A_0(w)\Big\}\,dw \\ &= z^{n-1}\,\frac{1}{2i\pi}\bigg(\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,dw\bigg) + \sum_{n-2\geqslant k\geqslant 0} z^k\,\frac{1}{2i\pi}\bigg(\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,A_k(w)\,dw\bigg), \end{aligned}$$

est effectivement un polynôme de degré $n-1$ en z.

(c) Comme nous savons que la fonction e^z n'a *aucun* zéro sur $\mathbb{C}$, l'idée est d'appliquer le Théorème de Rouché aux deux fonctions $P_n(z)$ et e^z.

Sur le cercle $C_{\mathrm{R}} = \big\{|z| = \mathrm{R}\big\}$, peut-on avoir :

$$\big|e^z - P_n(z)\big| \overset{?}{<} \big|e^z\big| \qquad (\forall\,|z| = \mathrm{R}),$$

de manière à conclure que $P_n(z)$ a autant de zéros — c'est-à-dire zéro ! aucun ! — que e^z sur $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$? Oui, comme suit.

Premièrement, comme $-\mathrm{R} \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \mathrm{R}$ sur le cercle C_{R}, nous avons la *minoration :*

$$e^{-\mathrm{R}} \leqslant e^{\mathrm{Re}\, z} = \big|e^z\big|.$$

Deuxièmement, comme la série entière de e^z converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$, notamment sur $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, il est clair que l'on peut choisir un entier $\mathrm{N}(\mathrm{R}) \gg 1$ assez grand pour avoir, quel que soit $n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{R})$, la *majoration* valable pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$:

$$\begin{aligned}\Big|e^z - P_n(z)\Big| &= \Big|\sum_{k \geqslant n+1} \frac{z^k}{k!}\Big| \\ &\leqslant \sum_{k \geqslant n+1} \frac{\mathrm{R}^k}{k!} \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\, e^{-\mathrm{R}}.\end{aligned}$$

Avec un tel choix de $\mathrm{N}(\mathrm{R})$, l'inégalité *stricte* $\overset{?}{<}$ de Rouché est bien satisfaite, ce qui donne la conclusion demandée.

(d) Si $f(z)$ n'a aucun zéro dans Ω, alors la fonction $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ est aussi holomorphe sans zéros dans Ω, elle est aussi continue dans $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$, et elle satisfait aussi $|g(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$.

Grâce au principe du maximum appliqué aux deux fonctions f et g, nous obtenons :

$$|f(z)| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \Big|\tfrac{1}{f}(z)\Big| \leqslant 1 \qquad (\forall\, z \in \overline{\Omega}),$$

ce qui force $|f(z)| = 1$ partout dans $\overline{\Omega}$, donc $|f|$ atteint son maximum en un point de l'ouvert connexe Ω, donc f est constante à cause du principe du maximum.

(e) Avec $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$ fixé, la fonction $f(z) - w$ a aussi un unique pôle simple $a \in \Omega$. Une formule du cours nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\, d\zeta &= \#\,\text{zéros de } f(z) - w \text{ dans } \Omega \\ &\quad - \#\,\text{pôles de } f(z) - w \text{ dans } \Omega.\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec un paramètre réel $0 \leqslant t \leqslant 1$, comme $|f(\zeta)| = 1 < |w|$, l'intégrale :

$$I_{f,w}(t) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{t\, f'(\zeta)}{t\, f(\zeta) - w}\, d\zeta \in \mathbb{Z},$$

est continue par rapport à $t \in [0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui est discret, donc constamment égale à sa valeur, 0, en $t = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}0 = I_{f,w}(0) &= I_{f,w}(1) \\ &= \text{zéros de } f(z) - w \text{ dans } \Omega - 1,\end{aligned}$$

c'est-à-dire la conclusion :

$$1 = \text{zéros de } f(z) - w \text{ dans } \Omega.$$

Exercice 2. (a) Ce produit infini de fonctions holomorphes est de la forme vue en cours $\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + F_n(z)\big)$, avec $F_n(z) := -\frac{z}{a_n}$. A-t-on convergence absolue de $\sum |F_n(z)|$ sur les compacts $K \subset \mathbb{C}$?

Oui, très certainement, car avec $z \in K$, d'où $|z| \leqslant r$ pour $r \gg 1$ assez grand, on peut majorer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| - \frac{z}{a_n} \Big| \,=\, |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \,\leqslant\, r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \,<\, \infty.$$

Un thèorème du cours garantit alors que $z \longmapsto \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ est une fonction holomorphe entière.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et soit $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ un entier assez grand pour que :

$$\sum_{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} \frac{1}{|a_n|} \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors avec un certain polynôme $Q_\varepsilon(z)$, et avec $x := \big|\frac{z}{a_n}\big|$, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned}
\Big| \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \Big| \,&=\, \Big| \prod_{n=1}^{\mathrm{N}(\varepsilon)-1} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \Big| \cdot \Big| \prod_{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \Big| \\
&=:\, \big|Q_\varepsilon(z)\big| \cdot \prod_{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} \Big|1 - \frac{z}{a_n}\Big| \\
&\leqslant\, \big|Q_\varepsilon(z)\big| \cdot \prod_{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} \Big|1 + \frac{z}{a_n}\Big| \\
[1 + x \leqslant e^x] \qquad &\leqslant\, \big|Q_\varepsilon(z)\big| \cdot \prod_{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} e^{\left|\frac{z}{a_n}\right|} \\
&=\, \big|Q_\varepsilon(z)\big| \cdot \exp\Big\{ \sum_{n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} \frac{1}{|a_n|} \Big\} \\
&\leqslant\, C_\varepsilon \, e^{\frac{\varepsilon}{2}|z|} \, e^{\frac{\varepsilon}{2}|z|},
\end{aligned}$$

car l'exponentielle l'emporte, en croisssance, sur tout polynôme.

(c) Le quotient méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)} \,=:\, f_1(z) \,\in\, \mathscr{M}(\mathbb{C}),$$

n'a que des singularités illusoires aux points $z = a_n$, puisque $f(z)$ y a aussi les mêmes zéros, donc en fait $f_1(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est *holomorphe* dans $\mathbb{C}$ tout entier, et ne s'annule jamais.

Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème vu en cours fournit une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que $f_1(z) = e^{g(z)}$, d'où effectivement :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big).$$

(d) Afin de majorer $\frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a_n}\right|}$, il s'agit de *minorer* $\big|1 - \frac{z}{a_n}\big|$. En supposant comme cela a été indiqué $|z| = 4\,r$ sur le cercle de rayon $4\,r$ — et non pas r —, il vient :

$$\Big|1 - \frac{z}{a_n}\Big| \,\geqslant\, \Big|\frac{z}{a_n}\Big| - 1 \,\geqslant\, \frac{4\,r}{2\,r} - 1 \,=\, 1,$$

et donc, toujours pour $|z| = 4\,r$:

$$\begin{aligned}\frac{|f(z)|}{\Big|\prod_{|a_n|\leqslant 2r}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)\Big|} &\leqslant \frac{|f(z)|}{1}\\ &\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}.\end{aligned}$$

Ensuite, comme la fonction considérée :

$$z \;\longmapsto\; \frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\leqslant 2r}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)},$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle n'a que des singularités illusoires aux points a_n avec $|a_n| \leqslant 2r$, le principe du maximum implique que cette inégalité est vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 4\,r$, et donc pour tout z avec $|z| = r$, comme cela était demandé.

(e) Grâce à la Question **(d)**, nous avons obtenu :

$$\big|e^{g(z)}\big| \cdot \Big|\prod_{2r<|a_n|}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)\Big| \;\leqslant\; C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}.$$

Il s'agit, maintenant encore, de minorer ce deuxième produit (infini).

Puisque par hypothèse on a $\sum \frac{1}{|a_n|} < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ comme précédemment, il existe $r(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{2r(\varepsilon)<|a_n|} \frac{1}{|a_n|} \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $r \geqslant r(\varepsilon)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r$, en appliquant la minoration indiquée $1-x \geqslant e^{-2x}$ aux nombres réels $x := \big|\frac{z}{a_n}\big|$ qui vérifient bien $\big|\frac{z}{a_n}\big| = \frac{r}{|a_n|} < \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire en appliquant la minoration :

$$1-\big|\tfrac{z}{a_n}\big| \;\geqslant\; e^{-2\,\big|\frac{z}{a_n}\big|},$$

il vient après inversion :

$$\frac{1}{1-\Big|\frac{z}{a_n}\Big|} \;\leqslant\; e^{2\,\big|\frac{z}{a_n}\big|},$$

ce qui nous permet d'atteindre la majoration demandée :

$$\begin{aligned}\big|e^{g(z)}\big| &\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}\, \frac{1}{\prod_{2r<|a_n|}\Big|1-\big|\frac{z}{a_n}\big|\Big|}\\ &\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r} \prod_{2r<|a_n|} e^{2\big|\frac{z}{a_n}\big|}\\ &= C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}\, \mathsf{exp}\Big\{2\Big(\sum_{2r<|a_n|}\frac{1}{|a_n|}\Big)\,|z|\Big\}\\ &\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}\, e^{2\,\frac{\varepsilon}{2}\,r}\\ &= C_\varepsilon\, e^{5\varepsilon r}.\end{aligned}$$

(f) Comme la série entière $\sum b_n\, z^n$ converge uniformément sur n'importe quel compact $K \subset \mathbb{C}$, sommation et intégration sont interchangeables. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(g\big(r\, e^{i\theta}\big) + \overline{g\big(r\, e^{i\theta}\big)}\Big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_k\, r^k\, e^{i(k-n)\theta}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_k\, r^k\, e^{-i(k+n)\theta}\, d\theta\right) \\
[\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta}\, d\theta = 0 \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z}^*] \qquad &=\; b_n\, r^n.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\int_0^{2\pi} \text{constante}\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0$, nous pouvons insérer un terme supplémentaire et obtenir effectivement :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\mathsf{Re}\, g\big(re^{i\theta}\big) - A_g(r)\Big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \;=\; b_n\, r^n.$$

(g) Tout d'abord, d'après la Question **(a)**, pour tout $|z| = r \geqslant r(\varepsilon)$, nous avons :

$$\mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big) \;\leqslant\; \log C_\varepsilon + 5\varepsilon\, r.$$

Ensuite, puisque :

$$A_g(r) \;=\; \max_{|z|=r} \mathsf{Re}\, g(z),$$

nous connaissons la valeur absolue de :

$$\Big|\mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big) - A_g(r)\Big| \;=\; A_g(r) - \mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big) \qquad (\forall\, \theta \in \mathbb{R}),$$

et donc en appliquant l'inégalité triangulaire intégrale depuis l'identité obtenue à la Question **(f)**, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned}
|b_n|\, r^n \;&\leqslant\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(A_g(r) - \mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big)\Big)\, d\theta \\
&=\; 2\, A_g(r) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\geqslant 1} b_k\, r^r\, e^{ik\theta} + \sum_{k\geqslant 1} \overline{b_k}\, r^k\, e^{-ik\theta}\right) d\theta \\
&=\; 2\, A_g(r) \\
&\leqslant\; 2 \log C_\varepsilon + 10\, \varepsilon\, r.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $n \geqslant 2$, l'inégalité :

$$|b_n| \;\leqslant\; \frac{2 \log C_\varepsilon + 10\, \varepsilon\, r}{r^n} \;\xrightarrow{r\to\infty}\; 0,$$

force l'annulation $b_n = 0$. Ainsi, $g(z) = b_1\, z$ est un polynôme de degré 1, mais à nouveau :

$$|b_1| \;\leqslant\; \frac{2 \log C_\varepsilon}{r} + 10\, \varepsilon \;\xrightarrow{r\to\infty}\; 10\, \varepsilon,$$

force $b_1 = 0$ car $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit.

En conclusion, $g(z) \equiv 0$, et nous avons bien démontré que :

$$f(z) \;=\; e^0 \prod_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big),$$

est un produit simple sans facteur exponentiel.

(h) Soit le développement en série entière $h(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, z^k$. L'hypothèse $h(-z) \equiv h(z)$ force l'annulation $c_{2\ell+1} = 0$ des coefficients d'indices impairs. Donc nous avons $h(z) = h_1(z^2)$ avec :

$$h_1(z) \,:=\, 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{2\ell}\, z^{2\ell}.$$

Les zéros de $h_1(z)$ sont les a_n^2. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \big|h_1(z)\big| &\leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|^{1/2}} \\ &\leqslant C_\varepsilon\, e^{\varepsilon|z|}. \end{aligned}$$

La Question **(g)** précédente s'applique :

$$h_1(z) \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n^2}\Big),$$

d'où la conclusion :

$$h(z) \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\Big).$$

(i) La fonction $h(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} = h_1(z^2)$ est paire, a pour valeur $h(0) = 1$ (singularité illusoire) à l'origine, est holomorphe entière, a pour zéros $\big\{\pm n\colon\ n \in \mathbb{N}^*\big\}$, et satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} |h(z)| &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\pi zt}}{i\pi z}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} e^{i\pi zt}\, dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\pi|z|}\, dt \\ &= e^{\pi|z|}, \end{aligned}$$

exponentielle d'ordre 1, donc la Question **(h)** s'applique, et nous offre une démonstration alternative (par rapport à celle du cours) de la magnifique formule d'Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 3. (a) Comme il est visible que $T \circ f(0) = T\big(f(0)\big) = 0$, et comme $T \circ f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe, le Lemme de Schwarz s'applique, et donne $\big|T \circ f(z)\big| \leqslant |z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) D'après le cours, un biholomorphisme général $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est de la forme :

$$w \;\longmapsto\; e^{i\theta}\, \frac{\alpha - w}{1 - \overline{\alpha}\, w},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{D}$ sont des constantes quelconques. Ici, avec $\theta := \pi$ et $\alpha := f(0) = \overline{\alpha}$, on retrouve bien $T(w)$.

Ensuite, pour trouver l'expression de l'inverse $T^{-1}(\bullet)$, résolvons w en partant de :

$$\begin{aligned}
\frac{w - f(0)}{1 - f(0)\,w} \;=\; \zeta \qquad & \Longleftrightarrow \qquad w - f(0) \;=\; \zeta - f(0)\,w\,\zeta \\
& \Longleftrightarrow \qquad -\zeta - f(0) \;=\; -w\,\big(1 + f(0)\,\zeta\big) \\
& \Longleftrightarrow \qquad \frac{\zeta + f(0)}{1 + f(0)\,\zeta} \;=\; w,
\end{aligned}$$

donc nous trouvons :

$$T^{-1}(\zeta) \;=\; \frac{\zeta + f(0)}{1 + f(0)\,\zeta}.$$

(c) Il est visible que $0 < c(\rho)$, car $0 \leqslant \rho < 1$ et $0 < f_0 < 1$.

Ensuite, comme $0 < f_0 < 1$, pour tout $0 \leqslant \rho < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\rho^2 \;\geqslant\; f_0^2\,\rho^2 \qquad & \Longrightarrow \qquad 1 - \rho^2 \;\leqslant\; 1 - f_0^2\,\rho^2 \\
& \Longrightarrow \qquad (1-\rho)\,(1+\rho) \;\leqslant\; \big(1 - f_0\,\rho\big)\,\big(1 + f_0\,\rho\big) \\
& \Longrightarrow \qquad \frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)} \;\leqslant\; 1 \\
& \Longrightarrow \qquad f_0\,\frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)} \;\leqslant\; f_0 \;<\; 1.
\end{aligned}$$

Après avoir vérifié cela, calculons :

$$\begin{aligned}
T^{-1}\big(\rho\,e^{i\varphi}\big) - c(\rho) \;&=\; \frac{\rho\,e^{i\varphi} + f_0}{1 + f_0\,\rho\,e^{i\varphi}} - f_0\,\frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)} \\
&=\; \frac{\big(\rho\,e^{i\varphi} + f_0\big)\,\big(1 - f_0^2\,\rho^2\big) - f_0\,\big(1 - \rho^2\big)\,\big(1 + f_0\,\rho\,e^{i\varphi}\big)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)\,(1 + f_0\rho e^{i\varphi})} \\
&=\; \frac{\rho\,e^{i\varphi} - \underline{f_0^2\,\rho^3\,e^{i\varphi}}_{\circ\circ} + \underline{f_0}_{\circ} - f_0^3\,\rho^2 - \underline{f_0}_{\circ} - f_0^2\,\rho\,e^{i\varphi} + f_0\rho^2 + \underline{f_0\,\rho^3\,e^{i\varphi}}_{\circ\circ}}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)\,(1 + f_0\rho e^{i\varphi})} \\
&=\; \frac{\rho\,\big[e^{i\varphi} - f_0^3\,\rho - f_0^2\,e^{i\varphi} + f_0\,\rho\big]}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)\,(1 + f_0\rho e^{i\varphi})} \\
&=\; \rho\,\frac{(1 - f_0^2)}{(1 - f_0^2\rho^2)}\;\frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\rho e^{i\varphi}} \qquad\qquad \text{OUI.}
\end{aligned}$$

(d) Grâce aux calculs qui précèdent, nous allons constater que l'image inverse $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est le cercle, contenu dans $\{|w| < 1\}$, de centre $c(\rho)$, et de rayon $\rho\,\frac{1-f_0^2}{1-f_0^2\rho^2}$.

En effet, nous savons que pour $\alpha \in \mathbb{D}$ fixé, le quotient $\frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \overline{\alpha}\,e^{i\theta}}$ est constamment de module 1 pour $e^{i\theta}$ sur le cercle unité, et ici, de manière similaire, nous constatons que :

$$\left|\frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\,e^{i\varphi}}\right| \;=\; \left|e^{i\varphi}\,\frac{1 + f_0\,\rho\,e^{-i\varphi}}{1 + f_0\,\rho\,e^{i\varphi}}\right| \;=\; 1 \cdot \frac{|\overline{\beta}|}{|\beta|} \;=\; 1,$$

avec $\beta \neq 0$, puisque $\big|f_0\,\rho\,e^{i\varphi}\big| = f_0\,\rho < 1$.

De plus, l'application :

$$e^{i\varphi} \;\longmapsto\; \frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\,e^{i\varphi}},$$

est *bijective* du cercle unité sur lui-même, comme c'est le cas de $e^{i\theta} \longmapsto \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1-\overline{\alpha}\, e^{i\theta}}$.

Par conséquent, quel que soit $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \Big| T^{-1}\big(\rho\, e^{i\varphi}\big) - c(\rho) \Big| &= \rho\, \frac{1-f_0^2}{1-f_0^2\,\rho^2} \left| \frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1+f_0\,\rho\, e^{i\varphi}} \right| \\ &= \rho\, \frac{1-f_0^2}{1-f_0^2\,\rho^2}\, 1, \end{aligned}$$

donc $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est le cercle :

$$\Big\{ w \in \mathbb{C} \colon \ \Big| w - f_0 \tfrac{1-\rho^2}{1-f_0^2\rho^2} \Big| = \rho\, \tfrac{1-f_0^2}{1-f_0^2\rho^2} \Big\}.$$

(e) Vérifions l'inégalité centrale 2 :

$$\frac{-\rho + f_0}{1 - f_0\,\rho} \overset{?}{\leqslant} \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho},$$

c'est-à-dire :

$$-\rho + \underline{f_0}_{\circ} - \underline{\rho^2\, f_0}_{\circ\circ} + \rho\, f_0^2 \overset{?}{\leqslant} \rho + \underline{f_0}_{\circ} - \underline{\rho^2\, f_0}_{\circ\circ} - \rho\, f_0^2,$$

qui équivaut à l'inégalité effectivement satisfaite :

$$2\,\rho\, f_0^2 \overset{\text{OUI}}{\leqslant} 2\,\rho.$$

Les deux inégalités 1 et 3 se vérifient de manière similaire.

(f) Nous venons de comprendre que $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est le cercle de centre $c(\rho)$ et de diamètre $\big[T^{-1}(-\rho),\ T^{-1}(\rho)\big] \subset \mathbb{R}_+$, contenu dans l'axe réel positif.

Par construction, le point $f(z)$ appartient à ce cercle, puisque $T\big(f(z)\big)$ appartient au cercle $\big\{|\zeta| = \rho\big\}$.

Or une figure élémentaire montre que ce cercle est forcément contenu dans l'anneau centré en 0 dont le cercle-bord intérieur intersecte $\mathbb{R}_+$ en le point $T^{-1}(-\rho)$, et dont le cercle-bord extérieur intersecte $\mathbb{R}_+$ en le point $T^{-1}(\rho)$. Par conséquent :

$$T^{-1}(-\rho) \leqslant \big| f(z) \big| \leqslant T^{-1}(\rho),$$

ce qui est exactement l'inégalité demandée.

(g) Cette fois-ci :

$$T^{-1}(-\rho) = -\frac{\rho - f_0}{1 - f_0\,\rho} < 0,$$

est négatif, tandis que $T^{-1}(\rho)$ reste toujours positif. En valeur absolue, a-t-on :

$$\big| T^{-1}(\rho) \big| \overset{?}{\leqslant} T^{-1}(\rho),$$

c'est-à-dire, est-il vrai que :

$$\frac{\rho - f_0}{1 - f_0\,\rho} \overset{?}{\leqslant} \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho},$$

i.e. :

$$\begin{aligned}
\underline{\rho}_{\circ} - f_0 + f_0\,\rho^2 - \underline{f_0^2\,\rho}_{\circ\circ} &\overset{?}{\leqslant} \underline{\rho}_{\circ} + f_0 - f_0\,\rho^2 - \underline{f_0^2\,\rho}_{\circ\circ} \\
0 &\overset{?}{\leqslant} 2\,f_0 - 2\,f_0\,\rho^2 \\
0 &\underset{\text{OUI}}{\leqslant} 2\,f_0\,\big(1-\rho^2\big).
\end{aligned}$$

Une figure élémentaire montre alors que $f(z)$ est situé sur le cercle centré en $c(\rho)$ et de rayon $\rho\,\frac{1-f_0^2}{1-f_0^2\rho^2}$, lui-même contenu dans le disque $\big\{|w| \leqslant T^{-1}(\rho)\big\}$, ce qui donne l'inégalité demandée :

$$\big|f(z)\big| \leqslant T^{-1}(\rho) = \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(h) Commençons par observer que dans les deux cas qui précèdent, nous avons obtenu la paire d'inégalités :

$$\frac{f_0 - \rho}{1 + f_0\,\rho} \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \frac{f_0 + \rho}{1 + f_0\,\rho},$$

puisque, dans le Cas 2, le membre de gauche est $\leqslant 0$, de toute façon.

Ensuite, observons que les deux fonctions :

$$\begin{aligned}
[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
\rho &\longmapsto \frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho},
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
\rho &\longmapsto \frac{f_0 + \rho}{1 + f_0\,\rho},
\end{aligned}$$

sont, respectivement, décroissante et croissante, parce que leurs dérivées valent :

$$\frac{-1 + f_0^2}{(1 - f_0\,\rho)^2} < 0, \qquad\qquad \frac{1 - f_0^2}{(1 + f_0\,\rho)^2} > 0.$$

Et comme nous avons vu grâce au Lemme de Schwarz que :

$$\rho = \big|T\big(f(z)\big)\big| \leqslant |z|,$$

nous obtenons bien l'inégalité demandée :

$$\frac{f_0 - |z|}{1 - f_0\,|z|} \leqslant \frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho} \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \frac{f_0 + \rho}{1 + f_0\,\rho} \leqslant \frac{f_0 + |z|}{1 + f_0\,|z|}.$$

(i) Si $f(0) = 0$, cela est le lemme de Schwarz :

$$-|z| \overset{\text{Trivial}}{\leqslant} \big|f(z)\big| \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} |z|.$$

Supposons donc que $f(0) \neq 0$. En remplaçant $f(z)$ par $e^{i\psi}\,f(z) =: f_1(z)$ avec l'argument ψ opposé à celui de $f(0)$ de manière à garantir que $f_1(0)$ est réel avec $0 < f_1(0) < 1$, nous pouvons appliquer à $f_1(z)$ les inégalités obtenues à l'instant dans la Question **(h)** :

$$\frac{f_1(0) - |z|}{1 - f_1(0)\,|z|} \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \frac{f_1(0) + |z|}{1 + f_1(0)\,|z|},$$

et constater que cela *est* la paire demandée d'inégalités, puisque $f_1(0) = |f(0)|$.

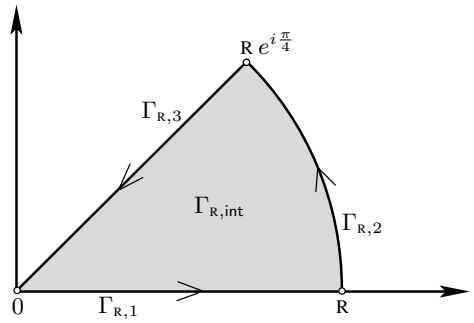
Exercice 4. **(a)** Pour $x \in \,]0,\infty[$, en effectuant le changement de variable indiqué $x =: \sqrt{u}$, d'où $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, et en découpant de manière appropriée l'intervalle $]0,\infty[$, nous pouvons calculer et minorer l'intégrale en question par une quantité divergente :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \big|\sin x^2\big|\,dx &= \int_0^\infty \big|\sin u\big|\,\frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big|\sin u\big|\,\frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&\geqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big|\sin u\big|\,du}_{\int_0^\pi \sin u\,du\,=\,2} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto \big|\sin x^2\big|$ n'est *pas* Lebesgue-intégrable sur $]0,\infty[$.

Nous allons néanmoins démontrer que l'intégrale sans valeur absolue $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ existe au sens des intégrales généralisées de Cauchy ou de Riemann, à savoir que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R \sin x^2\,dx$ existe.

(b) Voici une représentation graphique complète et soignée :



(c) La fonction exponentielle étant holomorphe dans $\mathbb{C}$, il est clair que $z \longmapsto e^{-z^2}$ est holomorphe entière, définie dans $\mathbb{C}$ tout entier. Comme $\mathbb{C}$ est convexe, l'un des tous premiers théorèmes de Cauchy nous donne immédiatement :

$$0 = \int_{\Gamma_R} e^{-z^2}\,dz.$$

(d) Grâce à la majoration suggérée :

$$-\sin t \leqslant -\tfrac{2}{\pi}\,t \qquad (t \in [0,\pi/2]),$$

nous pouvons estimer et conclure :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \ \mathrm{R}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \sin t}\, dt \ &\leqslant \ \mathrm{R}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi} t}\, dt \\
&= \ \mathrm{R}\left[\frac{e^{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi} t}}{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi}}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \ -\frac{\pi}{2\,\mathrm{R}}\left[e^{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi} t}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \ -\frac{\pi}{2\,\mathrm{R}}\left(e^{-\mathrm{R}^2} - 1\right) \ \xrightarrow{\mathrm{R}\to\infty} \ 0.
\end{aligned}$$

(e) Ainsi :

$$0 \ = \int_{\Gamma_{\mathrm{R},1}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},3}} e^{-z^2}\, dz.$$

Admettons donc, pour la première intégrale, que :

$$\int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\, dx \ \xrightarrow{\mathrm{R}\to\infty} \ \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ensuite, regardons la deuxième intégrale, en paramétrant l'arc de cercle $z = \mathrm{R}\, e^{it}$ avec $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} e^{-z^2}\, dz \ &= \ \int_0^{\pi/4} e^{-(\mathrm{R}\, e^{it})^2}\ i\,\mathrm{R}\, e^{it}\, dt \\
&= \ i\,\mathrm{R}\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 e^{2it}}\ e^{it}\, dt \\
&= \ i\,\mathrm{R}\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 \cos 2t} \cdot e^{i\,(t - \mathrm{R}^2 \sin 2t)}\, dt,
\end{aligned}$$

et majorons :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} e^{-z^2}\, dz\right| \ &\leqslant \ \mathrm{R}\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 \cos 2t} \cdot 1\, dt \\
[u := 2\,t] \qquad &= \ \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \cos u}\, du \\
[v := \pi/2 - u] \qquad &= \ \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \sin v}\, dv \\
[\text{Question } \mathbf{(d)}] \qquad &\xrightarrow{\mathrm{R}\to\infty} \ 0.
\end{aligned}$$

Enfin, sur le dernier segment orienté négativement et paramétré par $z = e^{i\pi/4}\, t$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\mathrm{R},3}} e^{-z^2}\, dz &= -\int_0^{\mathrm{R}} e^{-(t\, e^{i\pi/4})^2}\; e^{i\pi/4}\, dt \\
&= -\int_0^{\mathrm{R}} e^{-t^2\, e^{i\pi/2}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\mathrm{R}} e^{-it^2} \left(1+i\right) dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\mathrm{R}} \left(\cos t^2 - i \sin t^2\right) dt - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{\mathrm{R}} \left(\cos t^2 - i \sin t^2\right) dt.
\end{aligned}$$

En revenant à l'identité $0 = \int_{\Gamma_{\mathrm{R},1}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},3}}$ donnée par le théorème des résidus, et en faisant $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, nous obtenons :

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \left(\cos t^2 - i \sin t^2\right) dt - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \left(\cos t^2 - i \sin t^2\right) dt,$$

puis en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \left(\cos t^2 + \sin t^2\right) dt, \\
0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \left(\sin t^2 - \cos t^2\right) dt,
\end{aligned}$$

ce qui conclut :

$$\int_0^{\infty} \cos t^2\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \int_0^{\infty} \sin t^2\, dt.$$

15. Examen 8

Exercice 1. On définit la branche (non principale) de la fonction logarithme par :

$$\log r\, e^{i\theta} \,=\, \log r + i\,\theta,$$

lorsque $r > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Pour $0 < r < 1 < R$, soient γ_r et γ_R les deux demi-cercles fermés de rayons r et R contenus dans le demi-plan supérieur fermé $\big\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\big\}$, et orientés dans le sens trigonométrique positif.

(a) Élaborer une figure complète et soignée incorporant les éléments suivants :

- $-R$, -1, $-r$, 0, r, 1, R, ainsi que les quatre courbes orientées $[-R, -r]$, γ_r, $[r, R]$, γ_R ;
- i ;
- l'axe de coupure $\big\{i\,y\colon y \in \mathbb{R}_-\big\}$.

(b) Montrer que :

$$\int_r^R \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{(\log|x| + i\pi)^2}{x^2+1}\,dx - \int_{\gamma_r} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz \,=\, -\,\frac{\pi^3}{4}.$$

(c) Montrer que :

$$0 \,=\, \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx.$$

(d) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz.$$

(e) Établir la formule :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx \,=\, \frac{\pi^3}{8}.$$

Exercice 2. On pose $E_0(z) := 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on pose :

$$E_p(z) \,:=\, (1-z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}},$$

et on abrège :

$$L_p(z) \,:=\, z + \tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{z^p}{p}.$$

(a) Montrer que :

$$-\,E_p'(z) \,=\, z^p\, e^{L_p(z)} \,=\, \sum_{k\geqslant p} a_k\, z^k,$$

avec des coefficients $a_k \geqslant 0$ tous positifs.

(b) Montrer que :

$$\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \,=\, \sum_{k=0}^\infty b_k\, z^k,$$

définit une fonction holomorphe entière, *i.e.* un élément de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec des coefficients $b_k \geqslant 0$ tous positifs.

(c) Montrer que :

$$|z| \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leqslant 1.$$

(d) Soit une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, de points $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ pas nécessairement distincts entre eux, avec $|z_n| \longrightarrow \infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. On abrège :

$$r_n := |z_n| > 0.$$

Montrer que, pour tout rayon $r \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \infty.$$

(e) On suppose dorénavant donnée une suite $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'entiers $p_n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $r \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty.$$

Montrer que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\Big(\frac{z}{z_n}\Big),$$

converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}$, et définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.

(f) Maintenant, on suppose que les $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sont *mutuellement distincts :*

$$z_{n_1} \neq z_{n_2} \qquad \text{pour} \qquad n_1 \neq n_2.$$

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfaisant :

- $\big\{w \in \mathbb{C}\colon\ g(w) = 0\big\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$;
- $0 \neq g'(z_m)$ pour tout $m \geqslant 1$.

(g) On pose :

$$f_n(z) := \frac{g(z)}{(z-z_n)\,g'(z)},$$
$$M_n := \max_{|z| \leqslant \frac{1}{2}|z_n|} \big|f_n(z)\big|.$$

Établir l'existence de constantes appropriées $c_n \in \mathbb{C}$ telles que :

$$h(z) := \sum_{n=1}^{\infty} w_n\, f_n(z)\, e^{c_n(z-z_n)},$$

constitue une fonction holomorphe entière $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ résolvant le *problème d'interpolation :*

$$h(z_m) = w_m \qquad (\forall\, m \geqslant 1).$$

Exercice 3. Dans un plan $\mathbb{C} \ni w$, soit la bande B, et dans un plan $\mathbb{C} \ni s$, soit le demi-plan droit, définis par :

$$B := \big\{w \in \mathbb{C}\colon \ -1 < \mathsf{Re}\, w < 1\big\},$$
$$H := \big\{s \in \mathbb{C}\colon \ \mathsf{Re}\, s > 0\big\}.$$

(a) Montrer que l'application :

$$s := \varphi(w) := e^{i\frac{\pi}{2}w},$$

constitue un biholomorphisme $B \xrightarrow{\sim} H$.

(b) Soit un disque unité :

$$\Delta := \big\{\zeta \in \mathbb{C}\colon \ |\zeta| < 1\big\}.$$

Montrer que l'application :

$$\zeta := \psi(s) := \frac{s-1}{i(s+1)},$$

constitue un biholomorphisme $H \xrightarrow{\sim} \Delta$.

(c) Montrer que l'application :

$$\zeta := \mathsf{tan}\, \tfrac{\pi}{4}\, w,$$

constitue un biholomorphisme $B \xrightarrow{\sim} \Delta$.

(d) On se donne maintenant une application holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ avec $f(0) = 0$, où $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ est un disque unité.

Soit $g := \psi \circ \varphi \circ f$. Dresser une figure soignée incorporant les éléments suivants :

- $\mathbb{D}$, $0 \in \mathbb{D}$, un élément $z \in \mathbb{D}$, l'application f ;
- B, $0 \in B$, un élément $w \in B$, l'application φ, les points -1 et 1 ;
- H, $1 \in H$, un élément $s \in H$, l'application ψ ;
- Δ, $0 \in \Delta$, un élément $\zeta \in \Delta$, l'application g.

(e) Montrer que pour tout rayon $0 \leqslant r < 1$, on a :

$$g\big(\{|z| \leqslant r\}\big) \ \subset \ \{|\zeta| \leqslant r\}.$$

(f) Montrer que pour tout rayon $0 < r < 1$, l'image inverse :

$$\psi^{-1}\big(\{|\zeta| = r\}\big) \ = \ C_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big),$$

est un *cercle* dans le plan des s :

- de centre $\frac{1+r^2}{1-r^2}$;
- de rayon $\frac{2\,r}{1-r^2}$;
- de diamètre le segment $\big[\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}\big]$, contenu dans l'axe réel.

Indication: On pourra poser $s = \sigma + i\,t$.

(g) Vérifier que $\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)$ est le disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ dans le plan $\mathbb{C}_s$, contenu dans H.

(h) Redessiner la figure de la Question **(d)**, en y ajoutant le cercle $\{|z| = r\}$, avec $f(C_r)$, avec $\varphi\big(f(C_r)\big)$, avec $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big)$, avec le cercle $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, et avec $\big\{|\zeta| = r\big\}$.

(i) Pour tout $s \in \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, montrer que :

$$\big|\mathsf{Im}\,\varphi^{-1}(s)\big| \;\leqslant\; \tfrac{2}{\pi}\,\mathsf{log}\,\frac{1+r}{1-r}.$$

(j) Montrer que pour tout $|z| < 1$, toujours avec $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ satisfaisant $f(0) = 0$, on a :

$$\big|\mathsf{Im}\,f(z)\big| \;\leqslant\; \tfrac{2}{\pi}\,\mathsf{log}\,\tfrac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Indication: Observer que $\varphi^{-1}(s) = -\,i\,\frac{2}{\pi}\big(\mathsf{log}\,|s| + i\,\mathsf{arg}\,s\big)$, pour $s \in H$ avec $|\mathsf{arg}\,s| < \frac{\pi}{2}$.

(k) Montrer que pour tout $|z| < 1$, toujours avec $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ holomorphe satisfaisant $f(0) = 0$, on a :

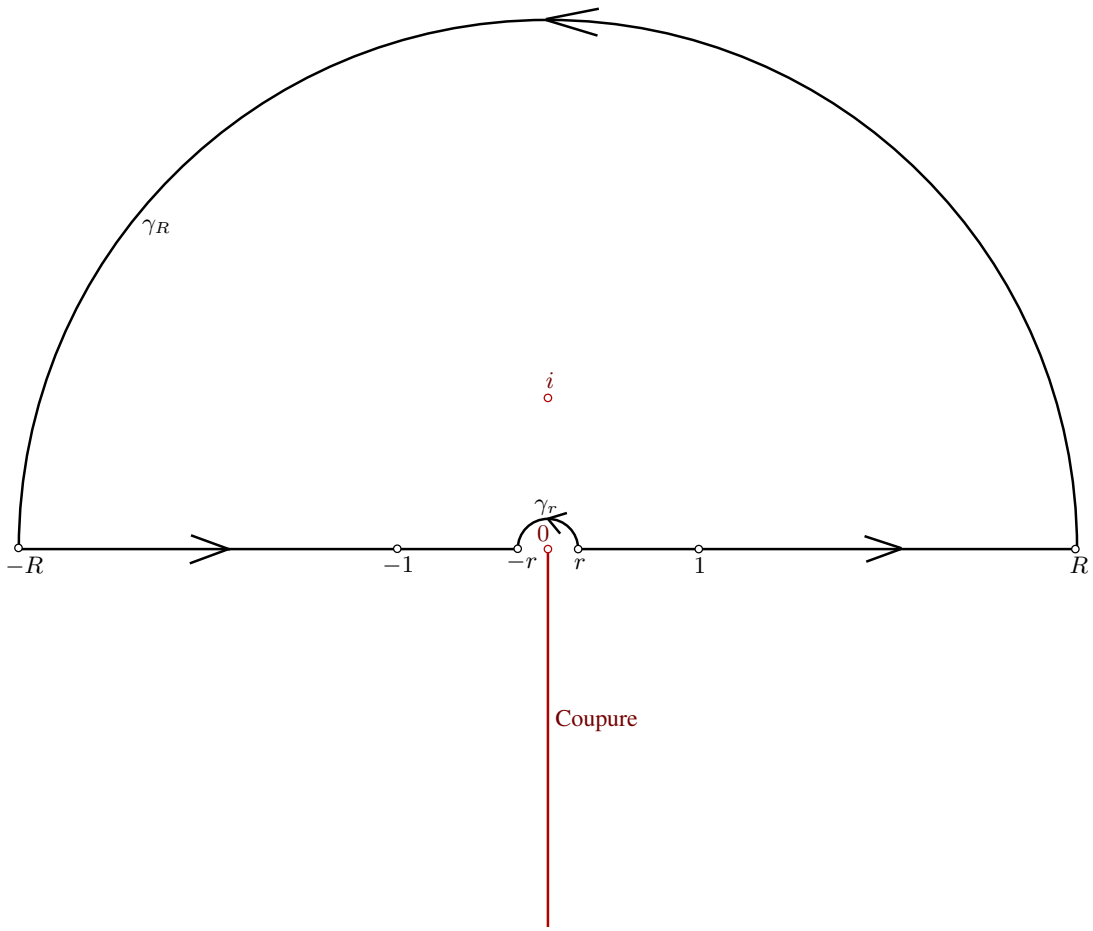
$$\big|\mathsf{Re}\,f(z)\big| \;\leqslant\; \tfrac{4}{\pi}\,\mathsf{arctan}\,|z|.$$

Indication: En dessinant une figure soignée, on pourra déterminer l'angle minimal $\alpha(r)$ tel que :

$$\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big) \;\subset\; \big\{s \in \mathbb{C}\colon\;\; \mathsf{Re}\,s > 0,\;\; |\mathsf{arg}\,s| \leqslant \alpha(r)\big\}.$$

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. **(a)** Voici la figure demandée :



(b) Le seul pôle de la fonction

$$f(z) \,:=\, \frac{(\log z)^2}{z^2+1},$$

méromorphe dans le domaine :

$$\Omega \,:=\, \mathbb{C}\backslash\big\{i\,y\colon\ y\in\mathbb{R}_-\big\},$$

et qui est contenu dans l'intérieur du contour de Jordan :

$$\Gamma_{r,R} \,:=\, [r,R]\cup\gamma_R\cup[-R,-r]\cup\gamma_r^-,$$

est $z_1 := i$, et il est d'ordre 1, avec un résidu égal à :

$$\mathsf{Res}_f(i) \,=\, \lim_{z\to i}(z-i)\,\frac{(\log z)^2}{(z-i)(z+i)} \,=\, \frac{(\log i)^2}{2\,i} \,=\, \frac{\big(i\,\frac{\pi}{2}\big)^2}{2\,i} \,=\, -\,\frac{\pi^2}{8\,i}.$$

L'identité visée est alors une expression du théorème des résidus appliqué à $f(z)$ sur le contour $\Gamma_{r,R}$:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^3}{4} &= 2i\pi\,\mathsf{Res}_f(i) \\ &= \int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

(c) Après découpage $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ et changement de variable $x = \frac{1}{y}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1 \frac{\log x}{x^2+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_\infty^1 \frac{\log \frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}\Big(-\frac{dy}{y^2}\Big) + \mathsf{idem} \\ &= \int_1^\infty \frac{-\log y}{y^2+1}\,dy + \mathsf{idem} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(d) Sur γ_R, avec $z = R\,e^{i\theta}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on a :

$$\big|\log z\big| = \big|\log R + i\theta\big| \leqslant \log R + \pi,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz\Big| &\leqslant \frac{\big(\log R+\pi\big)^2}{R^2-1}\,\pi\,R \\ &\xrightarrow{R\to\infty} 0. \end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, sur γ_r, on a avec $z = r\,e^{i\theta}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$:

$$\big|\log z\big| = \big|\log r + i\pi\big| \leqslant \log r + \pi,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\gamma_r} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz\Big| &\leqslant \frac{(\log r+\pi)^2}{1-r^2}\,\pi\,r \\ &\xrightarrow{r\to 0} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant simultanément $r \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow \infty$ dans l'équation de la Question **(b)**, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + 0 + \int_{-\infty}^0 \frac{\big(\log|x|+i\pi\big)^2}{x^2+1}\,dx + 0 = -\frac{\pi^3}{4}.$$

Il reste à changer $x \longmapsto -x$ dans cette deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{\big(\log x + i\pi\big)^2}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + 2i\pi\underbrace{\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx}_{\circ} - \pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\ &= I_1 + 0 - \frac{\pi^3}{2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$I_1 + I_1 - \frac{\pi^3}{2} \;=\; -\frac{\pi^3}{4},$$

et enfin :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx \;=\; \frac{\pi^3}{8}.$$

Exercice 2. **(a)** Dérivons :

$$L_p'(z) \;=\; 1 + z + \cdots + z^{p-1} \;=\; \frac{1-z^p}{1-z},$$

puis calculons :

$$\begin{aligned} -E_p'(z) \;&=\; e^{L_p(z)}\Big[1 - \big(1-z\big)\,L_p'(z)\Big] \\ &=\; e^{L_p(z)}\Big[1 - \big(1-z^p\big)\Big] \\ &=\; z^p\,e^{L_p(z)}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $e^w = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{1}{\ell!}\,w^\ell$ a des coefficients positifs, et comme les coefficients du polynôme $L_p(z)$ sont aussi positifs, il est clair qu'il en va de même pour la composée :

$$\begin{aligned} z^p\,e^{L_p(z)} \;&=\; z^p \sum_{\ell=0}^\infty \frac{1}{\ell!}\Big(z + \tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{z^p}{p}\Big)^\ell \\ &=:\; \sum_{k\geqslant p} a_k\,z^k. \end{aligned}$$

(b) Observons que $E_p(0) = 1$. Donc par intégration :

$$\begin{aligned} -E_p(z) + 1 \;&=\; \int_{[0,z]} -E_p'(\zeta)\,d\zeta \\ &=\; \sum_{k\geqslant p} \frac{a_k}{k+1}\,z^{k+1} \\ &=:\; z^{p+1}\sum_{k=0}^\infty b_k\,z^k, \end{aligned}$$

où les $b_k = \frac{a_k}{k+1}$ sont positifs, puisque les a_k le sont.

(c) Pour $|z| \leqslant 1$, majorons :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \;=\; \left|\sum_{k=0}^\infty b_k\,z^k\right| \;&\leqslant\; \sum_{k=0}^\infty b_k\,|z|^k \\ &\leqslant\; \sum_{k=0}^\infty b_k\cdot 1^k \\ &=\; \frac{1-E_p(1)}{1^{p+1}} \\ &=\; 1. \end{aligned}$$

(d) Fixons $r \geqslant 0$, éventuellement arbitrairement grand. Comme $|z_n| \longrightarrow \infty$, il existe un entier $\mathrm{N}(r) \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(r) \qquad \Longrightarrow \qquad r_n \geqslant 2\,r.$$

Par conséquent :

$$\Big(\frac{r}{r_n}\Big)^n \leqslant \Big(\frac{1}{2}\Big)^n,$$

ce qui assure la convergence de :

$$\sum_{n=\mathrm{N}(r)}^{\infty} \Big(\frac{r}{r_n}\Big)^n < \infty.$$

(e) Comme $|z_n| = r_n \longrightarrow \infty$, il existe $\mathrm{N}(r) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(r) \qquad \Longrightarrow \qquad r_n \geqslant r.$$

Écrivons :

$$E_{p_n}\Big(\frac{z}{z_n}\Big) = 1 + a_n(z).$$

Grâce à la Question **(c)**, pour $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$, il vient :

$$\begin{aligned} \Big(\, n \geqslant \mathrm{N}(r) \quad \text{et} \quad |z| \leqslant r \,\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big|a_n(z)\big| &\leqslant \Big(\frac{z}{z_n}\Big)^{1+p_n} \cdot 1 \\ &\leqslant \Big(\frac{r}{z_n}\Big)^{1+p_n}, \end{aligned}$$

donc avec l'hypothèse de convergence de la série ci-dessus, nous voyons que $\sum_{n=1}^{\infty} \big|a_n(z)\big|$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}_r$, donc sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, puisque $r \geqslant 0$ était arbitraire.

Enfin, un théorème du cours assure que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)$$

converge (normalement, par définition) vers une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, dont les zéros sont exactement ceux de ses facteurs, à savoir les $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, avec répétitions éventuelles.

(f) Avec $p_n := n - 1$ comme à la Question **(d)**, la fonction construite à la Question **(e)** :

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{n-1}\Big(\frac{z}{z_n}\Big),$$

a pour zéros exactement la suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dont les éléments sont distincts.

Ensuite, d'après un théorème du cours :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} \frac{E'_{n-1}\big(\frac{z}{z_n}\big)}{E_{n-1}\big(\frac{z}{z_n}\big)},$$

d'où :

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} E'_{n-1}\Big(\frac{z}{z_n}\Big) \prod_{k \neq n} E_{k-1}\Big(\frac{z}{z_k}\Big),$$

puis pour tout $m \geqslant 1$ fixé :

$$\begin{aligned} g'(z_m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} E'_{n-1}\Big(\frac{z_m}{z_n}\Big) \prod_{k \neq n} E_{k-1}\Big(\frac{z_m}{z_k}\Big) \\ &= \frac{1}{z_m} \underbrace{E'_{m-1}(1)}_{\neq 0} \underbrace{\prod_{k \neq m} E_{k-1}\Big(\frac{z_m}{z_k}\Big)}_{\neq 0}. \end{aligned}$$

Cette dérivée $g'(z_m)$ est non nulle, *car* les $E_{k-1}\big(\frac{z}{z_k}\big)$ avec $k \neq m$ ne s'annulent qu'en $z = z_k$, nulle part ailleurs, *et car*, d'après la Question **(a)** :

$$\begin{aligned} E'_{m-1}(z) &= -\, z^{m-1}\, e^{L_{m-1}(z)}, \\ E'_{m-1}(1) &= -\, 1^{m-1}\, e^{L_{m-1}(1)} \neq 0. \end{aligned}$$

(g) Tout d'abord, on peut bien diviser par $g'(z_n) \neq 0$. Ensuite, comme :

$$\begin{aligned} g(z) &= \underline{g(z_m)}_{\circ} + (z - z_m)\, g'(z_m) + \mathrm{O}\big((z - z_m)^2\big), \\ f_m(z) &= \frac{(z - z_m)\, g'(z_m) + \mathrm{O}\big((z - z_m)^2\big)}{(z - z_m)\, g'(z_m)}, \end{aligned}$$

il est clair que :

$$f_m(z_m) = 1,$$

tandis que pour $m \neq n$:

$$f_n(z_m) = \frac{\underline{g(z_m)}_{\circ}}{(z_m - z_n)\, g'(z_m)} = 0.$$

Donc formellement, nous avons bien, pour tout $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} h(z_m) &= w_m\, f_m(z_m)\, e^0 + \sum_{n \neq m} w_n\, \underline{f_n(z_m)}_{\circ}\, e^{c_n(z_m - z_n)} \\ &= w_m. \end{aligned}$$

Mais nous devons encore assurer que cette somme infinie converge normalement sur les compacts $K \subset \mathbb{C}$!

À cette fin, choisissons des constantes $c_n \in \mathbb{C}$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \arg z_n : &\qquad c_n\, z_n = \big|c_n\, z_n\big|, \\ |z_n| : &\qquad |w_n|\, M_n\, e^{-|c_n|\, \frac{1}{2}\, |z_n|} \leqslant \tfrac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ensuite, soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact quelconque. Comme $|z_n| \longrightarrow \infty$, il existe un entier $\mathrm{N}(K) \gg 1$ assez grand tel que :

$$\begin{aligned} n \geqslant \mathrm{N}(K) \qquad &\Longrightarrow \qquad \max_{z \in K} |z| \leqslant \tfrac{1}{2}\, |z_n| \\ &\Longrightarrow \qquad \max_{z \in K} \big|f_n(z)\big| \leqslant M_n, \end{aligned}$$

d'où :

$$|z_n| - |z| \geqslant \tfrac{1}{2}\, |z_n|,$$

donc pour $z \in K$ et $n \geqslant \mathrm{N}(K)$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}
\Big| w_n \, f_n(z) \, e^{c_n(z-z_n)} \Big| &\leqslant |w_n| \, M_n \, \big| e^{c_n z} \, e^{-c_n z_n} \big| \\
&= |w_n| \, M_n \, \big| e^{c_n z} \big| \, e^{-|c_n \, z_n|} \\
&\leqslant |w_n| \, M_n \, e^{|c_n| \, |z|} \, e^{-|c_n| \, |z_n|} \\
&= |w_n| \, M_n \, e^{-|c_n| \, (|z_n| - |z|)} \\
&\leqslant |w_n| \, M_n \, e^{-|c_n| \, \frac{1}{2} \, |z_n|} \\
&\leqslant \tfrac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la série :

$$h(z) \, = \, \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, f_n(z) \, e^{c_n(z-z_n)},$$

converge normalement sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, et donc constitue, d'après un théorème de Cauchy, une fonction holomorphe entière $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ qui résout complètement un problème d'interpolation analogue à l'interpolation polynomiale de Lagrange.

Exercice 3. (a) Écrivons $w = u + i \, v$. Dans la bande B, avec $-1 < u < 1$, avec $v \in \mathbb{R}$, on a :

$$s \, = \, e^{i \frac{\pi}{2} u} \, e^{-\frac{\pi}{2} v},$$

donc $|\mathsf{arg}\, s| < \frac{\pi}{2}$, et $|s| \in \mathbb{R}_+^*$ peuvent prendre des valeurs quelconques, et il est clair par cette formule que φ est bijective.

D'après un théorème du cours, la dérivée d'une application holomorphe injective est automatiquement non nulle, ce que nous vérifions :

$$\frac{d\varphi}{dw} \, = \, i \, \tfrac{\pi}{2} \, e^{i \frac{\pi}{2} w} \, \neq \, 0.$$

(b) Comme $\mathsf{Re}\, s > 0$, comme $1 \in \{\mathsf{Re}\, s > 0\}$, comme $-1 \notin \{\mathsf{Re}\, s > 0\}$, il est géométriquement clair que :

$$|s - 1| \, < \, \big| s - (-1) \big|,$$

donc :

$$|\psi(s)| \, = \, \frac{|s-1|}{|s+1|} \, < \, 1,$$

ce qui montre que ψ est à valeurs dans Δ.

De plus, ψ est surjective, car :

$$\frac{s-1}{i(s+1)} \, = \, \zeta \qquad \Longleftrightarrow \qquad s \, = \, \frac{i - \zeta}{i + \zeta},$$

d'où :

$$2 \, \mathsf{Re}\, s \, = \, \frac{i - \zeta}{i + \zeta} + \frac{-i - \overline{\zeta}}{-i + \overline{\zeta}} \, = \, 2 \, \frac{1 - \zeta \overline{\zeta}}{1 + \zeta \overline{\zeta}} \, > \, 0.$$

Ces calculs et ces formules montrent d'ailleurs que ψ est bijective, donc injective, donc de dérivée jamais nulle d'après un théorème du cours.

On peut même vérifier directement la non-annulation de la dérivée :

$$i\,\psi'(s) \;=\; \frac{1\,(s+1)-(s-1)\,1}{(s+1)^2} \;=\; \frac{2}{(s+1)^2} \;\neq\; 0.$$

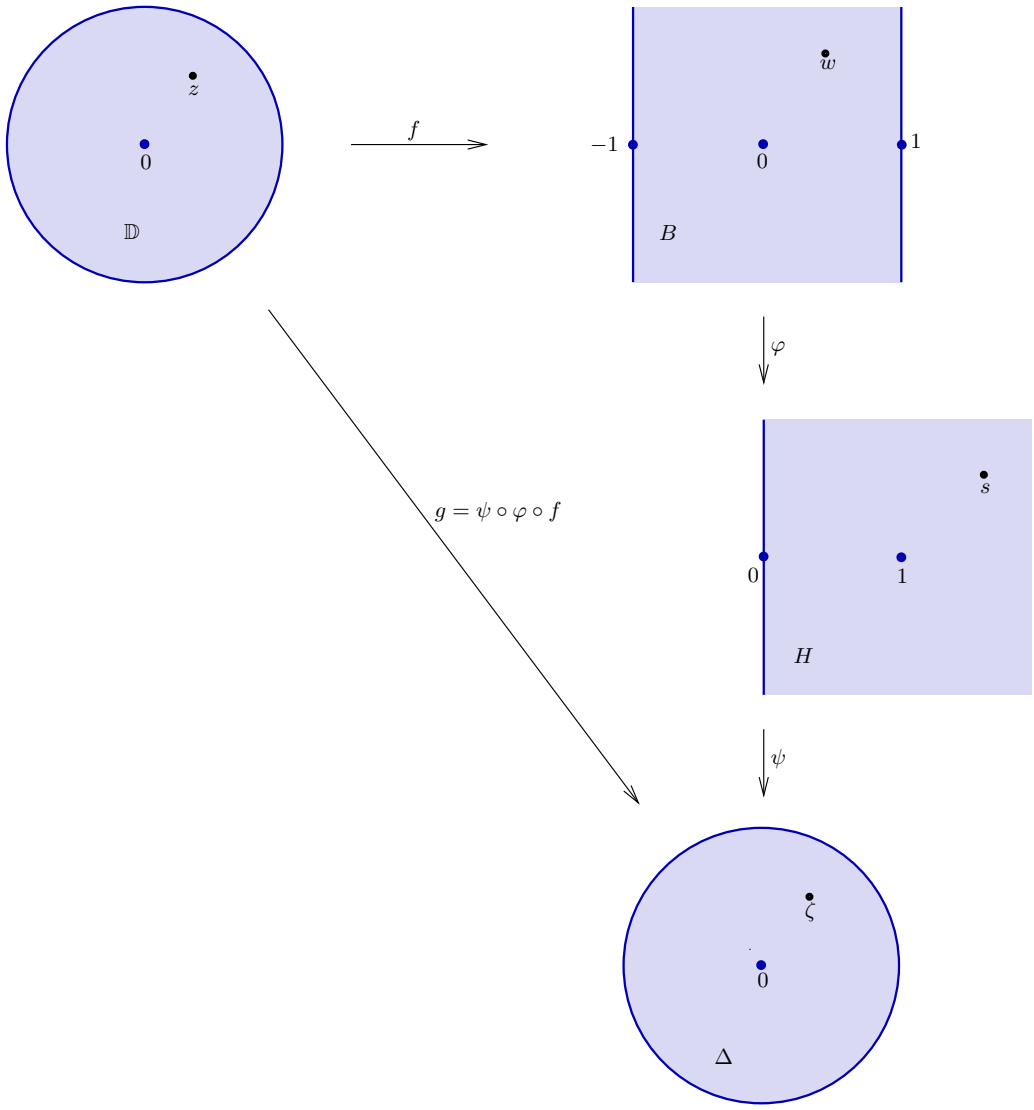
(c) Il suffit de composer les deux biholomorphismes précédents :

$$B \xrightarrow[\varphi]{\sim} H \xrightarrow[\psi]{\sim} \Delta,$$

ce qui donne un biholomorphisme $\psi \circ \varphi$, dont l'expression explicite est :

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi\,(w) \;=\; \psi\big(e^{i\frac{\pi}{2}w}\big) \;&=\; \frac{e^{i\frac{\pi}{2}w}-1}{i\,\big(e^{i\frac{\pi}{2}}\,w+1\big)} \\
&=\; \frac{e^{\frac{i\pi}{4}w}-e^{-i\frac{\pi}{4}w}}{i\,\big(e^{\frac{i\pi}{4}w}+e^{-i\frac{\pi}{4}w}\big)} \\
&=\; \frac{2\,i\,\sin\frac{\pi}{4}\,w}{i\,2\cos\frac{\pi}{4}\,w} \\
&=\; \tan\frac{\pi}{4}\,w.
\end{aligned}$$

(d) Voici la figure demandée :



(e) La composition $g = \psi \circ \varphi \circ f$ est une application holomorphe $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ satisfaisant $g(0) = 0$. Donc grâce au Lemme de Schwarz :

$$\big|g(z)\big| \leqslant |z| \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Donc si $|z| \leqslant r$, on a bien $\zeta := g(z)$ qui satisfait $|\zeta| \leqslant r$.

(f) Ainsi, décomposons $s = \sigma + i\,t$ en parties réelle et imaginaire, et explicitons la condition $\big|\psi(s)\big| = r$, à savoir :

$$\left|\frac{s-1}{i\,(s+1)}\right| = r,$$

comme suit :

$$\big|\sigma + i\,t - 1\big|^2 = r^2\,\big|\sigma + i\,t + 1\big|^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma-1)^2+t^2-r^2\,(\sigma+1)^2-r^2\,t^2 \\ &= \sigma^2-2\,\sigma+1+t^2-r^2\,\sigma^2-2\,r\,\sigma-r^2-r^2\,t^2 \\ &= \sigma^2\,(1-r^2)-2\,\sigma\,(1+r^2)+t^2\,(1-r^2)+1-r^2, \end{aligned}$$

d'où après division par $1-r^2\neq 0$:

$$0 = \sigma^2-2\,\sigma\Big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\Big)+t^2+1.$$

Ensuite, faisons apparaître un carré :

$$0 = \Big(\sigma-\frac{1+r^2}{1-r^2}\Big)^2\underline{-\Big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\Big)^2+1}+t^2,$$

sachant que les termes soulignés deviennent :

$$\frac{-1-2\,r^2-r^4+1-2\,r^2+r^4}{(1-r^2)^2} = \frac{-4\,r^2}{(1-r^2)^2} = -\Big(\frac{2\,r}{1-r^2}\Big)^2,$$

ce qui nous permet d'écrire l'équation algébrique du lieu $\psi^{-1}\big(\{|s|=r\}\big)$:

$$\Big(\frac{2\,r}{1-r^2}\Big)^2 = \Big(\sigma-\frac{1+r^2}{1-r^2}\Big)^2+\big(t-0\big)^2,$$

comme étant visiblement l'équation d'un *cercle*, de centre situé sur l'axe réel $\mathbb{R}_\sigma=\{t=0\}$:

$$\frac{1+r^2}{1-r^2}+i\,0,$$

et de rayon :

$$\frac{2\,r}{1-r^2}.$$

Enfin, les deux points-extrémités du diamètre contenu dans l'axe $\mathbb{R}_\sigma$ sont :

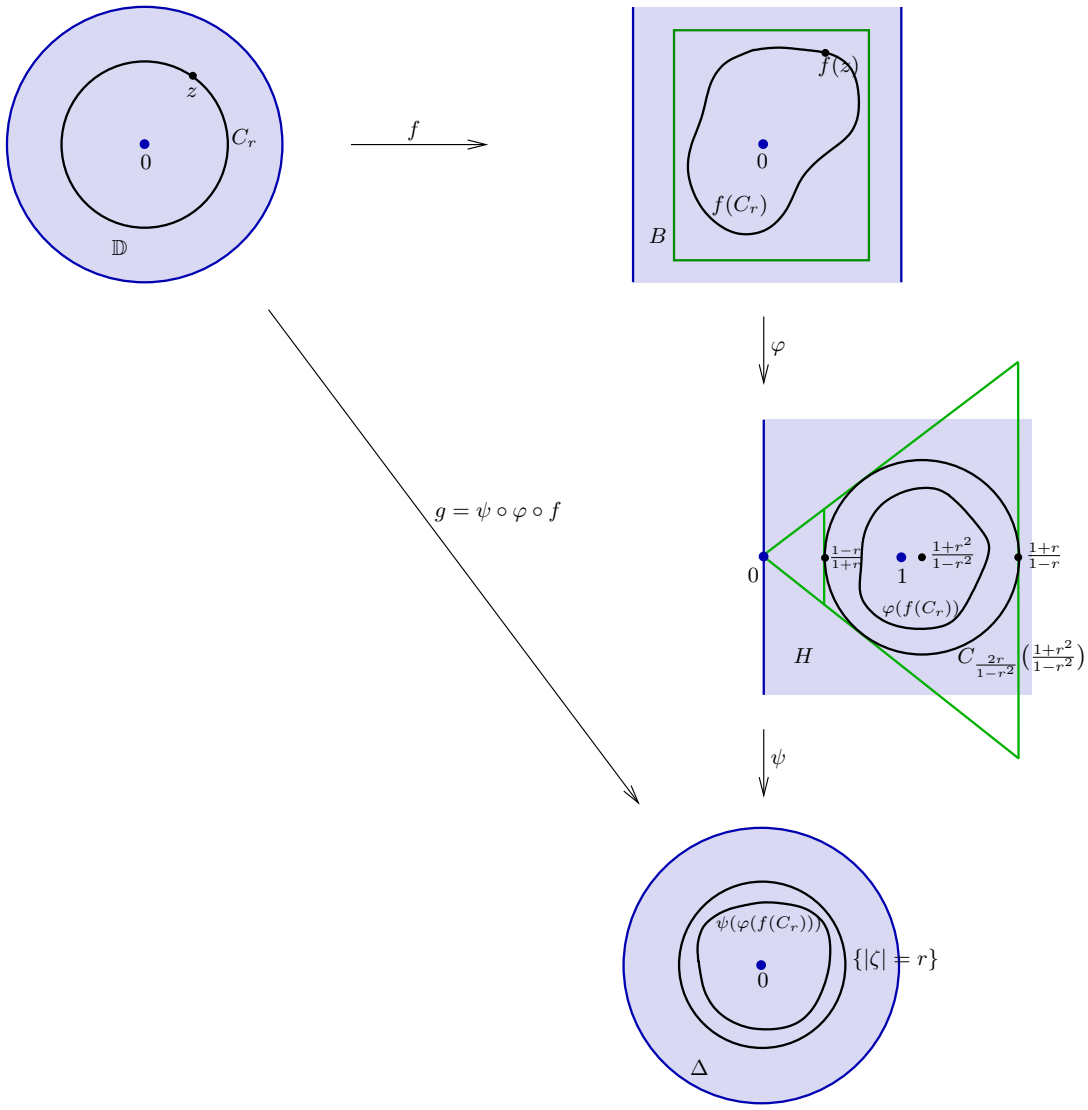
$$-\frac{2\,r}{1-r^2}+\frac{1+r^2}{1-r^2} = \frac{1-r}{1+r} \qquad \text{et} \qquad \frac{1+r^2}{1-r^2}+\frac{2\,r}{1-r^2} = \frac{1+r}{1-r}.$$

(g) Comme ψ est un biholomorphisme $H\xrightarrow{\sim}\Delta$, l'image inverse $\psi^{-1}\big(\{|\zeta|<r\}\big)$ est un domaine simplement connexe contenu dans H de bord $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ qui ne peut alors être que le disque ouvert $\mathbb{D}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, grâce au théorème Jordan.

Clairement, le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1-r^2}{1+r^2}\big)$ est contenu dans H, car son diamètre réel $\big[\frac{1-r}{1+r},\frac{1+r}{1-r}\big]$ l'est.

(h) Redessiner la figure de la Question **(d)**, en y ajoutant le cercle $\{|z|=r\}$, avec $f(C_r)$, avec $\varphi\big(f(C_r)\big)$, avec $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big)$, avec le cercle $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, et avec $\big\{|\zeta|=r\big\}$.

(h) Voici la figure demandée :



(i) D'après l'expression de φ :

$$\mathsf{Im}\,\varphi^{-1}(s) \;=\; -\,\tfrac{2}{\pi}\,\mathsf{log}\,|s|.$$

Or pour s dans le disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, il est géométriquement clair que le module $|s|$ de s est compris entre les valeurs du *diamètre réel* calculé plus haut :

$$\frac{1-r}{1+r} \;\leqslant\; |s| \;\leqslant\; \frac{1+r}{1-r} \qquad \Big(\forall\, s \in \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big)\Big).$$

Il suffit alors de prendre le logarithme :

$$\mathsf{log}\,\frac{1-r}{1+r} \;\leqslant\; \mathsf{log}\,|s| \;\leqslant\; \mathsf{log}\,\frac{1+r}{1-r},$$

puis d'observer que le majorant à droite est l'*opposé* du majorant à gauche.

(j) Si $z = 0$, l'inégalité est triviale. Fixons donc $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, avec $0 < r < 1$ et avec :

$$r \;:=\; |z|.$$

Travaillons avec le cercle C_r comme ci-dessus. Alors $f(z)$ est contenu dans l'image $f(C_r)$.

Puis, $\psi\big(\varphi\big(f(z)\big)\big)$ est contenu dans $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big) = g(C_r)$. Mais cette image est aussi égale à $g(C_r)$, et grâce au Lemme de Schwarz à la Question **(e)**, elle est contenue à l'intérieur de l'autre cercle $C_r = \{|\zeta| = r\}$ de rayon r.

Autrement dit, $\psi\big(\varphi\big(f(z)\big)\big)$ est contenu dans $\{|\zeta| \leqslant r\}$.

Mais comme ψ est un biholomorphisme, $\varphi\big(f(z)\big)$ est contenu dans $\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)$. Et comme φ est aussi un biholomorphisme, $f(z)$ est contenu dans :

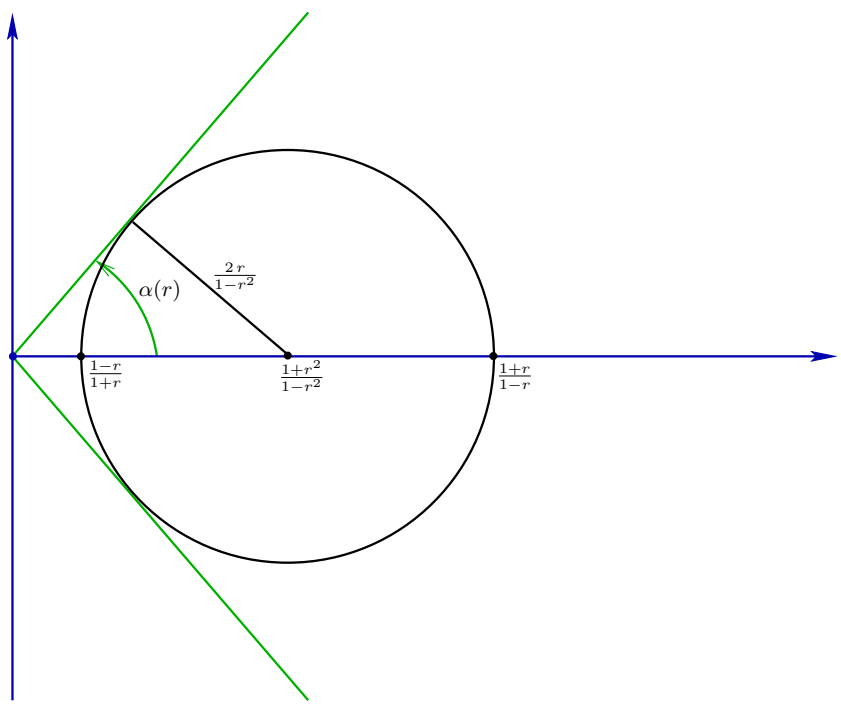
$$\varphi^{-1}\big(\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)\big),$$

et nous venons de voir que cette image inverse est contenue dans :

$$\Big\{w \in \mathbb{C}\colon\ \big|\mathsf{Im}\, w\big| \leqslant \tfrac{2}{\pi} \log \tfrac{1+r}{1-r}\Big\}.$$

Comme $|z| = r$ depuis le début, nous avons bien démontré l'inégalité :

$$\big|\mathsf{Im}\, f(z)\big| \ \leqslant\ \tfrac{2}{\pi} \log \tfrac{1+|z|}{1-|z|}.$$



(k) Comme cela a été anticipé sur la figure, observons que notre disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ dans le plan des $s \in \mathbb{C}$ est contenu dans le secteur angulaire :

$$\big\{s \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Re}\, s > 0,\ \ |\mathsf{arg}\, s| \leqslant \alpha(r),\big\}$$

où l'angle $\alpha(r)$ est déterminé par :

$$\mathsf{sin}\, \alpha(r) \ =\ \frac{2r/(1-r^2)}{(1+r^2)/(1-r^2)} \ =\ \frac{2\,r}{1+r^2},$$

d'où :

$$\mathsf{cos}^2\, \alpha(r) \ =\ 1 - \mathsf{sin}^2 \alpha(r) \ =\ \Big(\frac{1-r^2}{1+r^2}\Big)^2,$$

puis :

$$\tan \alpha(r) \;=\; \frac{2\,r}{1-r^2}.$$

Ensuite, comme :

$$\operatorname{Re} \varphi^{-1}(s) \;=\; \tfrac{2}{\pi} \arg s,$$

comme :

$$\big|\arg s\big| \;\leqslant\; \tfrac{2}{\pi}\,\alpha(r) \qquad\qquad (\forall\, s \in \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}(\tfrac{1+r^2}{1-r^2})),$$

et comme :

$$\varphi\big(f(z)\big) \;\in\; \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big),$$

il vient par conséquent :

$$\begin{aligned}\big|\operatorname{Re} f(z)\big| \;&\leqslant\; \tfrac{2}{\pi}\,\alpha(r)\\ &=\; \tfrac{2}{\pi} \arctan \tfrac{2\,r}{1-r^2}.\end{aligned}$$

Enfin, la formule :

$$\tan 2\,\beta \;=\; \frac{2 \tan \beta}{1-\tan^2\beta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \arctan r \;=\; \arctan \frac{2\,r}{1-r^2},$$

permet de conclure :

$$\begin{aligned}\big|\operatorname{Re} f(z)\big| \;&\leqslant\; \tfrac{2}{\pi}\, 2 \arctan r\\ &=\; \tfrac{4}{\pi} \arctan |z|.\end{aligned}$$